Argomento 13 bis

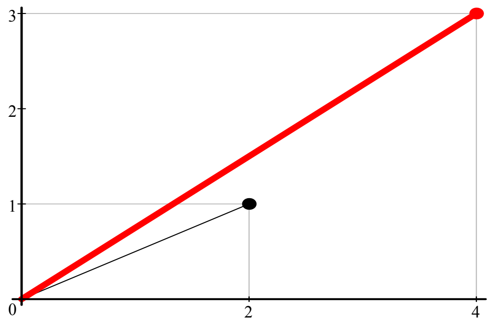
Autovalori e autovettori di una matrice quadrata

Trasformazioni di $\mathbb{R}^n$

Consideriamo una matrice quadrata A di ordine n a coefficienti, ad esempio, in $\mathbb{R}$. Essa rappresenta una trasformazione di $\mathbb{R}^n$, quella che a ogni vettore colonna $\mathbf{v}$ associa il vettore colonna $\mathbf{v}' = A\mathbf{v}$.

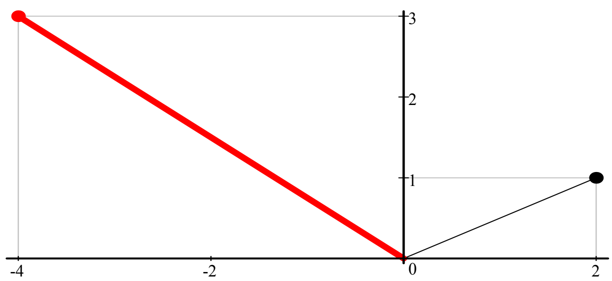
Esempi 1

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ associa ad ogni vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ il vettore $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$.
  Graficamente questo significa, in particolare, che i vettori che hanno la direzione dell'asse x sono moltiplicati per 2 (mantenendo direzione e verso) e, analogamente, quelli che hanno la direzione dell'asse y sono moltiplicati per 3.



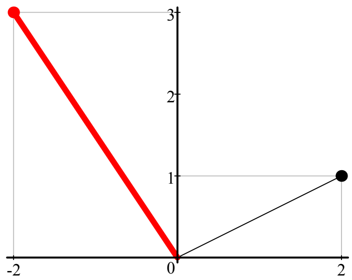
$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ associa ad ogni vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ il vettore $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ 3y \end{pmatrix}$.
  Graficamente questo significa, in particolare, che i vettori che hanno la direzione dell'asse x sono moltiplicati per 2, mantengono la direzione, ma invertono il verso, mentre quelli che hanno la direzione dell'asse y sono moltiplicati per 3 (mantenendo direzione e verso).

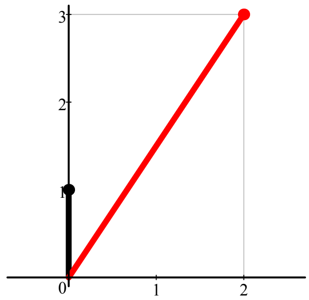


$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ associa ad ogni vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ il vettore $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+2y \\ 3y \end{pmatrix}$.
  Graficamente questo significa, in particolare, che i vettori che hanno la direzione dell'asse x sono moltiplicati per -2 (mantenendo la direzione ma non il verso), mentre quelli che hanno la direzione dell'asse y sono trasformati in vettori di direzione $(2,3)^T$.



$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nota Con la parola "trasformazione" in questo contesto non intendiamo "legge biunivoca", ma solo "funzione" del piano in se stesso (e quindi legge univoca). Ad esempio, vediamo come trasformazione la proiezione ortogonale sull'asse x: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. In questo caso i vettori che hanno la direzione dell'asse y sono tutti trasformati nel vettore nullo, mentre quelli che hanno la direzione dell'asse x sono trasformati in se stessi.

Ci chiediamo se per ogni matrice quadrata, letta come trasformazione di $\mathbb{R}^n$ in sé, ci sono delle direzioni privilegiate (cioè tali che trasformando un vettore avente una di queste direzioni si abbia ancora un vettore con la stessa direzione o il vettore nullo) e, in caso affermativo, quante sono e come determinarle.
Vedremo che la risposta, se lavoriamo con vettori di $\mathbb{R}^n$, non è sempre affermativa, mentre riconsiderando tutto il problema in $\mathbb{C}^n$ si ha sempre almeno una soluzione.

