

E

SUPERFICI REGOLARI E INTEGRALI DI SUPERFICIE

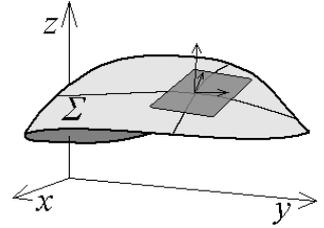
(C. DE MITRI)

E1. Superfici regolari

Definizione E1.1. Sia D un dominio internamente connesso di \mathbb{R}^2 . Un'applicazione $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice *superficie regolare* se:

- a) $\phi \in C^1(D)$;
- b) due punti distinti di D , di cui uno almeno interno, hanno immagini distinte;
- c) $\forall (u,v) \in D^\circ$ la matrice $D\phi(u,v)$ ha rango 2.

L'insieme $\Sigma = \phi(D)$ è chiamato *sostegno della superficie* ϕ .



Talvolta il termine superficie verrà riferito al sostegno Σ , ritenendo sottinteso che sia assegnata l'applicazione ϕ . A volte si dirà: la superficie Σ di equazioni parametriche

$$\phi \equiv \begin{cases} x = \phi_1(u,v) \\ y = \phi_2(u,v) \\ z = \phi_3(u,v) \end{cases}, (u,v) \in D.$$

Allo scopo di dare una interpretazione geometrica alla condizione (c), $\forall (u,v) \in D^\circ$ indichiamo con $A_\phi(u,v)$, $B_\phi(u,v)$, $C_\phi(u,v)$ i minori di ordine due, presi con segno alternato, della matrice $D\phi(u,v)$, ossia gli jacobiani

$$A_\phi(u,v) = \left| \frac{\partial(\phi_2, \phi_3)}{\partial(u,v)} \right|, B_\phi(u,v) = \left| \frac{\partial(\phi_3, \phi_1)}{\partial(u,v)} \right|, C_\phi(u,v) = \left| \frac{\partial(\phi_1, \phi_2)}{\partial(u,v)} \right|.$$

Sappiamo che, considerati i vettori di \mathbb{R}^3 $\phi_u(u,v) = (\frac{\partial\phi_1}{\partial u}(u,v), \frac{\partial\phi_2}{\partial u}(u,v), \frac{\partial\phi_3}{\partial u}(u,v))$ e $\phi_v(u,v) = (\frac{\partial\phi_1}{\partial v}(u,v), \frac{\partial\phi_2}{\partial v}(u,v), \frac{\partial\phi_3}{\partial v}(u,v))$, sussiste l'uguaglianza $\phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v)^{(1)} = (A_\phi(u,v), B_\phi(u,v), C_\phi(u,v))$. Pertanto la (c) vuole che, $\forall (u,v) \in D^\circ$, risulti $\phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v) \neq (0,0,0)$, ossia che i vettori $\phi_u(u,v)$ e $\phi_v(u,v)$ siano linear/te indipendenti.

Per saperne di più, fissiamo $(\bar{u}, \bar{v}) \in D^\circ$ e poniamo $\bar{P} = \phi(\bar{u}, \bar{v})$. La funzione parziale $\phi_{(\bar{v})}$, definita in un intorno di \bar{u} da $\phi_{(\bar{v})}(u) = \phi(u, \bar{v})$, è una curva di \mathbb{R}^3 detta *curva coordinata* della superficie ϕ ; il suo sostegno, che è l'immagine mediante ϕ di una parte, intorno ad (\bar{u}, \bar{v}) , della retta $v = \bar{v}$ del piano uv , è contenuto in Σ e contiene \bar{P} . Analogo discorso vale per la funzione parziale $\phi_{(\bar{u})}$, che rappresenta l'altra curva coordinata passante per \bar{P} . Se si ricorda che $\phi'_{(\bar{v})}(\bar{u}) = \phi_u(\bar{u}, \bar{v})$ e $\phi'_{(\bar{u})}(\bar{v}) = \phi_v(\bar{u}, \bar{v})$ sono i vettori tangenti a queste curve in \bar{P} , si capisce che la (c) vuole che le curve coordinate $\phi_{(\bar{v})}$ e $\phi_{(\bar{u})}$ ammettano, ciascuna, retta tangente in \bar{P} , e che tali rette non siano coincidenti.

⁽¹⁾ Ricordiamo che, dati i vettori $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ e $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, si pone $a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$ (prodotto vettoriale).

Il piano individuato dalle suddette tangenti prende il nome di *piano tangente* alla superficie ϕ nel punto \bar{P} . Si può provare che esso *contiene le tangenti in \bar{P} non solo alle due curve coordinate passanti per \bar{P} ma anche a tutte le altre curve giacenti sulla superficie, passanti per \bar{P} ed ivi dotate di retta tangente*. Il piano tangente è rappresentato parametricamente dall'applicazione $\pi \equiv \phi(\bar{u}, \bar{v}) + \phi_u(\bar{u}, \bar{v})u + \phi_v(\bar{u}, \bar{v})v$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$; mentre la sua equazione cartesiana è data da $A_\phi(\bar{u}, \bar{v})(x - \bar{x}) + B_\phi(\bar{u}, \bar{v})(y - \bar{y}) + C_\phi(\bar{u}, \bar{v})(z - \bar{z}) = 0$, dove $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ sono le coordinate cartesiane di \bar{P} .

Osserviamo infine che il vettore $\phi_u(\bar{u}, \bar{v}) \times \phi_v(\bar{u}, \bar{v})$ è normale al piano tangente in \bar{P} , per cui è chiamato *vettore normale* a ϕ in \bar{P} ed è indicato con $N_\phi(\bar{u}, \bar{v})$; il relativo versore $\nu_\phi(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{N_\phi(\bar{u}, \bar{v})}{|N_\phi(\bar{u}, \bar{v})|}$ è detto *versore normale* a ϕ in \bar{P} .

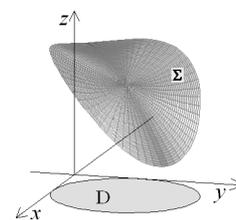
-) SUPERFICI CARTESIANE. Sia $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, con D dominio internamente connesso di \mathbb{R}^2 . Si vede che, se $g \in C^1(D)$, allora l'applicazione $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\phi(x, y) = (x, y, g(x, y))$ è una superficie regolare, avente per sostegno il grafico di g . In particolare si calcola, $\forall (x, y) \in D^\circ$

$$D\phi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{pmatrix}, \text{ da cui segue che}$$

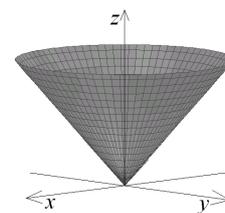
$$N_\phi(x, y) = (A_\phi(x, y), B_\phi(x, y), C_\phi(x, y)) = (-g_x(x, y), -g_y(x, y), 1).$$

Fissato $(\bar{x}, \bar{y}) \in D^\circ$ e posto $\bar{P} = \phi(\bar{x}, \bar{y})$, si ritrova, per il piano tangente a ϕ in \bar{P} , la già nota equazione $z = g(\bar{x}, \bar{y}) + g_x(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + g_y(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y})$.

