Forme differenziali e campi vettoriali: esercizi svolti

1 Esercizi sul Teorema di Green

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo * presentano un grado di difficoltà maggiore.

Esercizio. Calcolare i seguenti integrali utilizzando il Teorema di Green:

a) $\displaystyle\int_\gamma y^2\,dx + x\,dy$, dove γ parametrizza $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2=1\right\}$ inducendo su di esso un verso di percorrenza antiorario. $[\pi]$

b) $\displaystyle\int_\gamma F \cdot dP$, dove $F(x,y) = (x^2y^3, y)$, e γ è una parametrizzazione del bordo di $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x^2+y^2 \le 4\right\}$ orientato positivamente. $\left[-\frac{63}{8}\pi\right]$

Svolgimento

a) La forma differenziale $\omega = y^2\,dx + x\,dy$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$ ma non è esatta, perchè se lo fosse sarebbe anche chiusa. Infatti, posto $\omega = f_1\,dx + f_2\,dy$ con

$$f_1(x,y) = y^2, \qquad f_2(x,y) = x,$$

si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 2y \ne 1 = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y).$$

Ne segue che ω non è esatta.

Calcoliamo l'integrale $\displaystyle\int_\gamma \omega$. Osserviamo che C è la circonferenza di centro l'origine O e raggio 1. Quindi $C = \partial A$, dove $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 < 1\right\}$. Per il Teorema di Green si ha che

$$\int_\gamma \omega = \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right) dx\,dy = \int_A (1-2y)dx\,dy =$$

e passando in coordinate polari nel piano

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (1-2\rho\sin\vartheta)\rho\,d\rho\right] d\vartheta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{2}{3}\rho^3\sin\vartheta\right]_0^1 d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin\vartheta\right) d\vartheta = \pi.$$

b) Il campo vettoriale $F(x,y) = (x^2y^3, y)$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$ ma non è conservativo. Infatti, posto $F = (f_1, f_2)$ con

$$f_1(x,y) = x^2y^3, \qquad f_2(x,y) = y,$$

si ha che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 \neq 0 = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y).$$

Ne segue che F non è conservativo.

Calcoliamo l'integrale $\int_\gamma F \cdot dP$. Per il Teorema di Green si ha che

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right) dx\, dy = -\int_A 3x^2y^2\, dx\, dy =$$

passando in coordinate polari nel piano

$$= -3 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta\, d\vartheta \right) \left[\int_1^2 \rho^5\, d\rho \right] = -\frac{3}{4} \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 2\vartheta\, d\vartheta \right) \left[\frac{1}{6}\rho^6 \right]_1^2 =$$

$$= -\frac{63}{8} \left[\frac{1}{4}(2\vartheta - \sin 2\vartheta \cos 2\vartheta) \right]_0^{2\pi} = -\frac{63}{8}\pi.$$

2 Esercizi sul Teorema di Stokes

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo * presentano un grado di difficoltà maggiore.

Esercizio. Calcolare i seguenti integrali utilizzando il Teorema di Stokes (detto anche del rotore):

a) $\displaystyle\int_{\partial\Sigma} \left(z^2+y\right)\, dx + z\, dy + y\, dz,$ dove
$\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ z = 1-x^2-y^2,\ x^2+y^2\le 1\right\}$ con $\partial\Sigma$ orientato positivamente. $[-\pi]$

b) $\displaystyle\int_{\partial\Sigma} (y-x)\, dx + (2y+z)\, dy - z\, dz,$ dove
$\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ z = \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2\le 1\right\}$ con $\partial\Sigma$ orientato positivamente. $[\pi]$

c) $\displaystyle\int_\gamma F\cdot dP,$ dove $F(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$ e γ è una parametrizzazione del bordo di $\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ y=z\right\}$ orientato in senso antiorario rispetto ad un osservatore posto lungo l'asse z. $[0]$

Svolgimento

a) La forma differenziale $\omega = \left(z^2+y\right)\, dx + z\, dy + y\, dz$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$ ma non è esatta, perchè se lo fosse sarebbe anche chiusa. Infatti, posto $\omega = f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz$ e $F = (f_1, f_2, f_3)$ con

$$f_1(x,y,z) = z^2+y, \qquad f_2(x,y,z) = z, \qquad f_3(x,y,z) = y,$$

si ha che

$$\mathrm{rot}F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(x,y,z) & f_2(x,y,z) & f_3(x,y,z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2+y & z & y \end{vmatrix} =$$

$$= 2z\mathbf{j} - \mathbf{k} = (0, 2z, -1).$$

Ne segue che F non è conservativo e ω non è esatta.