Autovalori e autovettori

Il problema precedente si traduce così:
Data A, quadrata di ordine n, esistono

- uno scalare λ
- un vettore (a n componenti) $\mathbf{v}$, non nullo,

tali che, scrivendo $\mathbf{v}$ come colonna, risulti $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$?
In caso affermativo, λ viene detto **autovalore di A** e $\mathbf{v}$ viene detto **autovettore di A relativo a λ**.

Osservazione 2 Se $\mathbf{v}$ è un autovettore di A relativo a λ, anche $t\mathbf{v}$ lo è, comunque si scelga lo scalare non nullo t.

Per calcolare gli autovettori è necessario calcolare gli autovalori corrispondenti. Infatti

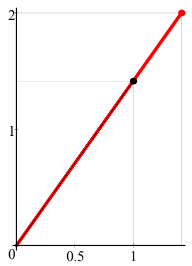
Teorema 3 *L'equazione vettoriale* $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ *ha soluzione non nulla se e solo se* $\det(A - \lambda I) = 0$.

L'equazione (polinomiale, di grado n in λ): $\det(A - \lambda I) = 0$ è detta **equazione caratteristica di** A. Il teorema 3 afferma che

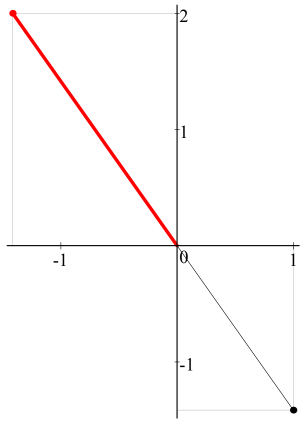
- gli autovalori di A sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione caratteristica,
- quindi gli autovalori sono al massimo n
- se l'equazione caratteristica ha una soluzione λ, gli autovettori di A relativi a λ, si trovano cercando le soluzioni $\mathbf{v}$ del sistema omogeneo $(A - \lambda I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$, che - avendo matrice dei coefficienti con rango non massimo - ha sicuramente infinite soluzioni.

Esempi 4

1) Cerchiamo gli autovalori e gli autovettori di $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. La sua equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2 = 0$; dunque ha due autovalori distinti, $\lambda = \pm\sqrt{2}$. Il sistema $\left(A - \sqrt{2}I\right)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, cioè $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, si riduce all'unica equazione $y = \sqrt{2}x$: dunque gli autovettori di A relativi a $\sqrt{2}$ sono tutti e soli quelli della forma $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} x$. Il sistema $\left(A + \sqrt{2}I\right)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, cioè $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, si riduce all'unica equazione $y = -\sqrt{2}x$: dunque gli autovettori di A relativi a $-\sqrt{2}$ sono tutti e soli quelli della forma $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} x$. Quindi ci sono due direzioni privilegiate, quelle date dalle due rette $y = \sqrt{2}x$ e $y = -\sqrt{2}x$.



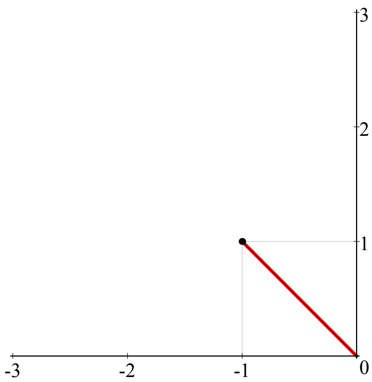
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$



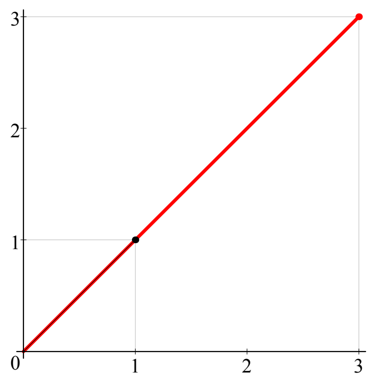
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si nota che $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, cioè accostando i due autovettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ in modo da formare una matrice, $V = (\mathbf{v}_1\,|\mathbf{v}_2\,)$, se λ_1 e λ_2 sono i corrispondenti autovalori, risulta $AV = V\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ o anche, visto che V è invertibile, $V^{-1}AV = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Si suole esprimere questo fatto dicendo che A è **diagonalizzabile**.

