Superfici

Si calcoli la matrice jacobiana delle seguenti funzioni:

1	$f(x,y) = e^{2x+y}\hat{\imath} + \cos(x+2y)\hat{\jmath}$
2	$f(x,y,z) = (x+2y^2+3z^3)\hat{\imath} + (x+sin3y+e^z)\hat{\jmath}$

Si calcoli la divergenza dei seguenti campi vettoriali

3	$f(x,y) = \cos(x+2y)\,\hat{\imath} + e^{2x+y}\hat{\jmath}$
4	$f(x,y,z) = (x+y+z)\hat{\imath} + (x^2+y^2+z^2)\hat{\jmath} + (x^3+y^3+z^3)\hat{k}$

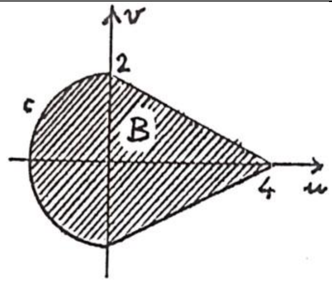
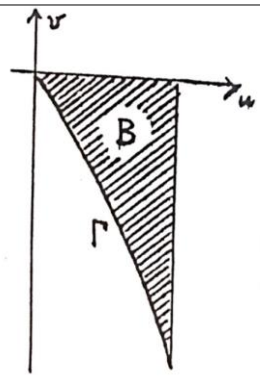
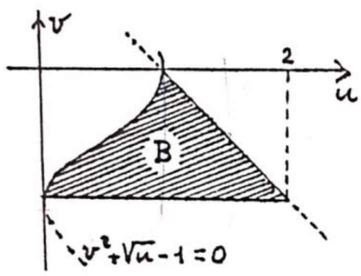
Si calcoli il rotore dei seguenti campi vettoriali

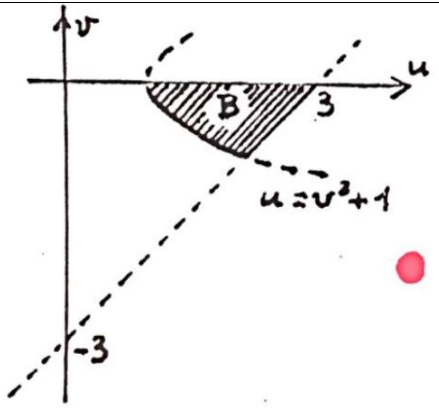
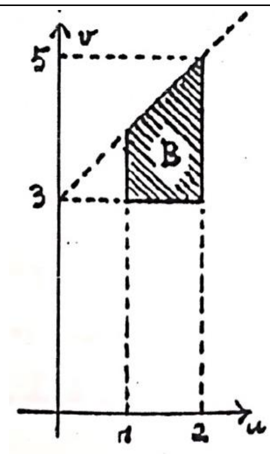
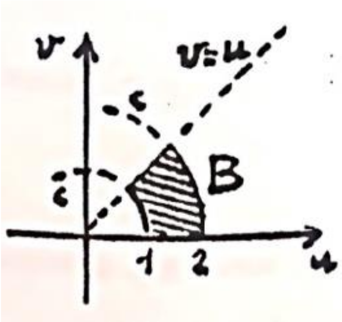
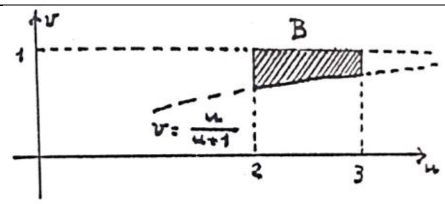
5	$f(x,y,z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$
6	$f(x,y,z) = xyz\hat{\imath} + zsiny\hat{\jmath} + xe^y\hat{k}$
7	$f(x,y) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\hat{\jmath}$
8	$f(x,y) = \boldsymbol{grad}(\log_x y)^2$

