

CAPITOLO 2

FUNZIONI DI DUE O PIÙ VARIABILI

8. Cenni sullo spazio vettoriale \mathbb{R}^2

Indichiamo con il simbolo \mathbb{R}^2 l'insieme costituito dalle *coppie ordinate* di numeri reali, cioè

$$(8.1) \quad \mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Rappresentiamo gli elementi, o *punti*, di \mathbb{R}^2 nell'usuale riferimento cartesiano come in figura 2.1. Talvolta identifichiamo il punto (x,y) , o punto di *coordinate* x,y , con il *vettore* $v = (x,y)$ applicato all'origine degli assi, avente *componenti* x,y , come in figura 2.2.

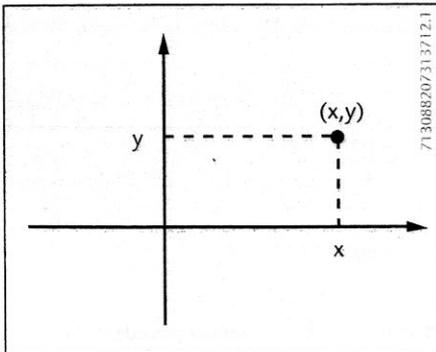


Figura 2.1

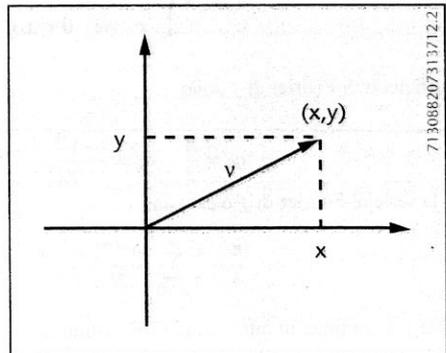


Figura 2.2

È utile definire la *somma* di due vettori v_1, v_2 , di coordinate $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$, nel modo seguente: il vettore somma $v_1 + v_2$ ha coordinate $x_1 + x_2, y_1 + y_2$, cioè

$$(8.2) \quad v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

ciò corrisponde alla rappresentazione schematizzata in figura 2.3.

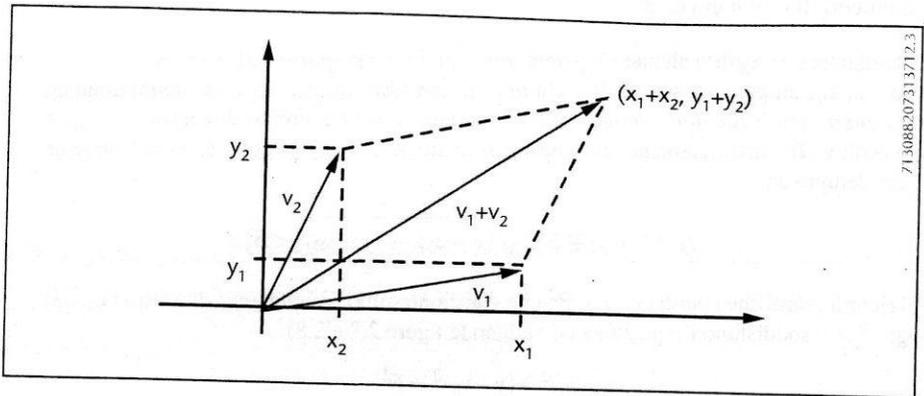


Figura 2.3

Analogamente si definisce la *moltiplicazione* di un vettore $v = (x, y)$ per uno scalare λ nel modo seguente

$$(8.3) \quad \lambda \cdot v = (\lambda x, \lambda y),$$

con il significato geometrico schematizzato in figura 2.4.