Calcoliamo l'integrale $\displaystyle\int_{\partial\Sigma}\omega$. Per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_{\partial\Sigma}\omega = \int_{\partial\Sigma} F\cdot dP = \int_\Sigma \mathrm{rot}F\cdot n,$$

dove n è il versore normale uscente da Σ. La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, dove

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 1\right\}.$$

È quindi parte del paraboloide di equazione $z = 1 - x^2 - y^2$ al di sopra del piano $z = 0$. Si ha che $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è definita da

$$\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = \left(x, y, 1 - x^2 - y^2\right).$$

Per definizione di integrale di flusso si ha che

$$\int_\Sigma \text{rot}F \cdot n = \int_K \text{rot}F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y)\, dx\, dy,$$

dove $N(x, y)$ è il vettore normale esterno a Σ nel punto $\sigma(x, y)$ uscente da Σ. Si ha che il vettore $N_1(x, y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x, y)$ è normale alla superficie $\Sigma = \sigma(K)$. Si ha che

$$N_1(x, y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1\right) = (2x, 2y, 1).$$

Questo vettore normale è uscente da Σ. Quindi un vettore uscente è $N(x, y) = N_1(x, y) = (2x, 2y, 1)$. Ne segue che

$$\text{rot}F(\sigma(x, y))\cdot N(x, y) = \left(0, 2\left(1 - x^2 - y^2\right), -1\right)\cdot(2x, 2y, 1) = 4y\left(1 - x^2 - y^2\right) - 1$$

e

$$\int_\Sigma \text{rot}F \cdot n = \int_K \text{rot}F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y)\, dx\, dy = \int_K \left[4y\left(1 - x^2 - y^2\right) - 1\right] dx\, dy =$$

passando in coordinate polari nel piano

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left[4\rho\left(1 - \rho^2\right)\sin\vartheta - 1\right]\rho\, d\rho\right) d\vartheta = -\pi.$$

b) La forma differenziale $\omega = (y - x)\, dx + (2y + z), dy - z\, dz$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$ ma non è esatta, perchè se lo fosse sarebbe anche chiusa. Infatti, posto $\omega = f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz$ e $F = (f_1, f_2, f_3)$ con

$$f_1(x, y, z) = y - x, \qquad f_2(x, y, z) = 2y + z, \qquad f_3(x, y, z) = -z,$$

si ha che

$$\text{rot}F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(x, y, z) & f_2(x, y, z) & f_3(x, y, z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y - x & 2y + z & -z \end{vmatrix} =$$

$$= -\mathbf{i} - \mathbf{k} = (-1, 0, -1).$$

Ne segue che F non è conservativo e ω non è esatta.

Calcoliamo l'integrale $\int_{\partial\Sigma} \omega$. Per il Teorema di Stokes si ha che

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \mathrm{rot} F \cdot n,$$

dove n è il versore normale uscente da Σ. La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, dove

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

È quindi parte del semicono di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ al di sotto del piano $z = 1$. Si ha che $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è definita da

$$\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)) = \left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2} \right).$$