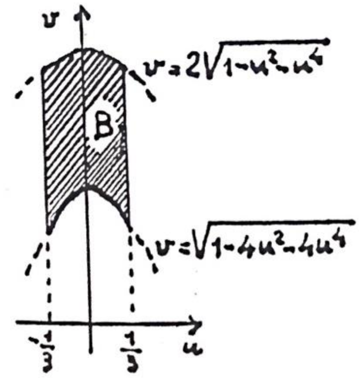
9	Siano $f(x,y) = 3x+2y$ e $g(u,v) = (u+v)\hat{\imath} + uv\hat{\jmath}$. Scrivere esplicitamente la funzione composta $f\circ g$ e calcolarne il gradiente
10	Siano $f(s,t) = \sqrt{s+t}$ e $g(x,y) = xy\hat{\imath} + \frac{x}{y}\hat{\jmath}$. Scrivere esplicitamente la funzione composta $f\circ g$ e calcolarne il gradiente
11	Siano $f(x,y,z) = xyz$ e $g(r,s,t) = (r+s)\hat{\imath} + (r+3t)\hat{\jmath} + (s-t)\hat{k}$. Scrivere esplicitamente la funzione composta $f\circ g$ e calcolarne il gradiente
12	Si consideri la superficie parametrica $\sigma(u,v) = uv\hat{\imath} + (1+3u)\hat{\jmath} + (v^3+2u)\hat{k}$ a. Dire se la superficie è semplice b. Determinare l'insieme R su cui σ è regolare c. Determinare il vettore normale alla superficie in ogni punto di R d. Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie in $P_0 = \sigma(u_0,v_0) = (1,4,3)$
13	Le superfici $\sigma_1(u,v) = \cos(2-u)\,\hat{\imath} + \sin(2-u)\,\hat{\jmath} + v^2\hat{k} \qquad (u,v)\in[0,2\pi]\times[0,1]$ e $\sigma_2(u,v) = \sin(3+2u)\,\hat{\imath} + \cos(3+2u)\,\hat{\jmath} + (1-v)\hat{k} \qquad (u,v)\in[0,\pi]\times[0,1]$ parametrizzano lo stesso sostegno Σ in R^3. a. Determinare tale sostegno b. Dire se i versi di attraversamento di Σ definiti dalle due superfici coincidono oppure no

	c. Calcolare i versori normali a Σ in $P_0\left(0,1,\frac{1}{4}\right)$ associati alle due superfici
14	Si consideri la superficie cartesiana $$\sigma(u,v) = u\hat{\imath} + v\hat{\jmath} + (u^2+3uv+v^2)\hat{k}$$ a. Calcolare il versore normale n(u,v) b. Determinare i punti sul sostegno Σ della superficie in cui la normale è perpendicolare al piano di equazione $8x+7y-2z=4$

Si risolvano i seguenti integrali superficiali (di I specie)

15	$$\int_S x^3 \cdot e^z d\sigma$$	S è la porzione di superficie del cilindro di equazione $x^2+y^2=r^2$
16	$$\int_S (x^2-y^2+y+3z^2)d\sigma$$	S è la superficie della sfera di centro l'origine e raggio r
17	$$\int_S \frac{(z+1)^2-x-y}{\sqrt{2z^2+4z+3}}d\sigma$$ $$S: \begin{cases} x = u^2+v \\ y = 2u-v \\ z = u \end{cases} \quad (u,v) \in B$$	
18	$$\int_S \boldsymbol{e^{x+y-z}d\sigma}$$ $$S: \begin{cases} x = v \\ y = v \\ z = u+v \end{cases} \quad (u,v) \in B$$ $$\Gamma: \begin{cases} u = \log(1-2t) \\ v = t - \log(1-2t) \end{cases} \quad t \in [-1;0]$$	
19	$$\int_S \boldsymbol{\frac{x+y}{\sqrt{3+2sin^2(x+y+1)}}d\sigma}$$ $$S: \begin{cases} x = u-\cos(1+v) \\ y = v-u+\cos(1+v) \\ z = 2u-v-\cos(1+v) \end{cases}$$ $$\Gamma: v^2+\sqrt{u}-1$$	

20	$\int_S \frac{e^{x+y}}{\sqrt{(x+y-1)^2+(y+z-1)^2+(x+2y+z-1)}}d\sigma$ $S: \begin{cases} x = u(v-1) \\ y = u+v-uv \\ z = v(u-1) \end{cases}$	
21	$\int_S \frac{d\sigma}{z^2\sqrt{x^2+4y^2+4y-20z}}$ $S: \begin{cases} x = 5u+v \\ y = u^2 \\ z = uv \end{cases}$	
22	$\int_S \frac{x+z-2}{\sqrt{12x+8y-12z+34}(x+2z-4)}d\sigma$ $S: \begin{cases} x = u-v \\ y = u^2+3v \\ z = v+2 \end{cases}$	
23	$\int_S \frac{d\sigma}{z(y-1+\sqrt{z})\sqrt{40z+9}}$ $S: \begin{cases} x = 3u \\ y = u-v \\ z = v^2 \end{cases}$	