Ogni superficie $\phi \equiv \phi(u, v)$ nella quale i parametri coincidono con due delle tre variabili cartesiane è detta *superficie cartesiana*.



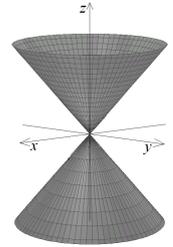
-) SUPERFICI CONICHE. Sia $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq r^2\}$, con $r \in \mathbb{R}^+$, e sia $k \in \mathbb{R}^+$. L'applicazione $\psi : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\psi(x, y) = (x, y, k\sqrt{x^2 + y^2})$ non è una superficie regolare, dato che ψ non è derivabile in $(0, 0)$. Il suo sostegno $\Sigma = \psi(B)$ è la superficie laterale di un cono circolare retto con vertice in $(0, 0, 0)$, asse l'asse z , contenuto nel semispazio $z \geq 0$ (in quello opposto se avessimo preso $k < 0$). Da notare che la restrizione di ψ all'insieme $B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r^2\}$, con $r_1 < r$, è una superficie regolare, il cui sostegno è la superficie laterale di un tronco di cono.



Se si vuole una rappresentazione parametrica regolare della superficie conica, basta considerare l'applicazione $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, ku)$, con $D = [0, r] \times [0, 2\pi]$. Per provare che ϕ è regolare, si osserva anzitutto che $\phi \in C^1(D)$; poi, presi due punti distinti $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in D$, di cui uno almeno interno, se $u_1 \neq u_2$ si ha subito che $\phi(u_1, v_1) \neq \phi(u_2, v_2)$; se invece $u_1 = u_2$, così che $v_1 \neq v_2$, non può aversi ad un tempo $\cos v_1 = \cos v_2$ e $\sin v_1 = \sin v_2$, sicché di nuovo risulta $\phi(u_1, v_1) \neq \phi(u_2, v_2)$; infine si calcola che $N_\phi(u, v) = (-ku \cos v, -ku \sin v, u) \neq (0, 0, 0)$ in D° .

Le curve coordinate $\phi_{(v)}$, dette *generatrici*, sono segmenti uscenti dall'origine, mentre le curve coordinate $\phi_{(u)}$ sono circonferenze appartenenti a piani paralleli al piano xy . Da notare che ϕ non è iniettiva in tutto D , dato che $\phi(0, v) = (0, 0, 0) \forall v \in [0, 2\pi]$; e del resto risulta anche $\phi(u, 0) = \phi(u, 2\pi) \forall u \in [0, r]$. Inoltre la terna (A_ϕ, B_ϕ, C_ϕ) è nulla nei punti $(0, v) \forall v \in [0, 2\pi]$.

Se raddoppiamo il dominio dell'applicazione ϕ facendolo diventare $\tilde{D} = [-r, r] \times [0, 2\pi]$, anche il sostegno raddoppia, diventando una superficie conica a due falde. Tuttavia l'applicazione ϕ così modificata non è più una superficie regolare, dato che i punti $(0, v)$ con $v \in]0, 2\pi[$, che son portati da ϕ in un medesimo punto del sostegno e nei quali la terna (A_ϕ, B_ϕ, C_ϕ) è nulla, ora sono interni al dominio.



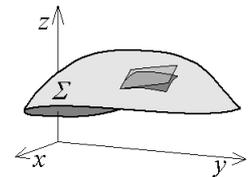
E2. Area di una superficie regolare

Definizione E2.1. Sia D un dominio regolare internamente connesso di \mathbb{R}^2 e sia $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare. Si definisce area di ϕ il numero $\mathcal{A}(\phi) := \iint_D |N_\phi(u, v)| \, dudv$.⁽¹⁾

Si può provare che, indicato con Σ il sostegno di ϕ , se ψ è un'altra rappresentazione parametrica regolare avente lo stesso sostegno Σ , allora $\mathcal{A}(\psi) = \mathcal{A}(\phi)$. Pertanto spesso si scrive $\mathcal{A}(\Sigma)$ piuttosto che $\mathcal{A}(\phi)$.

Proponiamo ora una giustificazione, sia pure grossolana, della definizione data.

Nel piano uv consideriamo il rettangolo elementare $R \subseteq D$ costruito sui segmenti che congiungono i punti (u, v) con $(u + \Delta u, v)$ e (u, v) con $(u, v + \Delta v)$, dove Δu e Δv sono incrementi positivi e sufficientemente piccoli. La sua immagine tramite ϕ , $\phi(R)$, è una porzione elementare di Σ . In particolare, il lato di estremi (u, v) e $(u + \Delta u, v)$ si trasforma in un tratto della curva coordinata $\phi_{(v)}$, che si può confondere con il vettore $\phi_u(u, v)\Delta u$; analogamente, il lato di estremi (u, v) e $(u, v + \Delta v)$ si trasforma in un tratto della curva coordinata $\phi_{(u)}$, che si può confondere con il vettore $\phi_v(u, v)\Delta v$. Ne segue che $\phi(R)$ si può confondere con il parallelogrammo costruito sui due vettori suddetti. E' noto che, se α è l'angolo formato da questi vettori, l'area del parallelogrammo è data da $|\phi_u(u, v)| \Delta u |\phi_v(u, v)| \Delta v \sin \alpha = |\phi_u(u, v) \times \phi_v(u, v)| \Delta u \Delta v$.



⁽¹⁾ Si potrebbe esser tentati, in analogia con il caso della lunghezza di una curva, di definire l'area di una superficie come l'estremo superiore delle aree delle superfici poliedriche costituite da triangoli con vertici in punti del sostegno. Si può provare che questo metodo non funziona, poiché, a meno di introdurre restrizioni sulle dimensioni dei triangoli, l'estremo superiore verrebbe $+\infty$ più spesso di quanto è ragionevole aspettarsi.

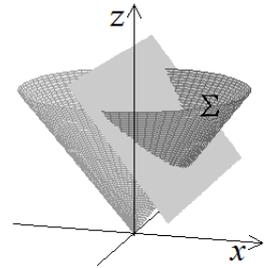
Esempio E2.1. Sia Σ la superficie cartesiana di equazione $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, dove D è un dominio regolare internamente connesso di \mathbb{R}^2 e $g \in C^1(D)$. Si riconosce che $\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + |\nabla g(x, y)|^2} dx dy$.

Infatti Σ è rappresentata parametricamente dall'applicazione $\phi(x, y) = (x, y, g(x, y))$, $(x, y) \in D$, ed è noto che, $\forall (x, y) \in D$, $\phi_x(x, y) \times \phi_y(x, y) = (-g_x(x, y), -g_y(x, y), 1)$, cosicché $|N_\phi(x, y)| = \sqrt{1 + g_x^2(x, y) + g_y^2(x, y)} = \sqrt{1 + |\nabla g(x, y)|^2}$.

Supponiamo ad esempio di voler calcolare l'area della porzione di superficie conica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ compresa fra i piani $z = 2 - x$ in basso e $z = 2$ in alto.