Per definizione di integrale di flusso si ha che

$$\int_{\Sigma} \mathrm{rot} F \cdot n = \int_K \mathrm{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y)\, dx\, dy,$$

dove $N(x, y)$ è il vettore normale esterno a Σ nel punto $\sigma(x, y)$ uscente da Σ. Si ha che il vettore $N_1(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y)$ è normale alla superficie $\Sigma = \sigma(K)$. Si ha che

$$N_1(x, y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) =$$

$$= \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right).$$

Questo vettore normale è entrante in Σ. Quindi un vettore uscente è $N(x, y) = -N_1(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1 \right)$. Ne segue che

$$\mathrm{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y) = (-1, 0, -1) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e

$$\int_{\Sigma} \mathrm{rot} F \cdot n = \int_K \mathrm{rot} F(\sigma(x, y)) \cdot N(x, y)\, dx\, dy = \int_K \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx\, dy =$$

passando in coordinate polari nel piano

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (1 - \cos\vartheta) \rho\, d\rho \right] d\vartheta = \pi.$$

c) Il campo vettoriale $F(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$ ed è conservativo. Infatti, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$ con

$$f_1(x, y, z) = y + z, \qquad f_2(x, y, z) = x + z, \qquad f_3(x, y, z) = x + y,$$

si ha che

$$\mathrm{rot} F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(x, y, z) & f_2(x, y, z) & f_3(x, y, z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + z & x + z & x + y \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Poichè $\mathbb{R}^3$ è semplicemente connesso, ne segue che F è conservativo. Quindi essendo la curva γ chiusa, si ha che $\displaystyle\int_\gamma F \cdot dP = 0$.

---

3 Esercizi sul Teorema di Gauss

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo * presentano un grado di difficoltà maggiore.

Esercizio. Calcolare i seguenti integrali di flusso utilizzando il Teorema di Gauss (detto anche della divergenza):

a) $\displaystyle\int_{\partial D} F \cdot n$, dove $F(x,y,z) = (x, y, z^2)$, $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ -1 < z < -x^2 - y^2\right\}$ $\left[\frac{\pi}{3}\right]$

b) $\displaystyle\int_{\partial D} F \cdot n$, dove $F(x,y,z) = (x, y, z)$,
$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z < 1, \ x > 0, \ y > 0, \ z > 0\right\}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

c) $\displaystyle\int_{\partial D} F \cdot n$, dove $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z)$, $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 < z < 1\right\}$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

d) $\displaystyle\int_{\partial D} F \cdot n$, dove $F(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$,
$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 < 1, \ z > 0\right\}$ $\left[\frac{6}{5}\pi\right]$

Svolgimento

a) Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_D \operatorname{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z).$$

Quindi $\operatorname{div} F(x,y,z) = 2(1+z)$ e

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_D \operatorname{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = 2\int_D (1+z)\, dx\, dy\, dz =$$

integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$= 2\int_\Omega \left[\int_{-1}^{-x^2-y^2} (1+z)\, dz\right] dx\, dy = 2\int_\Omega \left[z + \frac{1}{2}z^2\right]_{-1}^{-x^2-y^2} dx\, dy =$$

$$= 2\int_\Omega \left[\frac{1}{2} - x^2 - y^2 + \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^2\right] dx\, dy =$$

dove $\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x^2 + y^2 < 1\Big\}$ e passando in coordinate polari nel piano si ottiene

$$= 2\left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right)\left[\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \rho^2 + \frac{1}{2}\rho^4\right)\rho\, d\rho\right] = 4\pi\left[\frac{1}{4}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 + \frac{1}{12}\rho^6\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

b) Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_D \mathrm{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che

$$\mathrm{div} F(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z).$$

Quindi $\mathrm{div} F(x,y,z) = 3$ e

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_D \mathrm{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = 3\int_D dx\, dy\, dz =$$

integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$= 3\int_\Omega \left[\int_0^{1-x-y} dz\right] dx\, dy = 3\int_\Omega (1 - x - y)\, dx\, dy =$$

dove $\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; 0 < x < 1, \; 0 < y < 1 - x\Big\}$ è y-semplice e si ottiene

$$= 3\int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy\right] dx = 3\int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1 (1-x)^2\, dx = \frac{1}{2}.$$

c) Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_D \mathrm{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che

$$\mathrm{div} F(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z).$$

Quindi $\mathrm{div} F(x,y,z) = 2x + 2y + 1$ e

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_D \mathrm{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_D (2x + 2y + 1)\, dx\, dy\, dz =$$

integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$= \int_\Omega \left[\int_{x^2+y^2}^1 (2x + 2y + 1)\, dz\right] dx\, dy = \int_\Omega \left(1 - x^2 - y^2\right)(2x + 2y + 1)\, dx\, dy =$$

dove $\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x^2 + y^2 < 1\Big\}$ e passando in coordinate polari nel piano si ottiene