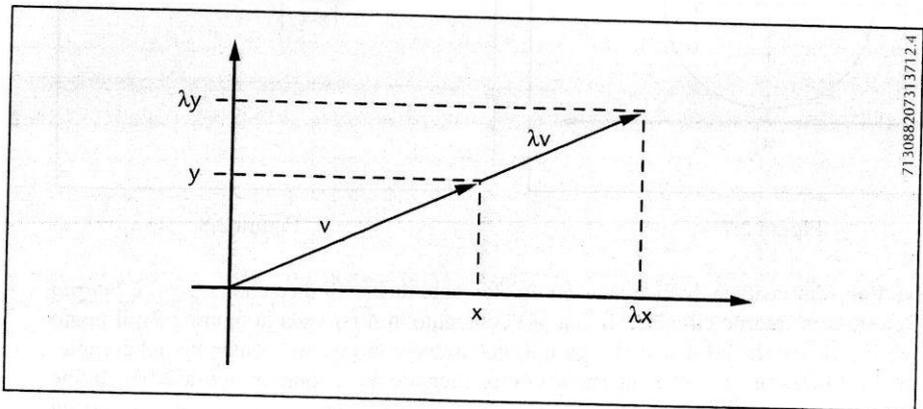


Figura 2.4

Con le operazioni di *somma* e di *moltiplicazione per uno scalare* l'insieme \mathbb{R}^2 si può riguardare come uno *spazio vettoriale*. Il *vettore nullo* ha componenti $(0, 0)$, mentre l'*opposto* del vettore $v = (x, y)$ è il vettore $-v = (-x, -y)$ (si veda la figura 2.5).

Per ogni $v = (x, y)$ elemento di \mathbb{R}^2 , indichiamo con il simbolo $|v| = |(x, y)|$ il *modulo*, o *norma*, di v la quantità

$$(8.4) \quad |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Da osservare che si utilizza lo stesso simbolo $|\cdot|$ per indicare il *modulo* di un punto di \mathbb{R}^2 o il *valore assoluto* di un numero reale.

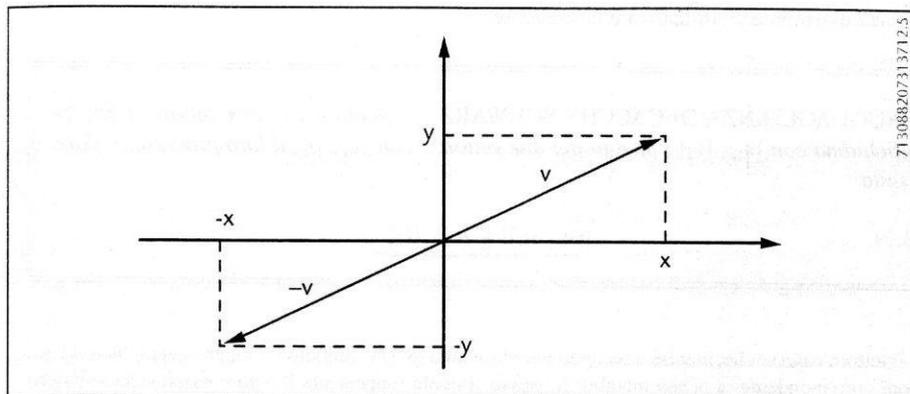


Figura 2.5

Il modulo di $v = (x,y)$ è quindi la *distanza* del punto (x,y) dall'origine degli assi $(0,0)$, od anche la *lunghezza* del vettore v , come rappresentato in figura 2.6.

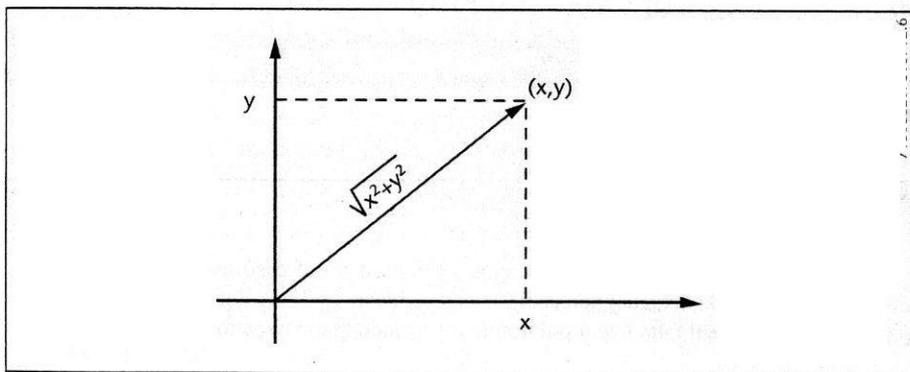


Figura 2.6

Il *prodotto scalare* di due vettori v_1, v_2 viene indicato con il simbolo (v_1, v_2) (il lettore noti che si usa la stessa notazione per indicare il *prodotto scalare* fra due vettori e le *componenti* di un unico vettore); il prodotto scalare è definito nel modo seguente: se i vettori (v_1, v_2) hanno coordinate

$$(8.5) \quad v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2),$$

allora il *prodotto scalare* fra v_1 e v_2 vale

$$(8.6) \quad (v_1, v_2) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Particolarmente significativa è la seguente

DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ. — Siano v_1, v_2 due vettori di \mathbb{R}^2 . Se indichiamo con $|v_1|, |v_2|$ i moduli dei due vettori e con (v_1, v_2) il loro prodotto scalare, risulta

$$(8.7) \quad |(v_1, v_2)| \leq |v_1| \cdot |v_2|.$$

Il lettore osservi che, mentre a secondo membro della (8.7) il simbolo $|\cdot|$ rappresenta il *modulo* del vettore corrispondente, a primo membro lo stesso simbolo rappresenta il *valore assoluto* del numero reale (v_1, v_2) .

Dimostrazione: con le notazioni $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$, per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta

$$(8.8) \quad \begin{aligned} 0 &\leq (x_1 + tx_2)^2 + (y_1 + ty_2)^2 \\ &= (x_1^2 + y_1^2) + 2t(x_1x_2 + y_1y_2) + t^2(x_2^2 + y_2^2) \\ &= \alpha t^2 + 2\beta t + \gamma, \end{aligned}$$

dove si è posto

$$(8.9) \quad \begin{cases} \alpha = x_2^2 + y_2^2 = |v_2|^2 \\ \beta = x_1x_2 + y_1y_2 = (v_1, v_2) \\ \gamma = x_1^2 + y_1^2 = |v_1|^2 \end{cases}.$$

Se $\alpha \neq 0$ (se $\alpha = 0$ risulta $|v_2| = 0$, cioè $v_2 = 0$ ed in tal caso evidentemente anche $(v_1, v_2) = 0$; pertanto la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (8.7) si riduce alla ovvia identità $0 = 0$) la (8.8) esprime il fatto che il polinomio di secondo grado rispetto a t

$$(8.10) \quad t \longrightarrow \alpha t^2 + 2\beta t + \gamma$$

è non negativo per ogni valore di $t \in \mathbb{R}$. Ciò implica che il discriminante Δ dell'equazione di secondo grado associata verifica $\Delta \leq 0$ (altrimenti, se fosse $\Delta > 0$, il polinomio associato si annullerebbe per due valori distinti t_1, t_2 e sarebbe negativo o all'interno dell'intervallo delle radici o all'esterno, in dipendenza del segno di α). Pertanto

$$(8.11) \quad \frac{\Delta}{4} = (v_1, v_2)^2 - |v_1|^2 \cdot |v_2|^2 \leq 0$$

che corrisponde alla tesi (8.7).

9. Elementi di topologia di \mathbb{R}^2

Esaminiamo di seguito alcune *proprietà topologiche* dello spazio vettoriale \mathbb{R}^2 .

Sia (x_0, y_0) un punto fissato di \mathbb{R}^2 . Un *intorno circolare* di (x_0, y_0) è per definizione un *cerchio aperto* (cioè che *non* contiene la circonferenza che lo delimita) di centro (x_0, y_0) e raggio positivo δ . Analiticamente, un intorno circolare di (x_0, y_0) e raggio $\delta > 0$ è l'insieme $I_\delta \subset \mathbb{R}^2$ definito da

$$(9.1) \quad I_\delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\};$$

Si ricordi infatti che i punti (x, y) di \mathbb{R}^2 che giacciono sulla circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio $\delta > 0$ soddisfano l'equazione (si vedano le figure 2.7 e 2.8):