Dalle condizioni $2 - x \leq z \leq 2$, ove si pensi $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, si ricava il dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 1 - \frac{1}{4}y^2\}$.

Applicando la formula suddetta alla funzione $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, si ha: $\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_D \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} m_2(D) = \sqrt{2} [2\pi - \int_{-2}^2 (1 - \frac{1}{4}y^2) dy] = \dots = 2\sqrt{2} (\pi - \frac{4}{3})$.



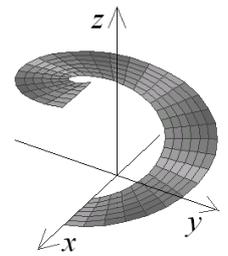
Esempio E2.2. Calcoliamo l'area della superficie $\phi \equiv (u \cos v, u \sin v, v)$, con $(u, v) \in [1, 2] \times [0, 2\pi]$.

Il sostegno di ϕ è la striscia elicoidale formata dai segmenti orizzontali che congiungono le due eliche cilindriche

$\gamma \equiv (\cos v, \sin v, v)$ e $\zeta \equiv (2 \cos v, 2 \sin v, v)$, $v \in [0, 2\pi]$.

Si calcola che $|N_\phi(u, v)| = \sqrt{u^2 + 1}$, e quindi, posto

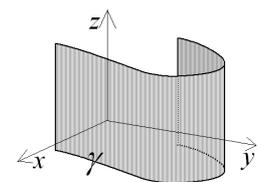
$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\pi\}$, si ottiene $\mathcal{A}(\phi) = \iint_D \sqrt{u^2 + 1} du dv = \dots = \pi (2\sqrt{5} - \sqrt{2} + \log(2 + \sqrt{5}) - \log(1 + \sqrt{2}))$.



-) SUPERFICI CILINDRICHE. Si consideri la curva piana $\gamma \equiv \begin{cases} x = \gamma_1(u) \\ y = \gamma_2(u) \end{cases}$, $u \in [a, b]$.

Si riconosce che, se γ è semplice e regolare, posto $D = [a, b] \times [0, h]$, con $h \in \mathbb{R}^+$, l'applicazione $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\phi \equiv (\gamma_1(u), \gamma_2(u), v)$ è una superficie regolare, detta *superficie cilindrica*. Le curve coordinate $\phi_{(v)}$ e $\phi_{(u)}$ sono dette rispettivamente *direttrici* e *generatrici*.

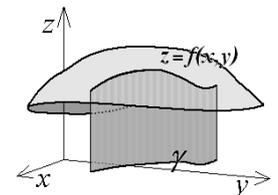
Si calcola, $\forall (u, v) \in D$, $N_\phi \equiv (\gamma'_2(u), -\gamma'_1(u), 0)$; ne segue che l'area della superficie è $\mathcal{A}(\phi) = \iint_D |\gamma'(u)| du dv = l(\gamma) h$, dove $l(\gamma)$ è la lunghezza della direttrice γ .



Naturalmente il dominio D può anche non essere un rettangolo.

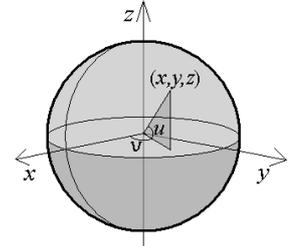
Se ad esempio $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / a \leq u \leq b, 0 \leq v \leq f(\gamma(u))\}$, dove f è una funzione reale, positiva e continua in un aperto di \mathbb{R}^2 contenente il sostegno di γ , allora ϕ è la superficie cilindrica che si sviluppa fra il piano xy ed il grafico di f .

Si calcola allora che $\mathcal{A}(\phi) = \iint_D |\gamma'(u)| du dv = \int_a^b |\gamma'(u)| du \int_0^{f(\gamma(u))} dv = \int_a^b f(\gamma(u)) |\gamma'(u)| du = \int_\gamma f ds$, il che fornisce anche un'interpretazione geometrica dell'integrale curvilineo della funzione f lungo la curva γ .



-) **SUPERFICI SFERICHE.** Dati $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$ ed $r \in \mathbb{R}^+$, si riconosce che l'applicazione $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\phi(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u)$ è una superficie regolare, il cui sostegno è la superficie sferica di centro $(0, 0, 0)$ e raggio r .

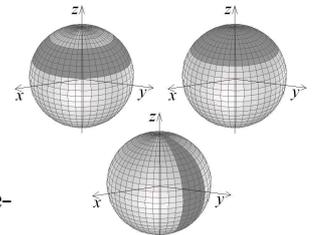
I parametri u e v rappresentano rispettivamente la latitudine e la longitudine del punto $\phi(u, v)$, e le curve coordinate $\phi(v)$ e $\phi(u)$ rappresentano rispettivamente i meridiani e i paralleli.



Da notare che ϕ non è iniettiva in tutto D . Infatti i punti $(-\frac{\pi}{2}, v)$, $v \in [0, 2\pi]$, hanno per immagine il polo $(0, 0, -r)$, e i punti $(\frac{\pi}{2}, v)$, $v \in [0, 2\pi]$, hanno per immagine il polo $(0, 0, r)$; inoltre, $\forall u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, risulta $\phi(u, 0) = \phi(u, 2\pi)$.

Si calcola che, $\forall (u, v) \in D$, $N_\phi(u, v) = -r \cos u \phi(u, v)$, e da ciò segue che $|N_\phi(u, v)| = r^2 \cos u$ e $\mathcal{A}(\phi) = r^2 \iint_D \cos u \, du \, dv = 4\pi r^2$.

Limitando la variabilità del parametro u all'intervallo $[u_1, u_2] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, si ottiene l'area della *zona sferica*, o eventualmente della *calotta sferica*, compresa fra le latitudini u_1 e u_2 ; in modo analogo, se la variabilità del parametro v viene ridotta all'intervallo $[v_1, v_2] \subset [0, 2\pi]$, si ottiene l'area del *fuso sferico* compreso fra le longitudini v_1 e v_2 .

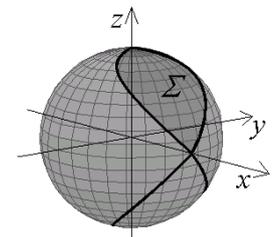


Esempio E2.3. Calcoliamo l'area della superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 \leq 2x, z \geq 0\}$ (*finestra di Viviani*).

Il luogo Σ può essere rappresentato dall'applicazione $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, dove $\phi \equiv (2 \cos u \cos v, 2 \cos u \sin v, 2 \sin u)$ e $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, -u \leq v \leq u\}$. Si calcola:

$$\mathcal{A}(\phi) = 4 \iint_D \cos u \, du \, dv = 4 \int_0^{\pi/2} \cos u \, du \int_{-u}^u dv = \dots = 4\pi - 8.$$

Osserviamo che la superficie assegnata poteva essere rappresentata anche dall'applicazione $\psi \equiv (x, y, \sqrt{4-x^2-y^2})$ su $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 2x\}$, che però, avendo il “difetto” di non soddisfare la condizione (a) della Definizione E1.1, non sarebbe rientrata nel contesto in cui è stata collocata la Definizione E2.1.