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left(1 - \rho^2\right)(2\rho\cos\vartheta + 2\rho\sin\vartheta + 1)\rho\, d\rho\right] d\vartheta = \frac{\pi}{2}.$$

d) Per il Teorema di Gauss si ha che

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_D \mathrm{div} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

dove, posto $F = (f_1, f_2, f_3)$, si ha che

$$\mathrm{div} F(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z).$$

Quindi $\mathrm{div} F(x, y, z) = 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ e

$$\int_{\partial D} F \cdot n = \int_D \mathrm{div} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = 3 \int_D \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\, dx\, dy\, dz =$$

passando in coordinate polari nello spazio si ottiene

$$= 3\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\, d\vartheta\right)\left(\int_0^1 \rho^4\, d\rho\right) = \frac{6}{5}\pi.$$

4 Esercizi su campi conservativi e potenziali

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo * presentano un grado di difficoltà maggiore.

Esercizio 1. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{2xy}{(1+x^2)^2}, -\frac{1}{1+x^2} \right).$$

Dire se F ammette potenziale e in caso affermativo determinare un potenziale f di F.

$\left[f(x,y) = -\frac{y}{1+x^2} + c,\ c \in \mathbb{R} \right]$

Svolgimento

Poniamo $F = (f_1, f_2)$ con

$$f_1(x,y) = \frac{2xy}{(1+x^2)^2}, \qquad f_2(x,y) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Essendo f_1 e f_2 di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$, si ha che anche F è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Inoltre si osserva che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Ne segue che F è conservativo.

Determiniamo ora un potenziale f di F. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = \frac{2xy}{(1+x^2)^2}, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{4.2}$$

Integrando (4.2) rispetto a y si ottiene

$$f(x,y) = -\int \frac{1}{1+x^2}\, dy = -\frac{y}{1+x^2} + c(x), \tag{4.3}$$

dove c è una funzione della sola variabile x. Sostituendo in (4.1) si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{(1+x^2)^2} + c'(x) = \frac{2xy}{(1+x^2)^2} \quad \Longrightarrow \quad c'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c(x) = c \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo in (4.3) si ottiene che un potenziale f di F è

$$f(x,y) = -\frac{y}{1+x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (2y + 1, 2x - 1, 2z).$$

Dire se F è conservativo e in caso affermativo determinare un potenziale f di F.

$[f(x, y, z) = (2y + 1)x - y + z^2 + c, \; c \in \mathbb{R}]$

Svolgimento

Poniamo $F = (f_1, f_2, f_3)$ con

$$f_1(x, y, z) = 2y + 1, \qquad f_2(x, y, z) = 2x - 1, \qquad f_3(x, y, z) = 2z.$$

Essendo f_1, f_2, f_3 di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$, si ha che anche F è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$ che è semplicemente connesso. Inoltre si osserva che F è irrotazionale, cioè $\mathrm{rot}F = \mathbf{0}$. Infatti,

$$\mathrm{rot}F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(x, y, z) & f_2(x, y, z) & f_3(x, y, z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y + 1 & 2x - 1 & 2z \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Ne segue che F è conservativo.

Determiniamo ora un potenziale f di F. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = f_1(x, y, z) = 2y + 1, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = f_2(x, y, z) = 2x - 1, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = f_3(x, y, z) = 2z. \tag{4.6}$$