$$(9.2) \quad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \delta^2.$$

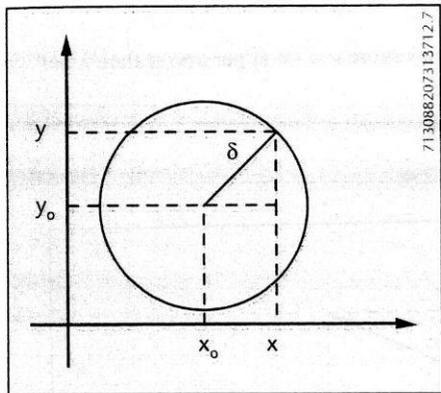


Figura 2.7

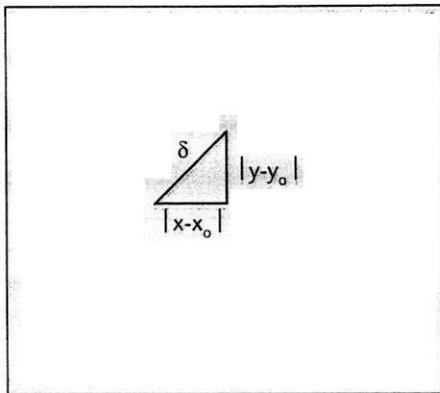


Figura 2.8

Sia A un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 e (x_0, y_0) un elemento di \mathbb{R}^2 . Si dice che (x_0, y_0) è *interna* ad A se esiste un intorno circolare di (x_0, y_0) contenuto in A (si veda la figura 2.9); il punto (x_0, y_0) si dice *esterno* ad A se esiste un intorno circolare di (x_0, y_0) contenuto nel complementare di A (cioè se (x_0, y_0) è interno al complementare di A , come in figura 2.10). Infine (x_0, y_0) è un *punto di frontiera* per A se in ogni intorno circolare di (x_0, y_0) si trovano sia punti di A che del complementare di A (cioè se (x_0, y_0) non è né interno né esterno ad A , come in figura 2.11).

Si dice che $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è un *punto di accumulazione* per l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ se in ogni intorno circolare di (x_0, y_0) esiste almeno un punto di A diverso da (x_0, y_0) (come in figura 2.12).

Si vede subito che tutti i punti interni ad un insieme A sono di accumulazione per A ; tutti i punti esterni ad A non sono di accumulazione per A . Infine i punti di frontiera di A possono essere di accumulazione per A oppure no; se un punto di A non è di accumulazione, si dice che è un *punto isolato* di A .

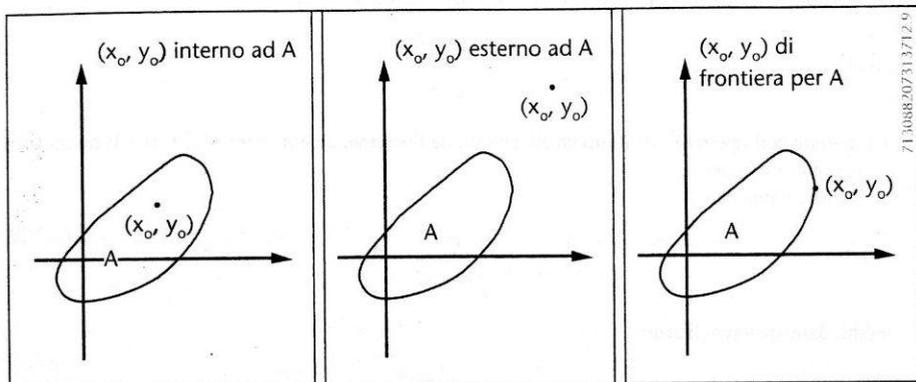


Figura 2.9

Figura 2.10

Figura 2.11

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice *aperto* se per ogni $(x, y) \in A$ esiste un intorno circolare di $(x, y) \in A$ contenuto in A (cioè se ogni $(x, y) \in A$ è interno ad A). Un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice *chiuso* se il complementare $A = \mathbb{R}^2 - C$ è aperto.