	$$\int_S z \cdot arctg\frac{x}{z}d\sigma$$ $$S:\begin{cases}x = uv\\ y = u^2\\ z = v\end{cases} \quad (u,v) \in B$$	
24	Sia S la superficie cilindrica, con le generatrici parallele all'asse z, compresa tra i piani di equazione $z = 0$ e $z = 1$ ed avente per direttrice la curva del piano (x, y), diagramma, rispetto all'asse x, della restrizione all'intervallo $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ della funzione esponenziale. Calcolare $$\int_S \frac{z^2 tg^2 x}{\sqrt{1+e^{2x}}}d\sigma$$	
25	Sia S la superficie cilindrica con le generatrici parallele all'asse y compresa tra i piani di equazioni $y = 1$ e $y = e$ ed avente per direttrice la curva del piano (x, y) diagramma rispetto all'asse x della restrizione nell'intervallo $[0; 1]$ della funzione arcoseno. Calcolare $$\int_S \frac{z^2\sqrt{1-x^2}}{y\sqrt{2-x^2}}d\sigma$$	
26	Sia S la superficie cilindrica con le generatrici parallele all'asse x compresa tra i piani di equazioni $x = 0$ e $x = 1$ ed avente per direttrice la curva del piano (y, z) che ha equazione $y^2 - z + 3 = 0$ e che si proietta sull'asse y nell'intervallo $\left[1; 1+\sqrt{2}\right]$. Calcolare $$\int_S \frac{x^4}{(z-2y)\sqrt{1+4y^2}}d\sigma$$	
27	Sia S la superficie cilindrica con le generatrici parallele all'asse z compresa tra i piani di equazioni $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$ ed avente per direttrice la curva del piano (x, y) diagramma, rispetto all'asse x, della restrizione della funzione logaritmo, all'intervallo $\left[\frac{\pi}{6}; \pi\right]$. Calcolare $$\int_S \frac{x cos^2 3x \cdot cos z}{\sqrt{1+x^2}}d\sigma$$	
28	Sia S la superficie cilindrica con le generatrici parallele all'asse y compresa tra i piani di equazioni $y = 0$ e $y = 1$ ed avente per direttrice la curva del piano (x, z) diagramma, rispetto all'asse x, della restrizione nell'intervallo $[1; e]$ della funzione logaritmo. Calcolare $$\int_S \frac{xy^3 z log x}{\sqrt{1-x^2}}d\sigma$$	
29	Sia S la superficie cilindrica con le generatrici parallele all'asse x compresa tra i piani di equazioni $x = 0$ e $x = 1$ ed avente per direttrice la curva del piano (y, z) che ha equazione $y^4 - z = 0$ e che si proietta sull'asse y nell'intervallo $[0; 1/2]$. Calcolare $$\int_S \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{z}-y+1)\sqrt{1+16y^6}}d\sigma$$	

Svolgimento Esercizio n°15

Una rappresentazione parametrica della superficie S è:

$$S:\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \\ z = z \end{cases}$$

La matrice Jacobiana associata alla superficie è:

$$J = \begin{pmatrix} x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_z & y_z & z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -rsin\theta & rcos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La prima forma differenziale di Gauss per la superficie è:

$$J_G = \sqrt{\begin{vmatrix} rcos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} -rsin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -rsin\theta & rcos\theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2} = r$$

Pertanto:

$$\int_S f d\sigma = r \cdot \iint_D (rcos\theta)^3 \cdot e^z d\theta dz$$

Dove

$$A:\left\{(\theta, z) \in R^2 : -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}; 0 \le z \le h\right\}$$

Dunque:

$$r \cdot \iint_D (rcos\theta)^3 \cdot e^z d\theta dz = r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (rcos\theta)^3 d\theta \cdot \int_0^h e^z dz = r^4 [e^z]_0^h \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (cos\theta)^3 d\theta =$$

$$= r^4\left(e^h - 1\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - sin^2\theta) d(sin\theta) d\theta = \boldsymbol{\frac{4}{3} r^4 \left(e^h - 1\right)}$$

Svolgimento Esercizio n°25

La rappresentazione parametrica della curva è

$$S:\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = arcsinu \end{cases}$$