Integrando (4.4) rispetto a x si ottiene

$$f(x, y, z) = \int (2y + 1)\, dx = (2y + 1)x + c(y, z), \tag{4.7}$$

dove c è una funzione delle sole variabili y e z. Sostituendo in (4.5) si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2x + \frac{\partial c}{\partial y}(y, z) = 2x - 1$$

da cui segue che

$$\frac{\partial c}{\partial y}(y, z) = -1. \tag{4.8}$$

Integrando (4.8) rispetto a y si ottiene

$$c(y,z) = -\int dy = -y + k(z),$$

dove k è una funzione della sola variabile z. Sostituendo in (4.7) si ottiene

$$f(x,y,z) = (2y+1)x - y + k(z). \tag{4.9}$$

Sostituendo in (4.6) si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = k'(z) = 2z \quad \Longrightarrow \quad k(z) = z^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Quindi sostituendo in (4.9) si ottiene che un potenziale f di F è

$$f(x,y,z) = (2y+1)x - y + z^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3. Siano $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x,y) = \Big(e^x[\sin(x+y) + \cos(x+y)], e^x \cos(x+y)\Big)$$

e $\gamma_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva parametrica $\gamma_n(t) = (\cos nt, \sin nt)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Dire se F è conservativo e in caso affermativo determinare un potenziale f di F e calcolare l'integrale di F lungo γ_n.

$$\left[f(x,y) = e^x \sin(x+y) + c,\ c \in \mathbb{R}; \quad \int_{\gamma_n} F \cdot dP = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\left(e + e^{-1}\right)\sin 1 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases} \right]$$

Svolgimento

Poniamo $F = (f_1, f_2)$ con

$$f_1(x,y) = e^x[\sin(x+y) + \cos(x+y)], \qquad f_2(x,y) = e^x \cos(x+y).$$

Essendo f_1 e f_2 di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$, si ha che anche F è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Inoltre si osserva che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = e^x[\cos(x+y) - \sin(x+y)].$$

Ne segue che F è conservativo.

Determiniamo ora un potenziale f di F. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = e^x[\sin(x+y) + \cos(x+y)], \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = e^x \cos(x+y). \tag{4.11}$$

Integrando (4.11) rispetto a y si ottiene

$$f(x,y) = \int e^x \cos(x+y)\, dy = e^x \sin(x+y) + c(x), \tag{4.12}$$

dove c è una funzione della sola variabile x. Sostituendo in (4.10) si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x[\sin(x+y) + \cos(x+y)] + c'(x) = e^x[\sin(x+y) + \cos(x+y)] \quad \Longrightarrow$$

$$c'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c(x) = c \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo in (4.12) si ottiene che un potenziale f di F è

$$f(x,y) = e^x \sin(x+y) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo infine l'integrale curvilineo di F lungo γ_n, dove $\gamma_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ è la curva parametrica $\gamma_n(t) = (\cos nt, \sin nt)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Osserviamo che per n pari la curva γ_n è chiusa. Quindi, essendo F consevativo, si ha che per n pari

$$\int_{\gamma_n} F \cdot dP = 0.$$

Essendo inoltre f un potenziale di F si ha che per n dispari

$$\int_{\gamma_n} F \cdot dP = f(\gamma_n(\pi)) - f(\gamma_n(0)) = f(-1,0) - f(1,0) = -\left(e + e^{-1}\right)\sin 1.$$

Esercizio 4. Siano $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$$

e γ una curva parametrica che parametrizza il bordo di

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 < 1,\ x+y+z = 0\right\},$$

inducendo su di esso un verso di percorrenza orario rispetto ad un osservatore posto sul piano $x+y+z=0$ nel verso dell'asse z.

Dire se F è conservativo e in caso affermativo determinare un potenziale f di F e calcolare l'integrale di F lungo γ.

$$\left[f(x,y,z) = xy + xz + yz + c,\ c \in \mathbb{R}; \quad \int_\gamma F \cdot dP = 0\right]$$

Svolgimento

Poniamo $F = (f_1, f_2, f_3)$ con

$$f_1(x,y,z) = y + z, \qquad f_2(x,y,z) = x + z, \qquad f_3(x,y,z) = x + y.$$

Essendo f_1, f_2, f_3 di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$, si ha che anche F è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$ che è semplicemente connesso. Inoltre si osserva che F è irrotazionale, cioè $\mathrm{rot} F = \mathbf{0}$. Infatti,

$$\mathrm{rot} F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(x,y,z) & f_2(x,y,z) & f_3(x,y,z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Ne segue che F è conservativo.