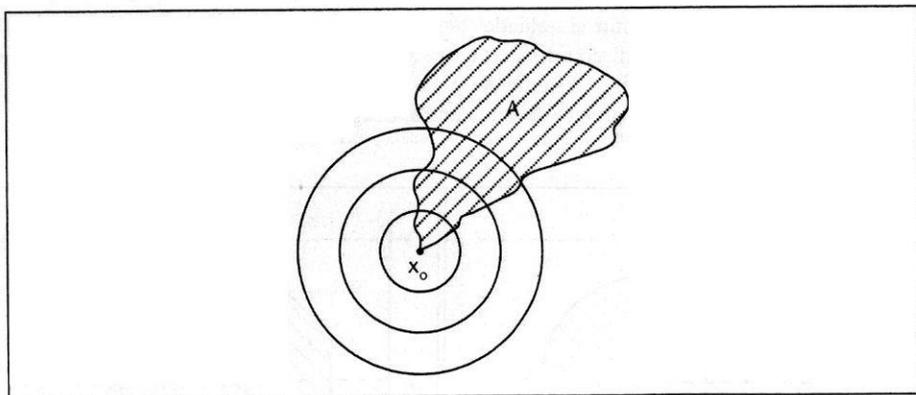


Figura 2.12

Naturalmente esistono insiemi di \mathbb{R}^2 che non sono né aperti né chiusi. L'insieme vuoto \emptyset e tutto \mathbb{R}^2 sono gli unici insiemi di \mathbb{R}^2 contemporaneamente aperti e chiusi.

La *chiusura* di un insieme A , indicata con \bar{A} , è l'insieme di \mathbb{R}^2 risultante dalla unione di A e dell'insieme dei punti di accumulazione di A . La chiusura \bar{A} di A è un insieme chiuso e, più precisamente, coincide con l'intersezione di tutti gli insiemi chiusi che contengono A . Si prova anche che \bar{A} è l'unione di A e dell'insieme dei punti di frontiera di A .

Un *dominio* di \mathbb{R}^2 è la chiusura di un insieme aperto. Pertanto un dominio è un insieme chiuso, ed è unione di un insieme aperto e della sua frontiera.

Ad esempio, un cerchio chiuso di \mathbb{R}^2 è un dominio, mentre l'insieme unione di un cerchio chiuso e di un punto isolato esterno al cerchio non è un dominio di \mathbb{R}^2 .

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice *limitato* se è contenuto in un intorno circolare dell'origine $I_M(0)$, cioè se esiste $M > 0$ tale che

$$(9.3) \quad |(x,y)| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq M, \quad \forall (x,y) \in A$$

(equivalentemente, se $x^2 + y^2 \leq M^2$ per ogni (x,y) in A), come nelle figure 2.13 e 2.14.

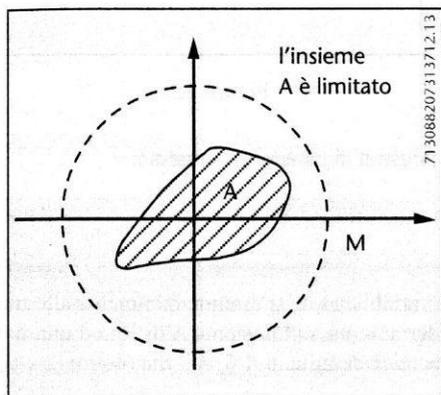


Figura 2.13

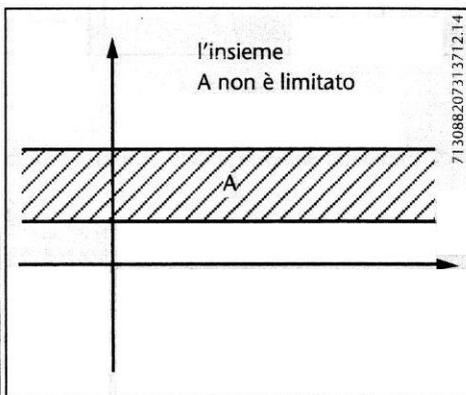


Figura 2.14

Un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è *connesso* se non esistono due aperti disgiunti non vuoti di \mathbb{R}^2 la cui unione sia l'insieme A . In formule, ciò significa che non esistono due aperti $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ tali che

$$\begin{cases} A_1 \neq \emptyset, & A_2 \neq \emptyset \\ A_1 \cap A_2 = \emptyset, & A_1 \cup A_2 = A \end{cases}$$

In figura 2.15 è rappresentato un insieme connesso, mentre in figura 2.16 è rappresentato un insieme non connesso, per cui è invece possibile trovare due aperti disgiunti e non vuoti la cui unione è uguale all'insieme dato.