Mentre il dominio nel piano (u;v) è dato dalla seguente:

$$B = \{(u, v) \in R^2 : 1 \le v \le e; 0 \le u \le 1\}$$

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Pertanto

$$J = \sqrt{1 + \frac{1}{1-u^2}} = \sqrt{\frac{2-u^2}{1-u^2}}$$

Allora:

$$\int_S f d\sigma = r \cdot \iint_B \frac{arcsin^2 u \cdot \sqrt{1-u^2}}{v\sqrt{2-u^2}} \sqrt{\frac{2-u^2}{1-u^2}} dudv =$$
$$= \int_1^e \frac{1}{v} dv \int_0^1 arcsin^2 u du = \int_1^e \frac{1}{v} \left[uarcsin^2 u + 2\sqrt{1-u^2} arcisnu - 2u \right]_0^1 = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

Teorema della Divergenza

Siano D un dominio regolare del piano e $F = (F_1, F_2)$ una applicazione da D verso R^2 di classe $C^1(D)$. Allora:

$$\iint_D divF dxdy = \int_{\partial D} (F, N) ds$$

dove $divF$ è la divergenza del vettore, $F(x,y) = (F_1(x,y);\ F_2(x,y))$ definito da

$$divF = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

e (F, N) è il prodotto scalare tra il vettore F e il versore N normale a ∂D, rivolto verso l'esterno di D e s è l'ascissa curvilinea sulla frontiera di D

Dimostrazione

Se la frontiera di D è costituita da una curva regolare a tratti di equazioni parametriche $x = x(t)$ e $y = y(t)$, con $t \in [a;\ b]$, e se il verso indotto da tale rappresentazione coincide con quello positivo della frontiera ∂D, il versore normale esterno N, quindi per la definizione di integrale curvilineo

$$\int_{+\partial D} (F, N) ds = \int_a^b \left(\frac{F_1 y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - \frac{F_2 x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \int_a^b (F_1 y' - F_2 x') dt = \int_{+\partial D} F_1 dy - F_2 dx$$

Dimostriamo questo caso utilizzando la prima formula di Gauss-Green con F_1 al posto di F e la seconda formula con F_2 al posto di F, abbiamo

$$\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial x} dxdy = \int_{\partial D} F_1 dy$$

$$\iint_D \frac{\partial F_2}{\partial y} dxdy = -\int_{\partial D} F_2 dx$$

da cui, sommando membro a membro, si ha

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial D} -F_2 dx + F_1 dy = \iint_D divF dxdy$$

Ma essendo

$$\int_{+\partial D} (F, N) ds = \int_{+\partial D} F_1 dy - F_2 dx$$

si ha la tesi.

Se la frontiera *di D* è unione di un numero finito di curve regolari a tratti (come ad esempio in una corona circolare) si ragiona suddividendo D nell'unione di domini normali

regolari privi di punti interni in comune.

Osservazione: Il teorema della divergenza, anche detto teorema di Ostrogradskij per il fatto che la prima dimostrazione è dovuta a Michail Ostrogradskij, è la generalizzazione a domini n-dimensionali del teorema fondamentale del calcolo integrale. A sua volta, esso è un caso speciale del più generale teorema di Stokes. Da non confondere col teorema di Gauss-Green, che invece è un caso speciale (ristretto a 2 dimensioni) del teorema del rotore, o con il teorema del flusso.

Teorema della divergenza nello spazio

Sia D un dominio regolare di R^3 e sia

$$F(x;\ y;\ z) = F_1\ (x;\ y;\ z)\boldsymbol{i} + F_2\ (x;\ y;\ z)\boldsymbol{j}\ + F_3\ (x;\ y;\ z)\boldsymbol{k}$$

un campo vettoriale di classe $C^1(D)$. Allora, l'integrale su D della divergenza del campo F è pari al flusso del campo uscente da D si ha

$$\iiint_D divF(x,y,z)dxdydz = \int_{\partial D} \boldsymbol{F}(x,y,z)\, \boldsymbol{n}(x,y,z)d\sigma$$

dove n è il campo normale alla frontiera di D orientato verso l'esterno del dominio D

Teorema del Rotore

Il teorema del rotore afferma che il flusso del rotore di determinati campi vettoriali attraverso superfici regolari dotate di bordo è uguale alla circuitazione del campo lungo la frontiera della superficie. Si tratta pertanto di un caso particolare del teorema di Stokes. Il teorema di Green è un caso speciale del teorema del rotore che considera superfici appartenenti a R^2