A tal proposito avvertiamo che *le nozioni di superficie e di relativa area potevano essere date anche sotto condizioni meno restrittive* rispetto a quelle richieste nella presente trattazione; così facendo, nel caso specifico del nostro esempio, posto $g(x, y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ e $T^* = T \setminus \{(2, 0)\}$, si sarebbe ottenuto che $\mathcal{A}(\psi) = \iint_{T^*} \sqrt{1 + |\nabla g(x, y)|^2} \, dx \, dy = \iint_{T^*} (2/\sqrt{4-x^2-y^2}) \, dx \, dy$, dove l'integrale generalizzato al 2° membro si calcola agevolmente ad esempio approssimando T^* mediante gli insiemi $T_k^* = \{(x, y) \in T^* / x^2 + y^2 \leq (2 - \frac{1}{k})^2\}$ ed utilizzando le coordinate polari con polo in $(0, 0)$. Risulta infatti:

$$\iint_{T^*} \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \, dx \, dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{T_k^*} \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \, dx \, dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2-\frac{1}{k}} \frac{2\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} \, d\rho \int_{-\arccos \frac{\rho}{2}}^{\arccos \frac{\rho}{2}} d\vartheta = \dots = -4 \lim_{k \rightarrow \infty} [\sqrt{4-\rho^2} \arccos \frac{\rho}{2} + \rho]_0^{2-\frac{1}{k}} = 4\pi - 8.$$

-) SUPERFICI DI ROTAZIONE. Sia $\gamma \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$, una curva regolare semplice, con $x(t) > 0 \forall t \in]a, b[$, e sia $\alpha \in]0, 2\pi[$. Posto $D = [a, b] \times [0, \alpha]$, si riconosce che l'applicazione $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\phi(t, \vartheta) = (x(t) \cos \vartheta, x(t) \sin \vartheta, z(t))$ è una superficie regolare, detta *superficie di rotazione*. Le curve coordinate $\phi_{(\vartheta)}$ e $\phi_{(t)}$ sono dette rispettivamente meridiani e paralleli.

Se $\gamma \equiv (t, kt)$, $t \in [0, r]$, con $r \in \mathbb{R}^+$ e $k \neq 0$, si ottiene una superficie conica.

Se $\gamma \equiv (t, kt^2)$, $t \in [0, r]$, con $r \in \mathbb{R}^+$ e $k \neq 0$, si ottiene un paraboloide di rotazione.

Se $\gamma \equiv (r \cos t, r \sin t)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, con $r \in \mathbb{R}^+$, si ottiene una superficie sferica.

Se $\gamma \equiv (a + r \cos t, r \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, con $0 < r < a$, si ottiene una superficie torica.

Tornando al caso generale, si calcola che, $\forall (t, \vartheta) \in D$, $|\phi_t(t, \vartheta) \times \phi_{\vartheta}(t, \vartheta)| = x(t) |\gamma'(t)|$. Ne segue che $\mathcal{A}(\phi) = \iint_D x(t) |\gamma'(t)| dt d\vartheta = \alpha \int_a^b x(t) |\gamma'(t)| dt = \alpha \int_{\gamma} x ds$.

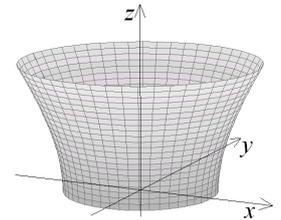
Pertanto, ricordando che la prima coordinata del baricentro di γ è data da $\bar{x} = \frac{1}{l(\gamma)} \int_{\gamma} x ds$, risulta sostanzialmente dimostrato il seguente

Teorema E2.1 (di Pappo-Guldino per le superfici di rotazione). *L'area di una superficie di rotazione è uguale al prodotto della lunghezza della curva ruotante per la lunghezza del cammino percorso dal suo baricentro.*

Ad esempio, l'area della superficie torica menzionata sopra è uguale a $4\pi^2 ra$.

Esempio E2.4. Calcoliamo l'area della superficie Σ che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la curva di equazione $x = \sqrt{z^2 + 4}$, $0 \leq z \leq 4$.

La superficie Σ è parametrizzata da $\phi \equiv \begin{cases} x = \sqrt{z^2 + 4} \cos \vartheta \\ y = \sqrt{z^2 + 4} \sin \vartheta \\ z = z \end{cases}$,



su $D = \{(z, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq z \leq 4, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$. Si calcola che $|N_{\phi}| = \sqrt{2(z^2 + 2)}$, e $\mathcal{A}(\Sigma) = \sqrt{2} \iint_D \sqrt{z^2 + 2} dz d\vartheta = \dots = 2\sqrt{2} \pi \int_0^4 \sqrt{z^2 + 2} dz = \dots$

Il calcolo può essere ripetuto usando una diversa rappresentazione della curva ruotante, che è l'iperbole $\gamma \equiv (2 \cosh t, 2 \sinh t)$, $0 \leq t \leq \log(2 + \sqrt{5})$; partendo da essa si ricava per Σ la parametrizzazione

$\psi \equiv \begin{cases} x = 2 \cosh t \cos \vartheta \\ y = 2 \cosh t \sin \vartheta \\ z = 2 \sinh t \end{cases}$, su $T = \{(t, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq t \leq \log(2 + \sqrt{5}), 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$.

Si calcola $|N_{\psi}| = 4 \cosh t \sqrt{1 + 2 \sinh^2 t}$, e $\mathcal{A}(\Sigma) = 4 \iint_T \cosh t \sqrt{1 + 2 \sinh^2 t} dt d\vartheta = \dots = 8\pi \int_0^{\log(2+\sqrt{5})} \cosh t \sqrt{1 + 2 \sinh^2 t} dt$; e da qui si riottiene $2\sqrt{2} \pi \int_0^4 \sqrt{z^2 + 2} dz$ se nell'integrale si effettua la sostituzione $z = 2 \sinh t$.

Oppure ancora, per fare prima, si ricorre alla formula stabilita sopra, $\mathcal{A}(\phi) = \alpha \int_{\gamma} x ds$,

assumendo $\gamma \equiv \begin{cases} x = \sqrt{z^2 + 4} \\ z = z \end{cases}$, $0 \leq z \leq 4$, oppure $\gamma \equiv \begin{cases} x = 2 \cosh t \\ z = 2 \sinh t \end{cases}$, $0 \leq t \leq \log(2 + \sqrt{5})$.

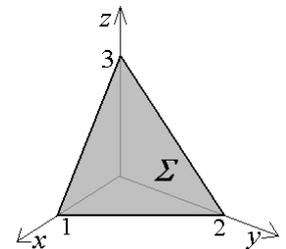
E3. Integrali di superficie e teorema della divergenza

Definizione E3.1. Sia D un dominio regolare internamente connesso di \mathbb{R}^2 e sia $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare, con sostegno $\Sigma = \phi(D)$. Data $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ continua, si chiama integrale superficiale di f esteso a ϕ il numero $\int_{\phi} f \, d\sigma := \int_{\phi} f(x, y, z) \, d\sigma := \iint_D f(\phi(u, v)) |N_{\phi}(u, v)| \, dudv$.