2) Cerchiamo gli autovalori e gli autovettori di $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. La sua equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$; dunque ha <u>due autovalori distinti</u>, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Il sistema $(A - I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$, cioè $\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, si riduce all'unica equazione $y = -x$: dunque gli autovettori di A relativi a 1 sono tutti e soli quelli della forma $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} x$. Il sistema $(A - 3I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$, cioè $\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, si riduce all'unica equazione $y = x$: dunque gli autovettori di A relativi a 3 sono tutti e soli quelli della forma $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x$. Quindi <u>ci sono due direzioni privilegiate</u>, quelle date dalle due rette $y = -x$ e $y = x$.



$$A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



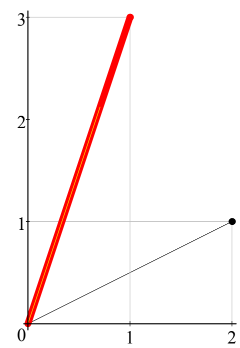
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La matrice A in esame è diagonalizzabile: la matrice diagonale è $\operatorname{diag}(1,3)$ e come matrice di autovettori indipendenti si può prendere $V = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ o anche $V = \begin{pmatrix} -h & k \\ h & k \end{pmatrix}$ con h e k non nulli.

3) Cerchiamo gli autovalori e gli autovettori di $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. La sua equazione caratteristica è $\lambda^2 - 3\lambda = 0$; dunque ha <u>due autovalori distinti</u>, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$. Il sistema $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$, si riduce all'unica equazione $y = x$: dunque gli autovettori di A relativi a 0 sono tutti e soli quelli della forma $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$. Il sistema $(A - 3I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$, cioè $\begin{pmatrix} 2-3 & -2 \\ -1 & 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si riduce all'unica equazione $x = -2y$: dunque gli autovettori di A relativi a 3 sono tutti e soli quelli della forma $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}$. Quindi <u>ci sono due direzioni privilegiate</u>, quelle date dalle due rette $y = x$ e $x + 2y = 0$. La matrice A in esame è diagonalizzabile: la matrice diagonale è $\operatorname{diag}(0,3)$ e come matrice di autovettori indipendenti si può prendere $V = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4) Cerchiamo gli autovalori e gli autovettori di $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. La sua equazione caratteristica è $(2-\lambda)^2 = 0$; dunque ha <u>due autovalori coincidenti</u>, $\lambda = 2$. Il sistema $(A - 2I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$, cioè $\begin{pmatrix} 2-2 & -1 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, si riduce all'unica equazione $y = 0$: dunque gli autovettori di A sono tutti e soli quelli della forma $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, cioè quelli diretti come l'asse x. <u>Non esiste un'altra direzione privilegiata!</u> Questo implica che la matrice A in esame non è diagonalizzabile (non riesco a formare con gli autovettori una matrice quadrata V).

5) Cerchiamo gli autovalori e gli autovettori di $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La sua equazione caratteristica è $(1-\lambda)^2 + 1 = 0$; dunque <u>non ha autovalori reali</u> e quindi non può avere neppure autovettori in $\mathbb{R}^2$! Geometricamente ciò significa che non ci sono direzioni privilegiate per questa trasformazione (che in effetti corrisponde alla composizione di una rotazione di $\pi/4$ e di una dilatazione di $\sqrt{2}$: vedi figura).



$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

6) Invece in $\mathbb{C}$ la matrice dell'esempio precedente ha <u>due autovalori distinti</u>, $\lambda = 1 \pm i$: quindi <u>in $\mathbb{C}^2$ le direzioni privilegiate ci sono</u>.

Il sistema $\begin{pmatrix} 1-(1+i) & -1 \\ 1 & 1-(1+i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si riduce all'unica equazione $y = -ix$: dunque gli autovettori di A relativi a $1+i$ sono tutti e soli quelli della forma $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} x$.

Il sistema $\begin{pmatrix} 1-(1-i) & -1 \\ 1 & 1-(1-i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si riduce all'unica equazione $y = ix$: dunque gli autovettori di A relativi a $-1+i$ sono tutti e soli quelli della forma $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} x$.

Condizioni di diagonalizzabilità

Abbiamo verificato negli esempi 4 che, se una matrice A (di tipo 2×2) ha 2 autovalori distinti, autovettori corrispondenti ai due autovalori sono indipendenti e quindi la matrice V (di tipo 2×2) formata accostandoli è invertibile. In generale vale la seguente

Osservazione 5 *Se una matrice A* (di tipo $n\times n$) *ha n autovalori distinti, scegliendo un autovettore per ogni autovalore, si ha una n-upla di vettori indipendenti* e quindi la matrice V (di tipo $n \times n$) formata accostandoli è invertibile.