Teorema

Siano S una superficie regolare avente il contorno chiuso e regolare orientato γ^+ e $V \subset R^3$ un dominio contenente la superficie S: Sia

$$F(x;\ y;\ z) = F_1\ (x;\ y;\ z)\boldsymbol{i} + F_2\ (x;\ y;\ z)\boldsymbol{j}\ + F_3\ (x;\ y;\ z)\boldsymbol{k}$$

un campo vettoriale di classe $C^1(V)$, allora sussiste la seguente formula

$$\oint_{\gamma^+} F \cdot dr = \iint_S rotF \cdot nd\sigma$$

o, equivalentemente,

$$\oint_{\gamma^+} F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz$$
$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial F_3}{dy} - \frac{\partial F_2}{dz}\right) cos\alpha + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) cos\beta + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) cos\gamma\right] d\sigma$$

dove la curva γ^+ è percorsa nel verso corrispondente alla superficie orientata S^+ cioè un osservatore che si muove sulla curva C deve avere sempre a sinistra la faccia positiva della superficie considerata

26	Determinare il flusso diretto verso il basso del campo vettoriale $$F = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}, 1\right)$$ attraverso la superficie definita in forma parametrica come $$r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2) \quad con\ u \in [0,1], v \in [0,2\pi]$$
27	Sia $f(x,y,z) = z(y-2x)$. Calcolare l'integrale superficiale di f su σ definita su $R = \left\{(u,v) \in R^2 : u \le 0; v \ge 0, u^2+v^2 \le 16, \frac{u^2}{4} + v^2 \ge 1\right\}$ come $\sigma(u,v) = \left(u, v, \sqrt{16-u^2-v^2}\right)$
28	Calcolare l'integrale superficiale della funzione $$f(x,y,z) = \frac{y+1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}+4y^2}}$$ su Σ, parte del paraboloide ellittico $$z = -\frac{x^2}{4} - y^2$$ situata al di sopra del piano $z = -1$
29	Calcola l'area della calotta Σ parte della superficie di equazione $z = \frac{1}{2}y^2$, intercettata dal prisma (infinito) individuato dai piani di equazione $x+y=4$, $y-x=4$ e $y=0$
30	Utilizzando il teorema di Gauss, determinare il flusso del campo $$f(x,y,z) = (x^3+yz)\hat{\imath} + (xz+y^3)\hat{\jmath} + (xy+z^3+1)\hat{k}$$ uscente da Ω definito dalle relazioni $$x^2+y^2+z^2 \le 1, \quad x^2+y^2-z^2 \le 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0$$
31	Determinare il flusso del campo vettoriale $$f(x,y,z) = (xy^2+z^3)\hat{\imath} + \left(x^2+\frac{1}{3}y^3\right)\hat{\jmath} + 2\left(x^2z+\frac{1}{3}z^3+2\right)\hat{k}$$ uscente dalla frontiera della calotta definita dalle relazioni $$x^2+y^2+z^2 \le 2, \quad x^2+y^2-z^2 \le 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0$$
32	Utilizzando il teorema di Stokes, calcolare la circuitazione del campo $$f(x,y,z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + xy\hat{k}$$ lungo il bordo della superficie Σ, intersezione del cilindro $x^2+y^2=4$ e del paraboloide $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$, orientata in modo che il versore normale punti verso l'asse z.
33	Dato il campo vettoriale $$f(x,y,z) = (y+z)\hat{\imath} + 2(x+z)\hat{\jmath} + 3(x+y)\hat{k}$$

<table>
<tr><td></td><td>e la superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, calcolare il flusso del rotore di f uscente dalla parte della superficie Σ che sta al di sopra del piano $z = y$</td></tr>
</table>

Si risolvano i seguenti integrali superficiali (di II specie)

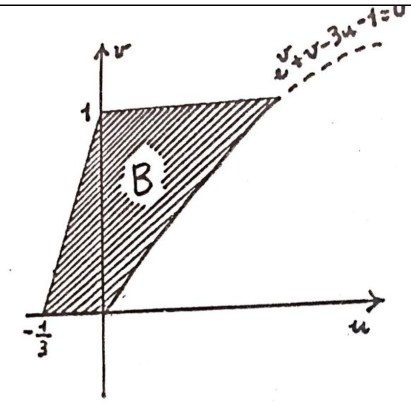
<table>
<tr><td></td><td>
Data la superficie S che ha la seguente forma parametrica

$$S: \begin{cases} x = uv \\ y = v(1-u) \\ z = u - v + uv \end{cases} \quad (u, v) \in B$$