Si prova che, se ψ è un'altra rappresentazione parametrica regolare dello stesso sostegno Σ , risulta $\int_{\psi} f \, d\sigma = \int_{\phi} f \, d\sigma$. Pertanto spesso si scrive $\int_{\Sigma} f \, d\sigma$ in luogo di $\int_{\phi} f \, d\sigma$.

Esempio E3.1. Calcoliamo l' $\int_{\Sigma} \frac{z}{1+x^2} \, d\sigma$, dove Σ è il triangolo con vertici nei punti $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$.

Il piano contenente Σ ha equazione $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$, ossia $z = 3(1 - x - \frac{1}{2}y)$, cosicché Σ è parametrizzata da $\phi \equiv (x, y, 3(1 - x - \frac{1}{2}y))$, su $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 - 2x\}$. Si calcola allora $N_{\phi} \equiv (3, \frac{3}{2}, 1)$, $|N_{\phi}| = \frac{7}{2}$ e $\int_{\Sigma} \frac{z}{1+x^2} \, d\sigma = \dots = \frac{21}{4} \iint_D \frac{2-2x-y}{1+x^2} \, dx dy = \dots = \frac{21}{2}(1 - \log 2)$.



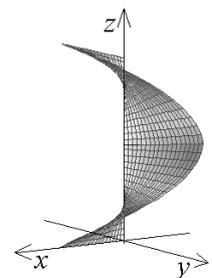
Riportiamo qui di seguito alcune applicazioni del concetto di integrale superficiale.

-) Ricordando la definizione di area di una superficie, si vede che $\mathcal{A}(\Sigma) = \int_{\Sigma} d\sigma$.
-) Supponiamo che la superficie Σ simuli una lamina materiale che nel punto (x, y, z) ha densità superficiale di massa data da $\delta(x, y, z)$. La massa totale della lamina sarà allora $M(\Sigma) = \int_{\Sigma} \delta(x, y, z) \, d\sigma$. Inoltre il *baricentro fisico* (o *centro di massa*) della superficie Σ è il punto avente coordinate $\bar{x} = \frac{1}{M(\Sigma)} \int_{\Sigma} x \delta(x, y, z) \, d\sigma$, $\bar{y} = \frac{1}{M(\Sigma)} \int_{\Sigma} y \delta(x, y, z) \, d\sigma$, $\bar{z} = \frac{1}{M(\Sigma)} \int_{\Sigma} z \delta(x, y, z) \, d\sigma$. Da notare che, se δ è costante, allora $M(\Sigma) = \delta \mathcal{A}(\Sigma)$, ed inoltre $\bar{x} = \frac{1}{\mathcal{A}(\Sigma)} \int_{\Sigma} x \, d\sigma$, $\bar{y} = \frac{1}{\mathcal{A}(\Sigma)} \int_{\Sigma} y \, d\sigma$, $\bar{z} = \frac{1}{\mathcal{A}(\Sigma)} \int_{\Sigma} z \, d\sigma$, ossia il baricentro fisico coincide con il *baricentro geometrico* (o *centroide*).
-) Si chiama *momento d'inerzia* di Σ rispetto ad una assegnata retta r il numero $I_r = \int_{\Sigma} d^2((x, y, z), r) \delta(x, y, z) \, d\sigma$, dove $d((x, y, z), r)$ è la distanza fra il punto (x, y, z) e la retta r . Se ad esempio r è l'asse z e $\delta = 1$, si pone $I_z = \int_{\Sigma} (x^2 + y^2) \, d\sigma$.

Esempio E3.2. Calcoliamo il momento d'inerzia rispetto all'asse z della striscia elicoidale rappresentata da $\phi \equiv (u \cos v, u \sin v, v)$, con $(u, v) \in D = [0, 1] \times [0, 2\pi]$.

Si calcola, $\forall (u, v) \in D$, $|N_{\phi}(u, v)| = \sqrt{u^2 + 1}$, cosicché:

$$I_z = \int_{\phi} (x^2 + y^2) \, ds = \iint_D u^2 \sqrt{u^2 + 1} \, dudv = 2\pi \int_0^1 u^2 \sqrt{u^2 + 1} \, du = \langle \text{ponendo } t = \sqrt{u^2 + 1} - u \rangle = \frac{\pi}{8} \int_{\sqrt{2}-1}^1 \frac{(t^4-1)^2}{t^5} \, dt = \dots$$



-) Gli integrali di superficie si possono definire anche per i campi vettoriali.

Definizione E3.2. Sia D un dominio regolare internamente connesso di \mathbb{R}^2 e sia $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare, con sostegno $\Sigma = \phi(D)$. Dato il campo vettoriale $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ continuo, si chiama *flusso di F attraverso ϕ* (nel verso di ν_ϕ) il numero $\int_\phi F \cdot \nu_\phi \, d\sigma := \iint_D F(\phi(u,v)) \cdot N_\phi(u,v) \, dudv$ ⁽¹⁾.

Si può provare che, se ψ è un'altra rappresentazione regolare dello stesso sostegno Σ , allora $\int_\psi F \cdot \nu_\psi \, d\sigma = \pm \int_\phi F \cdot \nu_\phi \, d\sigma$, dove va preso il segno $+$ o il segno $-$ a seconda che nei punti di Σ risulti $\nu_\psi = \nu_\phi$ oppure $\nu_\psi = -\nu_\phi$. Pertanto ha senso considerare l' $\int_\Sigma F \cdot \nu \, d\sigma$, a patto che sia specificato il verso in cui va orientato il versore normale ν .

Esempio E3.3. Calcoliamo il flusso del campo $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ attraverso il rettangolo di vertici $(-1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, orientato in modo che il versore normale sia rivolto verso l'alto.

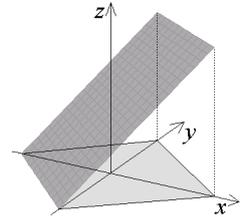
Il rettangolo è parametrizzato da $\phi \equiv (x, y, \frac{1}{2}(x+y+1))$,

su $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x+y \leq 1, -1 \leq x-y \leq 1\}$. Poiché

$N_\phi(x, y) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$, il versore ν_ϕ è rivolto verso l'alto.

Si calcola: $\int_\phi F \cdot \nu_\phi \, d\sigma = \dots = -\frac{1}{4} \iint_D [(x+y) + (x-y)^2] \, dx dy =$

$\langle \text{ponendo } u = x+y \text{ e } v = x-y \rangle = -\frac{1}{8} \iint_{[-1,1]^2} (u+v^2) \, dudv = \dots = -\frac{1}{6}$.



Esempio E3.4. La carica elettrica q posta nell'origine degli assi cartesiani genera un campo elettrico che nel punto P vale $F(P) = kq \frac{P}{|P|^3}$.