Determiniamo ora un potenziale f di F. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = f_1(x,y,z) = y + z, \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = f_2(x,y,z) = x + z, \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = f_3(x,y,z) = x + y. \tag{4.15}$$

Integrando (4.13) rispetto a x si ottiene

$$f(x,y,z) = \int (y+z)\, dx = (y+z)x + c(y,z), \tag{4.16}$$

dove c è una funzione delle sole variabili y e z. Sostituendo in (4.14) si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x + \frac{\partial c}{\partial y}(y,z) = x + z$$

da cui segue che

$$\frac{\partial c}{\partial y}(y,z) = z. \tag{4.17}$$

Integrando (4.17) rispetto a y si ottiene

$$c(y,z) = \int z\, dy = yz + k(z),$$

dove k è una funzione della sola variabile z. Sostituendo in (4.16) si ottiene

$$f(x,y,z) = (y+z)x + yz + k(z). \tag{4.18}$$

Sostituendo in (4.15) si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x + y + k'(z) = x + y \quad \Longrightarrow \quad k'(z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad k(z) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Quindi sostituendo in (4.18) si ottiene che un potenziale f di F è

$$f(x,y,z) = xy + xz + yz + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Essendo F conservativo su $\mathbb{R}^3$ e γ una curva chiusa si ha che $\int_\gamma F \cdot dP = 0$.

Esercizio 5. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(3x^2 + y, x + 2y\right).$$

Dire se F è conservativo e in caso affermativo determinare un potenziale f di F.

$[f(x,y) = x^3 + xy + y^2 + c \ c \in \mathbb{R}]$

Svolgimento

Poniamo $F = (f_1, f_2)$ con

$$f_1(x,y) = 3x^2 + y, \qquad f_2(x,y) = x + 2y.$$

Essendo f_1 e f_2 di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$, si ha che anche F è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Inoltre si osserva che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 1.$$

Ne segue che F è conservativo.

Determiniamo ora un potenziale f di F. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = 3x^2 + y, \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = x + 2y. \tag{4.20}$$

Integrando (4.19) rispetto a x si ottiene

$$f(x,y) = \int \left(3x^2 + y\right)\, dx = x^3 + xy + c(y), \tag{4.21}$$

dove c è una funzione della sola variabile y. Sostituendo in (4.20) si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + c'(y) = x + 2y \quad \Longrightarrow \quad c'(x) = 2y \quad \Longrightarrow \quad c(x) = y^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo in (4.21) si ottiene che un potenziale f di F è

$$f(x,y) = x^3 + xy + y^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

5 Esercizi su forme esatte e primitive

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo * presentano un grado di difficoltà maggiore.

Esercizio 1. Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{2xy^2}{1+x^2y^2}\,dx + \frac{2x^2y}{1+x^2y^2}\,dy.$$

Dire se ω è esatta e in caso affermativo determinare una primitiva f di ω.

$[f(x,y) = \log\left(1+x^2y^2\right) + c,\ c \in \mathbb{R}]$

Svolgimento

Poniamo $\omega = f_1\,dx + f_2\,dy$ con

$$f_1(x,y) = \frac{2xy^2}{1+x^2y^2}, \qquad f_2(x,y) = \frac{2x^2y}{1+x^2y^2}.$$

Essendo f_1 e f_2 di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$, si ha che anche ω è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso. Inoltre si osserva che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{4xy}{\left(1+x^2y^2\right)^2}.$$

Ne segue che ω è esatta.

Determiniamo ora una primitiva f di ω. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = \frac{2xy^2}{1+x^2y^2}, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = \frac{2x^2y}{1+x^2y^2}. \tag{5.2}$$

Integrando (5.1) rispetto a x si ottiene

$$f(x,y) = \int \frac{2xy^2}{1+x^2y^2}\,dx = \log\left(1+x^2y^2\right) + c(y), \tag{5.3}$$

dove c è una funzione della sola variabile y. Sostituendo in (5.2) si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^2y}{1+x^2y^2} + c'(y) = \frac{2x^2y}{1+x^2y^2} \quad\Longrightarrow\quad c'(y) = 0 \quad\Longrightarrow\quad c(y) = c \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo in (5.3) si ottiene che una primitiva f di ω è

$$f(x,y) = \log\left(1+x^2y^2\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2. Determinare le regioni massimali del piano su cui è esatta la forma differenziale

$$\omega = \left(2xy - \frac{1}{x}\right) dx + x^2\, dy$$

e determinare una primitiva f di ω su tali regioni.