Equivalentemente, un insieme A è connesso se, nel caso in cui esistano due aperti $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ tali che

$$(9.4) \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad A_1 \cup A_2 = A,$$

allora necessariamente uno tra i due insiemi A_1, A_2 è vuoto.

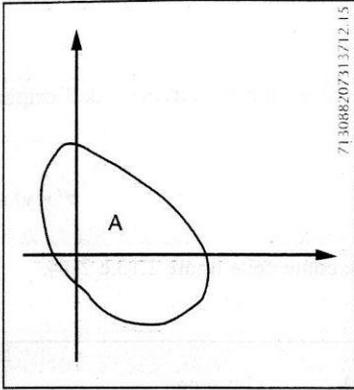


Figura 2.15

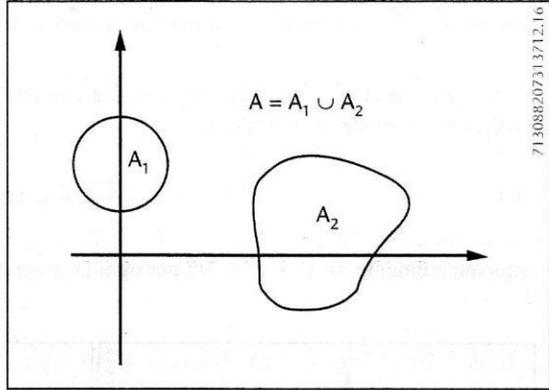


Figura 2.16

Infine, un *dominio* si dice *connesso* se è la chiusura di un aperto connesso.

10. Limiti e continuità

La definizione di limite per funzioni di una variabile reale si estende facilmente alle funzioni di due variabili reali. A tale scopo consideriamo un sottoinsieme A di \mathbb{R}^2 ed una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, cioè $f = f(x, y)$ è una funzione reale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Sia inoltre (x_0, y_0) un punto di accumulazione per l'insieme A .

Consideriamo preliminarmente il caso in cui il limite l sia *finito*, cioè $l \in \mathbb{R}$. Si dice che $f(x, y)$ *tende* (o *converge*) ad l per (x, y) che tende ad (x_0, y_0) se, qualunque sia $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$(10.1) \quad |f(x, y) - l| < \varepsilon,$$

per ogni $(x, y) \in A$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ e $|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$, cioè

$$(10.2) \quad 0 \neq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

I due casi di limite infinito ($l = +\infty$, oppure $l = -\infty$) si trattano in modo analogo fra loro; consideriamo di seguito solo il caso $l = +\infty$.

Si dice che $f(x, y)$ *tende* (o *diverge*) a $+\infty$ per (x, y) che tende ad (x_0, y_0) se, qualunque sia $M > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$(10.3) \quad f(x, y) > M,$$

per ogni $(x, y) \in A$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ e $|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$, cioè (x, y) verifica le condizioni in (10.2).

A titolo di esempio, consideriamo la funzione delle variabili reali x, y

$$(10.4) \quad f(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

f è definita nell'aperto A costituito da \mathbb{R}^2 privato dell'origine, cioè $A = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Il punto $(0, 0)$ è di accumulazione per A .

Verifichiamo che

$$(10.5) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0;$$

infatti, dalle disuguaglianze

$$(10.6) \quad 0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

si deduce che, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$(10.7) \quad 0 \leq f(x, y) < \varepsilon \quad (\text{e quindi anche } |f(x, y)| < \varepsilon)$$

per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$ tale che $\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$; cioè vale la (10.2) con $\delta = \varepsilon$.

Nella definizione di limite si richiede che, fissato ε o M , debba valere la condizione (10.1) o (10.3) per tutti i punti di coordinate (x, y) soddisfacenti la condizione (10.2) per un opportuno numero positivo δ . L'insieme dei punti (x, y) soddisfacenti la condizione (10.2) è il cerchio di centro (x_0, y_0) , privato del suo centro, e raggio δ , rappresentato in figura 2.17.

