

Lezione 13 del 22-11-2021

Ipotesi del continuo

Potenze del continuo



Potenze del Numerabile

Cantor formulò l'ipotesi che non esiste un insieme che ha una potenza maggiore del numerabile e minore del continuo.

Nel 1963 Cohen formulò un teorema

"L'ipotesi del continuo è indipendente dai
criteri assiomatici delle teorie degli insiemi"

Created with Doceri



Ipotesi generalizzata del continuo

Dato un insieme S infinito, non esiste un insieme che abbia potenza strettamente maggiore di S e strettamente di $P(S)$.

Hilbert

Categoricità, completezza, consistenza, indipendenza

Una teoria T viene detta soddisfacibile se ammette almeno un modello.

Viene CATEGORICA se è soddisfacibile e tutti i suoi modelli sono isomorfi tra loro

↳ Esiste un unico modello a meno di isomorfismi

Es. il sistema di assiomi della geometria euclidea è categorico

La teoria dei gruppi non è categorica, come pure la teoria degli anelli.

Created with Doceri



Definizione T
 Una teoria T è detta consistente se non esiste nessuna
 asserzione α t.c.

$T \vdash \alpha$ e $T \vdash \neg \alpha$
 α è un teorema di T $\neg \alpha$ è un teorema di T

Proposizione T soddisfacibile $\Rightarrow T$ è consistente

dim. Supponiamo che T ammetta un modello M
 allora se esistesse, per assurdo α t.c.

$T \vdash \alpha$ e $T \vdash \neg \alpha$

avremmo che α soddisfa la teoria T
 e $\neg \alpha$ soddisfa la teoria T e quindi in M
 l'asserzione α dovrebbe essere sia vera che
 falsa.

Es la teoria dei gruppi è consistente.

Created with Doceri



Un esempio di teoria ricorsivamente è la teoria degli insiemi ordinati finiti che non hanno elementi minimi.

Infatti se ho un insieme ordinato (S, \leq) che non ha elementi minimi, allora per un elemento $x \in S$ esiste un $x_1 < x$ perché x non può essere minimale, posso prendere un $x_2 < x_1$ —

Quindi esiste una successione infinita di elementi x_n tutti diversi tra loro. Ciò prova che esistono infiniti elementi in S .

In T può essere dimostrato che l'asserzione "esistono infiniti elementi" ha l'asserzione "non esistono infiniti elementi".

Created with Doceri



Definizione Una teoria T è indipendente se nessun assioma può essere dimostrato in presenza di un altro a partire dagli altri assiomi.

Definizione Data una teoria T diciamo che una affermazione α è indipendente da T se non accade né che $T \vdash \alpha$ né che $T \vdash \neg \alpha$ cioè α non può essere né provato né confutato a partire dagli assiomi di T .

Definizione Una teoria T è detta completa se $\forall \alpha$
 $\circ T \vdash \alpha$ o $T \vdash \neg \alpha$.



Hilbert ed Euclide

Il punto di vista fondazionale di Hilbert e l'approccio assiomatico di Euclide non hanno lo scopo di "creare" una nuova matematica, né trovare nuovi risultati.

Essi si concentrano sulla organizzazione logica (Euclide) e sulla giustificazione (Hilbert) della matematica già esistente.

In fatti i "Fondamenti della Geometria" di Hilbert rappresentano un riferimento della geometria euclidea. Gli Elementi di Euclide sono una esposizione logicamente ordinata dei teoremi conosciuti all'epoca.

Per gli strutturalisti il metodo assiomatico viene usato per cogliere la struttura comune e distinguere della matematica allo scopo di verificare diverse affermazioni.

Created with Doceri



L'intuizione, in Euclide, è lo strumento con il quale si arriva alla conoscenza.

È essenziale che gli assiomi siano intuitivi perché la loro immediatezza assicura la bontà di una teoria che si vuole costruire.

Per Hilbert, non è detto che i singoli assiomi debbano essere intuitivi. Anche se gli assiomi di Hilbert ereditano il carattere intuitivo degli assiomi di Euclide.

Per gli strutturalisti l'intuizione è una cosa da combattere perché non ha un valore euristico.

La Categoricità: In Euclide, il problema della categoricità non esiste. Infatti il suo sistema di assiomi aveva l'unico scopo di descrivere in modo adeguato il modello fornito dalle idee platoniche di punto, retta, circonferenza.

Created with Doceri



Heberlein si pone il problema in modo netto.

Considerare la categorizzazione un requisito essenziale per il suo sistema in quanto la base del sistema di esseri: consiste nella capacità di individuare esattamente l'oggetto matematico a cui si vuole dare una base solida.

Per gli strutturalisti, la base di una teoria si verifica nella sua capacità di abbracciare quantitativamente oggetti matematici forse possibile.

Ad es. un teorema delle teorie dei gruppi è importante perché fornisce informazioni su una vasta classe di strutture.

Created with Doceri



Completezza

Nella tradizione Euclidea, la completezza di una teoria era considerata un requisito indispensabile

Un sistema di assiomi per la geometria per cui esiste una asserzione non dimostrabile e non confutabile è inadeguato a rappresentare l'intelligenza geometrica.

In Hilbert, è essenziale il concetto di completezza e la categoricità. Se una teoria non è completa non può "fondere" qualche struttura matematica.

Per gli strutturalisti una buona teoria non deve essere completa in quanto deve essere la parte comune a più teorie diverse tra loro.



Consistenza

Anche il problema della consistenza non poteva riguardare Euclide. Infatti, il sistema di postulati era un elenco di proprietà di un modello preesistente in cui l'uomo ha diretto e innescato conoscenza.

Per Hilbert è emersa. Non esiste un mondo geometrico da descrivere ma un sistema di assiomi e viene essenza di questo sistema di assiomi da sotto scarto nulla.

Per gli strutturalisti è molto meno rappresentativa la questione. Ad esempio, il problema della consistenza della teoria dei gruppi non si è mai posto in quanto tale teoria nasce successivamente alla considerazione di alcuni gruppi concreti.

Created with Doceri



Sia in Euclide che in Hilbert l'assiomaticizzazione
risponde al problema di dare un fondamento sicuro
all'intero edificio della matematica.
Negli Strutturalisti l'atteggiamento è più pragmatico.
Essi non pretendono di dare un sistema di assiomi
su cui fondare la matematica.

Pensano che la matematica si possa sviluppare
in diversi settori i quali si possono esaminare
indipendentemente uno dall'altro.

Dieudonné " Il matematico moderno si sente
così perfettamente in pace con la sua coscienza
che non si preoccupa affatto di tutti gli pseudo-problemi
che hanno preoccupato i suoi predecessori".

Created with Doceri



NB La distinzione tra approccio fondazionale
e approccio strutturalista al metodo assiomatico
è di interesse da un punto di vista didattico

Infatti il metodo assiomatico nelle Scienze può
essere introdotto o tramite un sistema di assiomi
per la geometria euclidea (Hilbert) oppure
tramite la nozione di gruppo o di insieme ordinato
(Bourbaki).

Created with Doceri