$$\left[\begin{array}{l} \text{regioni massimali: } \Omega_1 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x < 0\Big\},\ \Omega_2 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0\Big\}; \\ \text{primitive: } f(x,y) = \begin{cases} x^2y - \log(-x) + c & \text{se } (x,y) \in \Omega_1 \\ x^2y - \log x + c & \text{se } (x,y) \in \Omega_2, \end{cases} \quad c \in \mathbb{R}. \end{array}\right]$$

Svolgimento

Si ha che $\operatorname{dom}(\omega) = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \neq 0\Big\}$. Osseviamo che $\operatorname{dom}(\omega)$ non è connesso e che $\operatorname{dom}(\omega) = \Omega_1 \cup \Omega_2$, dove

$$\Omega_1 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x < 0\Big\}, \qquad \Omega_2 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0\Big\}.$$

Poniamo $\omega = f_1\, dx + f_2\, dy$ con

$$f_1(x,y) = 2xy - \frac{1}{x}, \qquad f_2(x,y) = x^2.$$

Essendo f_1 e f_2 di classe C^∞ sia su Ω_1 che su Ω_2, si ha che anche ω è di classe C^∞ sia su Ω_1 che su Ω_2 che sono entrambi semplicemente connessi. Inoltre si osserva che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 2x.$$

Ne segue che ω è esatta sia su Ω_1 che su Ω_2.

Determiniamo ora una primitiva f di ω su Ω_1 e su Ω_2. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = 2xy - \frac{1}{x}, \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = x^2. \tag{5.5}$$

Integrando (5.5) rispetto a y si ottiene

$$f(x,y) = \int x^2\, dy = x^2y + c(x), \tag{5.6}$$

dove c è una funzione della sola variabile x. Sostituendo in (5.4) si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + c'(x) = 2xy - \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad c'(x) = -\frac{1}{x} \quad \Longrightarrow c(x) = -\log|x| + c, \ c \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo in (5.6) si ottiene che una primitiva f di ω è

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y - \log(-x) + c & \text{se } (x,y) \in \Omega_1 \\ x^2y - \log x + c & \text{se } (x,y) \in \Omega_2, \end{cases} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3. Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \left[\log(x+y) + \frac{x}{x+y}\right] dx + \frac{x}{x+y}\, dy.$$

Dire se ω è esatta e in caso affermativo determinare una primitiva f di ω.

[$f(x,y) = x\log(x+y) + c$, $c \in \mathbb{R}$]

Svolgimento

Poniamo $\omega = f_1\, dx + f_2\, dy$ con

$$f_1(x,y) = \log(x+y) + \frac{x}{x+y}, \qquad f_2(x,y) = \frac{x}{x+y}.$$

Essendo f_1 e f_2 di classe C^∞ su $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x+y > 0\right\}$, si ha che anche ω è di classe C^∞ su $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x+y > 0\right\}$ che è semplicemente connesso. Inoltre si osserva che

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{(x+y)^2}.$$

Ne segue che ω è esatta.

Determiniamo ora una primitiva f di ω. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = \log(x+y) + \frac{x}{x+y}, \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = \frac{x}{x+y}. \tag{5.8}$$

Integrando (5.8) rispetto a y si ottiene

$$f(x,y) = \int \frac{x}{x+y}\, dy = x\log(x+y) + c(x), \tag{5.9}$$

dove c è una funzione della sola variabile x. Sostituendo in (5.7) si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \log(x+y) + \frac{x}{x+y} + c'(x) = \log(x+y) + \frac{x}{x+y} \implies c'(x) = 0 \implies c(x) = c.$$

Sostituendo in (5.9) si ottiene che una primitiva f di ω è

$$f(x,y) = x\log(x+y) + \frac{x}{x+y} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$