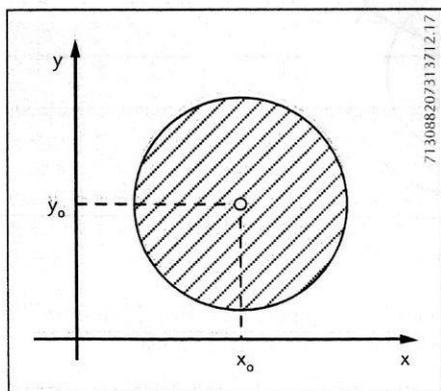


Figura 2.17

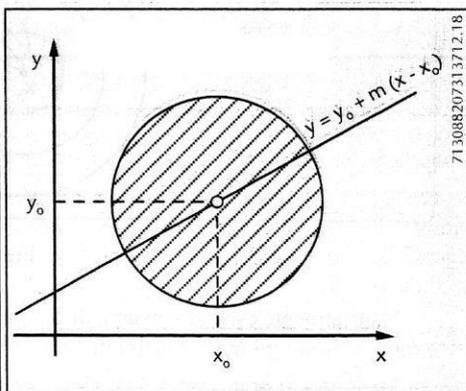


Figura 2.18

Invece di considerare *tutti* i punti del cerchio (privato del suo centro) rappresentato in figura 2.17, ci si può limitare a considerare i punti (x, y) di tale insieme, che appartengono ad

una generica retta passante per il centro (x_0, y_0) , come in figura 2.18. I punti della retta (non parallela all'asse y) verificano l'equazione

$$(10.8) \quad y = y_0 + m(x - x_0),$$

per un opportuno coefficiente angolare $m \in \mathbb{R}$.

Limitatamente ai punti di tale retta, si ottiene che, se $f(x, y)$ ammette limite $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, allora, posto $y = y_0 + m(x - x_0)$, risulta anche

$$(10.9) \quad |f(x, y_0 + m(x - x_0)) - l| < \varepsilon$$

(o rispettivamente $f(x, y_0 + m(x - x_0)) > M$, oppure $f(x, y_0 + m(x - x_0)) < -M$), per tutti i numeri reali $x \neq x_0$ e tali che

$$(10.10) \quad \begin{aligned} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} &= \sqrt{(x - x_0)^2 + m^2(x - x_0)^2} \\ &= \sqrt{1 + m^2} \cdot \sqrt{(x - x_0)^2} = \sqrt{1 + m^2} \cdot |x - x_0| < \delta. \end{aligned}$$

Quindi vale la (10.9) (o le analoghe condizioni per il limite infinito) purché

$$(10.11) \quad 0 \neq |x - x_0| < \delta' = \frac{\delta}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

In base alla definizione di limite per funzioni di *una* variabile, ciò significa che

$$(10.12) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0 + m(x - x_0)) = l.$$

Pertanto, *condizione necessaria* affinché esista il limite della funzione di due variabili

$$(10.13) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l,$$

è che, qualunque sia il coefficiente angolare $m \in \mathbb{R}$, valga la (10.12), con l naturalmente che in (10.12) non deve cambiare al variare di m , cioè l non deve dipendere da m . Proponiamo di seguito un esempio di applicazione di questa proprietà. Osserviamo che, nella pratica, si adotta spesso come condizione necessaria per l'esistenza del limite in (10.13) il fatto che esistono, e siano fra loro uguali, i limiti lungo le due rette parallele agli assi coordinati, di equazione $y = \text{costante} = y_0$ e $x = \text{costante} = x_0$, ottenendo come condizione necessaria per la validità della (10.13).

$$(10.14) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y) = l.$$

Verifichiamo che

$$(10.15) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{non esiste}.$$

Infatti, posto $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$, abbiamo

$$(10.16) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

$$(10.17) \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1,$$

e quindi non è soddisfatta la condizione di uguaglianza (si veda la (10.14) dei due limiti per $x \rightarrow 0$ e per $y \rightarrow 0$, necessaria per l'esistenza del limite. Ciò prova la (10.15).