Dunque, *se una matrice A ha n autovalori distinti* λ_1, λ_2,..., λ_n e per ogni i risulta $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$, si ha

$$A\,(\mathbf{v}_1\,|\mathbf{v}_2|\dots|\mathbf{v}_n\,) = (\mathbf{v}_1\,|\mathbf{v}_2|\dots|\mathbf{v}_n\,)\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

e quindi, scrivendo $V = (\mathbf{v}_1\,|\mathbf{v}_2|\dots|\mathbf{v}_n\,)$,

$$V^{-1}AV = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

vale a dire *la matrice è diagonalizzabile.*

Ma, è necessario che gli autovalori siano distinti per trovare autovettori indipendenti?

Esempio 6 La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ha equazione caratteristica $(3-\lambda)^2\,(4-\lambda) = 0$; dunque ha due autovalori coincidenti, $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ e un'altro distinto da essi, $\lambda_3 = 4$.
Il sistema $(A - 4I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$, cioè $\begin{pmatrix} 3-4 & 0 & 0 \\ 0 & 3-4 & 0 \\ 2 & 1 & 4-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si riduce al sistema (di 2 equazioni in 3 incognite) $x = y = 0$: dunque gli autovettori di A relativi a 4 sono tutti e soli quelli della forma $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$.
Il sistema $(A - 3I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$, si riduce all'unica equazione $2x + y + z = 0$: dunque gli autovettori di A relativi a 3 sono tutti e soli quelli della forma $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} y.$
Quindi <u>relativamente all'autovalore 3 si trova più di una direzione privilegiata</u>. Due qualunque scelte tra queste sono indipendenti: ad esempio quelle (ottenute per $x = 1$, $y = 0$ e per $x = 0$, $y = 1$) date dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, ma anche quelle (ottenute per $x = 1$, $y = -2$ e per $x = 0$, $y = 1$) date da $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
La matrice A in esame è diagonalizzabile: la matrice diagonale è $\mathrm{diag}(3, 3, 4)$ e come matrice di autovettori indipendenti si può prendere ad esempio $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Verificare che risulta: $V^{-1}AV = \mathrm{diag}(3, 3, 4)$.

In generale si dice che un **autovalore** λ_* della matrice A **ha**

- **molteplicità algebrica** m se il polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I)$ può essere diviso per $(\lambda - \lambda_*)^m$ ma non per $(\lambda - \lambda_*)^{m+1}$,

- **molteplicità geometrica** g se tra gli autovettori corrispondenti a λ_* ce ne sono esattamente g indipendenti.

Se r è il rango di $A - \lambda_* I$, la molteplicità geometrica di λ_* è $n - r$.
Si dimostra che *si ha sempre* $m \geq g$ e che la *condizione necessaria e sufficiente perché la matrice sia diagonalizzabile è che valga l'uguaglianza per tutti gli autovalori di* A.

Ciò è proprio quanto succede nell'esempio 6: l'autovalore 3 ha molteplicità algebrica e geometrica 2, l'autovalore 4 ha molteplicità algebrica e geometrica 1.
Invece nell'esempio 4, caso 4) l'autovalore 2 ha molteplicità algebrica 2 e geometrica 1: per questo tale matrice non è diagonalizzabile.
In realtà, se A è quadrata di ordine 2 e ha un autovalore con molteplicità algebrica 2, essa è diagonalizzabile se e solo se è diagonale.

Interpretazione geometrica della diagonalizzabilità

Se si usa la trasformazione rappresentata dalla matrice A per trasformare i punti del piano (invece dei vettori) si trova un'interpretazione geometrica dei casi di matrici diagonalizzabili discussi nell'esempio 4.

- Dire che $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile con autovalori $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ ed autovettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ significa che la mattonella nera in figura 1 è trasformata in quella colorata e quindi se adottiamo come sistema di riferimento XOY nel piano quello delle rette $y = -\sqrt{2}x$ e $y = \sqrt{2}x$, orientandole come i due autovettori, vediamo che la trasformazione lavora esattamente come una dilatazione di un fattore $\sqrt{2}$ seguita da un cambiamento di verso (che in un sistema cartesiano ortogonale XOY interpreteremmo come ribaltamento rispetto all'asse Y: vedi figura 2).