Indicata con Σ_r la superficie sferica di raggio r centrata nell'origine e detto ν_e il versore normale a Σ_r orientato verso l'esterno, si calcola $\int_{\Sigma_r} F \cdot \nu_e \, d\sigma = \int_{\Sigma_r} kq \frac{P}{|P|^3} \cdot \frac{P}{|P|} \, d\sigma = kq \int_{\Sigma_r} \frac{1}{|P|^2} \, d\sigma = \frac{kq}{r^2} \int_{\Sigma_r} d\sigma = \frac{kq}{r^2} \mathcal{A}(\Sigma) = 4k\pi q$. Si noti che il risultato non dipende da r .

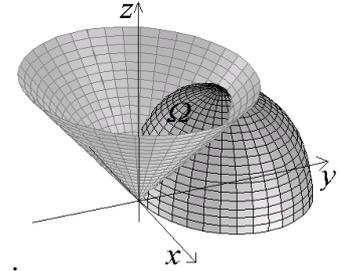
-) Spesso si parla anche di flusso uscente o di flusso entrante attraverso la frontiera di un dominio regolare di \mathbb{R}^3 . Per *dominio regolare* di \mathbb{R}^3 intendiamo un dominio di \mathbb{R}^3 che sia l'unione di un numero finito di domini normali di \mathbb{R}^3 a due a due essenzialmente disgiunti e determinati da funzioni definite su domini regolari di \mathbb{R}^2 ed ivi di classe C^1 . Qui ci limiteremo a considerare quei domini regolari di \mathbb{R}^3 la cui frontiera è l'unione dei sostegni di un numero finito di superfici regolari.

Se F è un campo vettoriale continuo sulla frontiera del dominio regolare Ω , si chiama *flusso di F uscente da Ω* il numero $\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu_e \, d\sigma = \sum_{k=1}^n \int_{\Sigma_k} F \cdot \nu_e \, d\sigma$, dove ν_e è il versore normale orientato verso l'esterno di Ω e $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ sono le superfici regolari nelle quali si decompone $\partial\Omega$. Se invece si utilizza il versore normale ν_i orientato verso l'interno di Ω , si ottiene il *flusso di F entrante in Ω* , ed è ovviamente $\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu_i \, d\sigma = - \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu_e \, d\sigma$.

⁽¹⁾ In certi contesti si usa anche il simbolo $\int_\phi F_1 \, dy \wedge dz + F_2 \, dz \wedge dx + F_3 \, dx \wedge dy$, dove l'espressione sotto integrale è detta *forma differenziale bilineare* associata al campo $F = (F_1, F_2, F_3)$.

Esempio E3.5. Calcoliamo il flusso del campo $F(x, y, z) = (z, yz, x)$ uscente dal dominio $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2y - x^2 - y^2}\}$.

Si vede che $\partial\Omega = \Sigma_c \cup \Sigma_s$, dove Σ_c è la superficie conica rappresentata da $\phi \equiv (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$, e Σ_s è la superficie sferica rappresentata da $\psi \equiv (x, y, \sqrt{2y - x^2 - y^2})$, entrambe su $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - y \leq 0\}$.



Trascureremo il fatto che ϕ e ψ non sono propriamente

superfici regolari come da Definizione E1.1, anche in considerazione

del fatto che la nozione di flusso poteva essere data sotto condizioni meno restrittive.

Si ha che $N_\phi(x, y) = (-x/\sqrt{x^2 + y^2}, -y/\sqrt{x^2 + y^2}, 1)$, orientato verso l'interno di Ω , e

$N_\psi(x, y) = (x/\sqrt{2y - x^2 - y^2}, (y - 1)/\sqrt{2y - x^2 - y^2}, 1)$, orientato verso l'esterno di Ω .

Pertanto: $\int_{\Sigma_c} F \cdot \nu_e d\sigma = -\int_\phi F \cdot \nu_\phi d\sigma = \dots = \iint_D y^2 dx dy$ e $\int_{\Sigma_s} F \cdot \nu_e d\sigma = \int_\psi F \cdot \nu_\psi d\sigma = \dots = \iint_D (2x + y^2 - y) dx dy = \langle \text{per ragioni di simmetria} \rangle = \iint_D (y^2 - y) dx dy$.

Infine $\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu_e d\sigma = \int_{\Sigma_c} F \cdot \nu_e d\sigma + \int_{\Sigma_s} F \cdot \nu_e d\sigma = \iint_D (2y^2 - y) dx dy = \dots = \frac{\pi}{32}$.

Esempio E3.6. Calcoliamo il flusso del campo $F(x, y, z) = (xy, 0, z^2)$ uscente da Ω , dove Ω è il cilindro compreso fra i piani $z = 0$ e $z = 2$ e la cui superficie laterale è quella che si sviluppa sulla curva γ di equazione polare $\rho = \text{sen } 2\vartheta$, con $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$.

-) Si ha $\partial\Omega = \Sigma_l \cup \Sigma_\alpha \cup \Sigma_\beta$, dove Σ_l è la superficie laterale di Ω , mentre Σ_α e Σ_β sono le facce rispettivamente inferiore e superiore di Ω .

-) Σ_l è parametrizzata da $\phi \equiv (2 \text{sen } u \cos^2 u, 2 \text{sen}^2 u \cos u, v)$,

su $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2\}$. Si calcola

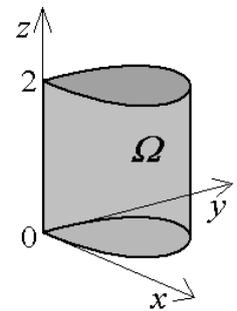
$N_\phi \equiv (4 \text{sen } u \cos^2 u - 2 \text{sen}^3 u, 4 \text{sen}^2 u \cos u - 2 \cos^3 u, 0)$; in particolare risulta $N_\phi(\frac{\pi}{4}, 1) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, cosicché il versore normale ν_ϕ nel punto $\phi(\frac{\pi}{4}, 1)$ e, per continuità, in tutti i punti di Σ_l , è

orientato verso l'esterno di Ω . Si calcola: $\int_{\Sigma_l} F \cdot \nu_e d\sigma = \int_\phi F \cdot \nu_\phi d\sigma = 8 \iint_D (2 \text{sen}^4 u - 5 \text{sen}^6 u + 3 \text{sen}^8 u) \cos u du dv = \dots = \frac{32}{105}$.

-) Σ_α è parametrizzata da $\psi \equiv (x, y, 0)$, $(x, y) \in T$, dove T è il dominio di \mathbb{R}^2 delimitato da γ . Poiché $\nu_\psi = (0, 0, 1) = -\nu_e$, si ha $\int_{\Sigma_\alpha} F \cdot \nu_e d\sigma = -\int_\psi F \cdot \nu_\psi d\sigma = -\iint_T 0 dx dy = 0$.

-) Σ_β è parametrizzata da $\chi \equiv (x, y, 2)$, $(x, y) \in T$. Osservato che $\nu_\chi = (0, 0, 1) = \nu_e$ e che T è descritto in coordinate polari dalle condizioni $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq \text{sen } 2\vartheta$, si calcola $\int_{\Sigma_\beta} F \cdot \nu_e d\sigma = \int_\chi F \cdot \nu_\chi d\sigma = 4 \iint_T dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{\text{sen } 2\vartheta} \rho d\rho = \dots = \frac{\pi}{2}$.