Si noti che, lungo ogni retta per l'origine, di equazione $y = mx$, la funzione $f(x,y)$ è costante, essendo

$$(10.18) \quad f(x, mx) = \frac{x^2 - m^2 x^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}, \quad \forall x \neq 0$$

Pertanto risulta che il limite, per $x \rightarrow 0$, su ogni retta per l'origine esiste, ma dipende dal coefficiente m : infatti

$$(10.19) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \frac{1 - m^2}{1 + m^2},$$

e ciò di nuovo implica che il limite della funzione di due variabili in (10.15) non esiste.

In figura 2.19 è rappresentato il valore della funzione $f(x,y)$ in corrispondenza ad ogni retta per l'origine, su cui $f(x,y)$ è costante.

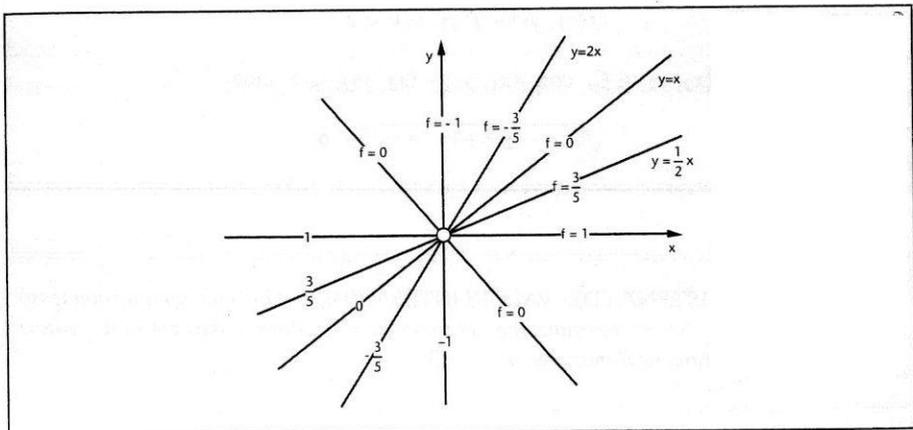


Figura 2.19

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di due variabili definita in un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia (x_0, y_0) un punto di A . Si dice che la funzione $f(x,y)$ è *continua* in (x_0, y_0) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$(10.20) \quad |f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

per ogni $(x, y) \in A$ e $|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$. Si osservi che se (x_0, y_0) è un punto di accumulazione per A la continuità di f in (x_0, y_0) equivale a richiedere che la funzione abbia limite nel punto uguale proprio a $f(x_0, y_0)$. Se invece (x_0, y_0) è un punto isolato, la (10.20) è sempre verificata in un opportuno intorno del punto. Si dice inoltre che $f(x, y)$ è *continua nell'insieme* A se è continua in ogni punto (x_0, y_0) di A .

Terminiamo il paragrafo enunciando alcuni importanti teoremi sulle funzioni continue di due variabili, che estendono analoghi risultati per funzioni di una variabile.

TEOREMA DI WEIERSTRASS. — Sia C un insieme chiuso e limitato di \mathbb{R}^2 e sia $f(x, y)$ una funzione continua definita su C . Allora f assume massimo e minimo (assoluti) su C , cioè esistono due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) di C tali che

$$(10.21) \quad f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2), \quad \forall (x, y) \in C.$$

TEOREMA DI CANTOR. — Sia C un insieme chiuso e limitato di \mathbb{R}^2 e sia $f(x, y)$ una funzione continua definita in C . Allora f è uniformemente continua su C ; cioè, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$(10.22) \quad |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon,$$

per ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C$, con $|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| < \delta$, cioè

$$(10.23) \quad \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta.$$

TEOREMA DI ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI. — Sia D un dominio connesso e limitato di \mathbb{R}^2 e $f(x, y)$ una funzione continua su D . Allora f assume tutti i valori compresi fra il minimo ed il massimo di f su D .

11. Derivate parziali

Sia A un insieme aperto di \mathbb{R}^2 e $f = f(x, y)$ una funzione di due variabili definita su A . Sia inoltre (x, y) un punto fissato di A . La *derivata parziale di f rispetto ad x* , nel punto (x, y) , è il limite

$$(11.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h},$$