Dato il versore normale positivo n relativo alla rappresentazione parametrica di S assegnata e v è definito dalla seguente espressione

$$v(x, y, z) = \frac{x + y + 1}{y + z - 1}\hat{\imath}$$

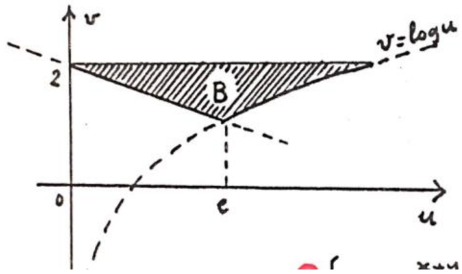
e B è il dominio rappresentato in figura, si risolva il seguente integrale di flusso

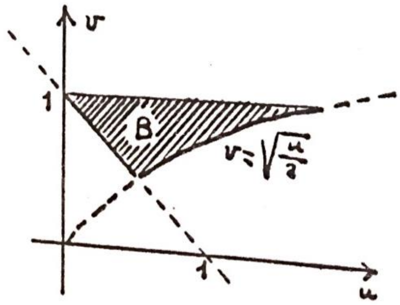
$$\int_S (v \times n) d\sigma$$
</td><td>


</td></tr>
<tr><td></td><td>
Data la superficie S che ha la seguente forma parametrica

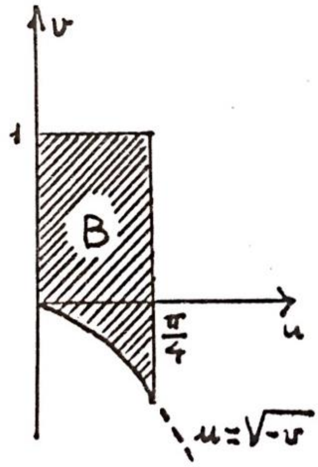
$$S: \begin{cases} x = usinv \\ y = v - usinv \\ z = u(1 + sinv) - v \end{cases} \quad (u, v) \in B$$

Dato il versore normale positivo n relativo alla rappresentazione parametrica di S assegnata
e B è il dominio rappresentato in figura, si risolva il seguente integrale di flusso

$$\int_S \frac{e^{x+y}}{\sin(x+y)} dxdy$$
</td><td>


</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>


</td></tr>
</table>

Svolgimento esercizio n°26

Calcoliamo le derivate parziali rispetto a u e v

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (cosv, sinv, 2u)$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = (-usinv, ucosv, 0)$$

Il prodotto vettoriale che ci restituirà il vettore normale alla superficie è

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = (-2u^2cosv, -2u^2sinv, u)$$

La terza componente è u ed è positiva, il vettore normale è rivolto verso l'alto; l'esercizio richiede che n sia rivolto verso il basso; dunque prenderemo il vettore

$$-\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = (2u^2cosv, 2u^2sinv, -u)$$

La funzione

$$F\big(r(u,v)\big) = \left(\frac{2ucosv}{u^2}, \frac{2usinv}{u^2}, 1\right)$$

Il prodotto scalare tra $F\big(r(u,v)\big)$ e $-\left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right)$ è

$$F\big(r(u,v)\big)\left[-\left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right)\right] = 3u$$

Infine impostiamo l'integrale

$$\iint_{\Sigma} F \cdot n d\Sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3uvudv = 3\pi$$

Svolgimento esercizio n°30

Applicando il teorema di Gauss, si ha

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot n = \int_{\Omega} divf = \int_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$$

Passando alle coordinate sferiche, la regione Ω si trasforma in Ω' definita dalle relazioni

$$0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq \pi$$

Allora:

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot n = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 3r^4 sin\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \frac{3}{10}\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)$$

Svolgimento esercizio n°32

Parametrizzando Σ come superficie cartesiana:

$$\sigma(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{4}\right) \;\; con \;\; (u, v) \in R = \{(u, v) \in R^2 : u^2 + v^2 \leq 4\}$$

Allora $\nu(u, v) = \left(-\frac{2}{9}u, -\frac{v}{2}, 1\right)$ è orientato come richiesto. Per applicare il teorema di Stokes, osserviamo che rot$f = x\hat{\imath} - y\hat{\jmath} + 0\hat{k}$ e

$$\int_{\partial\Sigma} f \cdot \tau = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(-\frac{2}{9}cos^2\theta + \frac{1}{2}sin^2\theta\right) r^3 \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{10}{9}\pi$$