-) Si conclude che $\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu_e d\sigma = \int_{\Sigma_l} F \cdot \nu_e d\sigma + \int_{\Sigma_\alpha} F \cdot \nu_e d\sigma + \int_{\Sigma_\beta} F \cdot \nu_e d\sigma = \frac{32}{105} + \frac{\pi}{2}$.



Il calcolo del flusso dei due esempi precedenti sarà rifatto tra poco, subito dopo aver trattato il teorema della divergenza, il quale consente, in certe condizioni, di trasformare un integrale superficiale in un integrale triplo.

Teorema E3.1 (della divergenza). *Dati il dominio regolare Ω di \mathbb{R}^3 ed il campo vettoriale $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $F \in C^1(\Omega)$, si ha che:*

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu_e \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx dy dz.$$

Dim. Ci limiteremo al caso particolare in cui il dominio regolare Ω sia un insieme normale rispetto a ciascuno dei tre piani coordinati.

Posto $F = (F_1, F_2, F_3)$, introduciamo i campi vettoriali $R = (F_1, 0, 0)$, $S = (0, F_2, 0)$, $T = (0, 0, F_3)$ e, osservato che $F = R + S + T$, esplicitiamo i due integrali nella tesi rispettivamente nei seguenti modi:

$$\int_{\partial\Omega} R \cdot \nu_e \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} S \cdot \nu_e \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} T \cdot \nu_e \, d\sigma; \\ \iiint_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) \, dx dy dz + \iiint_{\Omega} \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) \, dx dy dz + \iiint_{\Omega} \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z) \, dx dy dz.$$

Proveremo ora che sono uguali fra loro i due terzi addendi; le uguaglianze fra i due primi addendi e fra i due secondi addendi si proverebbero in modo analogo.

Per i terzi addendi si sfrutta il fatto che Ω può essere rappresentato nel seguente modo: $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$, dove D è un dominio regolare di \mathbb{R}^2 ed $\alpha, \beta \in C^1(D)$ con $\alpha \leq \beta$.

Si vede allora che $\partial\Omega = \Sigma_\alpha \cup \Sigma_\beta \cup \Sigma_l$, dove: Σ_α è rappresentata da $\phi \equiv (x, y, \alpha(x, y))$, con $(x, y) \in D$, e risulta $N_\phi(x, y) = (-\alpha_x(x, y), -\alpha_y(x, y), 1)$ rivolto verso l'interno di Ω ; Σ_β è rappresentata da $\psi \equiv (x, y, \beta(x, y))$, con $(x, y) \in D$, e risulta $N_\psi(x, y) = (-\beta_x(x, y), -\beta_y(x, y), 1)$ rivolto verso l'esterno di Ω ; infine Σ_l è formata da superfici cilindriche nei cui punti il versore normale è parallelo al piano xy .

Si ha: $\int_{\partial\Omega} T \cdot \nu_e \, d\sigma = \int_{\Sigma_\alpha} T \cdot \nu_e \, d\sigma + \int_{\Sigma_\beta} T \cdot \nu_e \, d\sigma + \int_{\Sigma_l} T \cdot \nu_e \, d\sigma = -\iint_D F_3(x, y, \alpha(x, y)) \, dx dy + \iint_D F_3(x, y, \beta(x, y)) \, dx dy = \iint_D [F_3(x, y, \beta(x, y)) - F_3(x, y, \alpha(x, y))] \, dx dy;$
e d'altra parte risulta: $\iiint_{\Omega} \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_D \, dx dy \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z) \, dz = \iint_D [F_3(x, y, z)]_{z=\alpha(x, y)}^{z=\beta(x, y)} \, dx dy = \iint_D [F_3(x, y, \beta(x, y)) - F_3(x, y, \alpha(x, y))] \, dx dy \blacksquare$

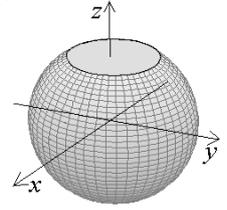
Esempio E3.7. Calcoliamo nuovamente il flusso degli Esempi E3.5 ed E3.6 utilizzando il teorema della divergenza.

Riguardo all'Esempio E3.5, dove $F(x, y, z) = (z, yz, x)$ e $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2y - x^2 - y^2}\}$, con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - y \leq 0\}$, si calcola: $\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu_e \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{\Omega} z \, dx dy dz = \iint_D \, dx dy \int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^{\sqrt{2y - x^2 - y^2}} z \, dz = \iint_D (y - x^2 - y^2) \, dx dy = \dots = \frac{\pi}{32}.$

Per l'Esempio E3.6, dove $F(x, y, z) = (xy, 0, z^2)$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in T, 0 \leq z \leq 2\}$ e T è individuato dalle condizioni polari $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq \operatorname{sen} 2\vartheta$, si ha: $\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu_e \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{\Omega} (y + 2z) \, dx dy dz = \iint_T \, dx dy \int_0^2 (y + 2z) \, dz = \iint_T (2y + 4) \, dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \, d\vartheta \int_0^{\operatorname{sen} 2\vartheta} (2\rho^2 \operatorname{sen} \vartheta + 4\rho) \, d\rho = \dots = \frac{32}{105} + \frac{\pi}{2}.$

Esempio E3.8. Calcoliamo il flusso del campo $F(x, y, z) = (2x^3z, x, -3x^2z^2)$ uscente attraverso la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq \frac{1}{2}\}$ ⁽¹⁾

Per poter applicare il teorema della divergenza, che in questo caso sarebbe particolarmente vantaggioso essendo $\operatorname{div} F = 0$, è necessario avere a che fare con una superficie chiusa. Allora uniamo a Σ il cerchio $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = \frac{1}{2}, x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}\}$, il cui bordo si salda con quello di Σ , e indichiamo con Ω il dominio avente per frontiera $\Sigma \cup \Pi$.



Osservato che $F \in C^1(\Omega)$, si ha che $\int_{\Sigma} F \cdot \nu_e d\sigma = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu_e d\sigma - \int_{\Pi} F \cdot \nu_e d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz - \int_{\Pi} F \cdot \nu_e d\sigma = - \int_{\Pi} F \cdot \nu_e d\sigma$.

Il cerchio Π è rappresentato da $\phi \equiv (x, y, \frac{1}{2})$ definita in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}\}$; e si riconosce che $\nu_{\phi}(x, y) = (0, 0, 1)$ è rivolto verso l'alto, ossia verso l'esterno di Ω .

Pertanto $\int_{\Sigma} F \cdot \nu_e d\sigma = - \int_{\phi} F \cdot \nu_{\phi} d\sigma = \frac{3}{4} \iint_D x^2 dx dy = \dots = \frac{27}{256} \pi$.