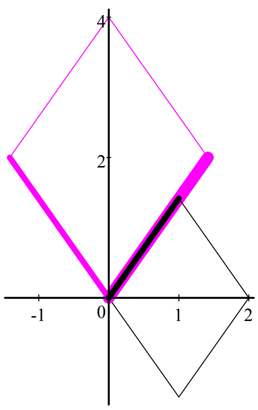


Figura 1

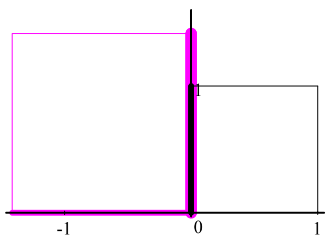
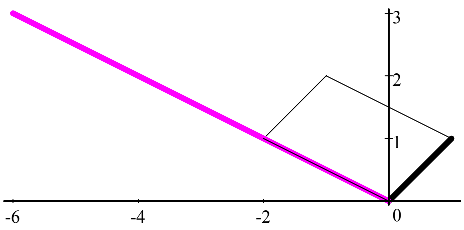
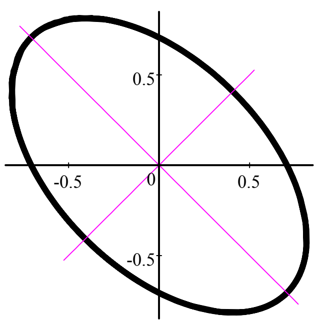


Figura 2

- Dire che $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile con autovalori 0 e 3 ed autovettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ può essere interpretato in modo analogo a prima, ma in questo caso il fattore di dilatazione nella direzione individuata dal vettore $(1, 1)$ è 0: si ha quindi una proiezione nella direzione individuata dal vettore $(1, 1)$ sulla retta $x + 2y = 0$, seguita da una dilatazione nella direzione di questa retta di un fattore 3. Concretamente, la mattonella nera viene schiacciata nel segmento colorato. Se non si evidenziano le direzioni privilegiate (cioè le rette con cui è opportuno costruire il sistema di riferimento) è difficile intuire come agisce la trasformazione!



- Dire che $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile con autovalori 1 e 3 ed autovettori $\begin{pmatrix} h \\ -h \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$ può essere interpretato in modo analogo a prima, oppure si può osservare che l'equazione $(x, y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$, cioè $2x^2 + 2xy + 2y^2 = c$, rappresenta una curva: quale? Sappiamo che, denotata con V la matrice ottenuta accostando due autovettori (relativi a 1 e 3) di modulo 1: $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, risulta $A = V^{-1}\mathrm{diag}(1, 3)V$ e quindi l'equazione si riscrive $(x, y)\, V^{-1}\mathrm{diag}(1, 3)V \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$; d'altra parte si vede che $V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = V^T$: quindi, posto $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, l'equazione si riscrive $(X, Y)\mathrm{diag}(1, 3) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = c$, cioè $X^2 + 3Y^2 = c$. Da ciò deduciamo che nel sistema di riferimento XOY, ottenuto rotando il sistema xOy di $\frac{\pi}{4}$ in verso antiorario, l'equazione rappresenta un'ellisse di semiassi $\sqrt{c}$ e $\sqrt{\frac{c}{3}}$: ovviamente la natura della curva non dipende dal sistema di riferimento e quindi anche l'equazione data all'inizio rappresenta un'ellisse e gli autovettori danno la direzione dei suoi assi [1].



[1] Allo scopo di poter fare questo tipo di considerazioni, è importante che la matrice A coincida con la sua trasposta A^T e che gli autovettori scelti per costruire la matrice V abbiano modulo 1.

Esercizi

Esercizio 1 Determinare autovalori ed autovettori delle seguenti matrici, specificando se gli autovalori sono reali e la loro molteplicità algebrica e geometrica:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2 Mostrare che tutte le matrici con determinante 0 hanno l'autovalore 0 con molteplicità algebrica almeno 1.

Esercizio 3 Mostrare che una matrice e la sua trasposta hanno gli stessi autovalori.

Esercizio 4 Diciamo che una matrice è simmetrica se coincide con la sua trasposta (in effetti tale matrice ha la riga i-esima ordinatamente uguale alla colonna i-esima e quindi è simmetrica rispetto alla diagonale principale). Dimostrare, almeno per $n = 2$, che tali matrici hanno n autovalori reali, n autovettori a due a due ortogonali e sono diagonalizzabili.