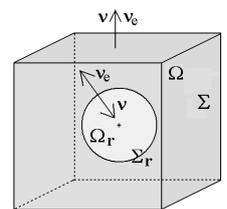
-) CAMPI INDIVERGENTI. Dal teorema della divergenza segue che, se un campo di classe C^1 è indivergente nell'aperto A di \mathbb{R}^3 , allora il suo flusso attraverso la frontiera di un dominio regolare contenuto in A è nullo. In particolare è nullo il flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa che delimiti un dominio regolare tutto contenuto in A ; e ciò equivale al fatto che il flusso attraverso una superficie aperta non cambia se questa è sostituita da una qualsiasi altra superficie che abbia lo stesso bordo, che abbia i versori normali rivolti dalla stessa parte, e che delimiti, insieme con la prima, un dominio regolare contenuto in A (come sostanzialmente è stato fatto nell'esempio precedente).

L'Esempio E3.4, riguardante il flusso del campo elettrico $F(P) = kq \frac{P}{|P|^3}$ attraverso la superficie sferica Σ_r , ci offre lo spunto per qualche riflessione sui campi che, come F , sono indivergenti nell'aperto $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Osserviamo anzitutto che qui il teorema della divergenza non può essere applicato, poiché F non ammette estensione di classe C^1 sulla sfera chiusa Ω_r delimitata da Σ_r ; tant'è che il flusso è stato trovato non nullo, uguale a $4k\pi q$.

Aggiungiamo che il flusso è lo stesso non solo per tutte le superfici sferiche centrate nell'origine, ma anche per qualsiasi altra superficie chiusa regolare a pezzi⁽²⁾ comprendente l'origine al suo interno. Infatti, se Σ è una tale superficie, considerato r tale che la sfera Ω_r sia interna al dominio Ω delimitato da Σ , posto $\Omega^* = \Omega \setminus \Omega_r^o$ ed osservato che $\partial\Omega^* = \Sigma \cup \Sigma_r$, risulta:

$\int_{\Sigma} F \cdot \nu_e d\sigma = \int_{\partial\Omega^*} F \cdot \nu d\sigma - \int_{\Sigma_r} F \cdot \nu d\sigma = \int_{\Sigma} F \cdot \nu_e d\sigma$, dove con ν s'è indicato, sui punti di Σ , il versore ν_e orientato verso l'esterno di Ω , e, sui punti di Σ_r , l'opposto del versore ν_e orientato verso l'esterno di Ω_r .



⁽¹⁾ Qui l'uso del termine "uscente" è improprio, dal momento che la superficie non è chiusa (diciamo che la superficie è *chiusa* se costituisce la frontiera di un dominio limitato di \mathbb{R}^3); tuttavia la forma della superficie è tale da renderne chiaro il significato.

⁽²⁾ Una applicazione $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, con D dominio internamente connesso di \mathbb{R}^2 , si dice *superficie regolare a pezzi* se è continua in D ed iniettiva in D^o e se D si decompone in un numero finito di domini internamente connessi e a due a due essenzialmente disgiunti tali che la restrizione di ϕ a ciascuno di essi sia una superficie regolare.

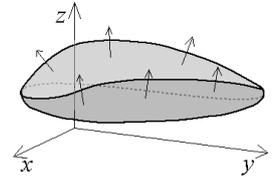
Va da sé che, se invece la superficie Σ non comprende l'origine al suo interno, nel senso che l'origine non appartiene ad Ω , allora il flusso attraverso Σ è nullo.

Tutto ciò è in accordo con il *teorema di Gauss* per i campi elettrici generati da una carica puntiforme, e rappresenta la situazione tipica di tutti i campi indivergenti in un qualsiasi aperto costituito da \mathbb{R}^3 privato di un punto.

-) CAMPI SOLENOIDALI. Pur non potendo entrare nei dettagli, riferiamo che un campo F continuo in un aperto A di \mathbb{R}^3 si dice *solenoidale* se è nullo il suo flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa regolare a pezzi con sostegno contenuto in A ; e aggiungiamo che ciò equivale ad affermare che il campo F è dotato di potenziale vettore, ossia che esiste un campo $G \in C^1(A)$ tale che $F = \text{rot } G$ ⁽¹⁾.

Ragionando in modo analogo a come è stato fatto per i campi indivergenti, si riconosce che la *proprietà qui enunciata relativamente al flusso attraverso le superfici chiuse equivale al fatto che il flusso attraverso una superficie aperta dipende solo dal bordo*, nel senso che, se due superfici aperte ϕ e ψ

hanno lo stesso bordo e sono concordemente orientate, allora $\int_{\phi} F \cdot \nu_{\phi} d\sigma = \int_{\psi} F \cdot \nu_{\psi} d\sigma$ (e più avanti vedremo, col teorema di Stokes, che il valore comune dei due flussi uguaglia la circuitazione di un qualsiasi potenziale vettore del campo lungo il bordo comune delle superfici).



Da notare l'analogia con le caratteristiche dei campi conservativi, per i quali l'integrale lungo le curve chiuse è nullo e l'integrale lungo le curve aperte dipende solo dagli estremi (e precisamente è uguale alla differenza dei valori che in essi assume un qualsiasi potenziale scalare del campo).

Un campo vettoriale solenoidale di classe C^1 nell'aperto A è necessariamente indivergente. La dimostrazione è banale se il campo F ammette un potenziale vettore $G \in C^2(A)$, dato che per esso risulta, com'è noto, $\text{div rot } G = 0$. Nel caso generale la dimostrazione si può fare per assurdo utilizzando il teorema della divergenza: se in un punto P_0 risultasse $\text{div} F(P_0) \neq 0$, ad esempio $\text{div} F(P_0) > 0$, allora si avrebbe $\text{div} F(P) > 0 \forall P \in \Omega$, dove Ω è una sferetta contenuta in A , e da ciò seguirebbe che $\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu_e d\sigma = \iiint_{\Omega} \text{div} F(x, y, z) dx dy dz > 0$, in contrasto con l'ipotesi.

Quanto all'implicazione inversa, l'Esempio E3.4, dove appunto il campo è indivergente, dimostra che essa non sussiste in generale. *Essa tuttavia sussiste, come segue banalmente in virtù di quanto osservato sui campi indivergenti, se si aggiunge l'ipotesi che l'aperto A sia a connessione superficiale semplice*, tale cioè che il dominio delimitato da una qualsiasi superficie chiusa regolare a pezzi contenuta in A è anch'esso tutto contenuto in A . Si riconosce che l'aperto costituito da \mathbb{R}^3 privato di un punto non è a connessione superficiale semplice. Lo è invece l'aperto costituito da \mathbb{R}^3 privato di una retta; ne segue che ogni campo indivergente in un tale aperto risulta in esso anche solenoidale. Un esempio concreto di questo tipo è rappresentato dal campo magnetico generato da una corrente elettrica rettilinea.

⁽¹⁾ Dall'essere G derivabile con $\text{rot } G \in C^0(A)$ non segue necessariamente che $G \in C^1(A)$.

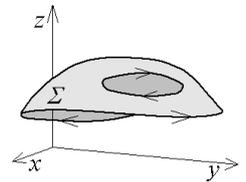
E4. Superfici regolari fino al bordo e formula di Stokes

Allo scopo di trattare il teorema di Stokes, è necessario precisare il concetto di bordo di una superficie e stabilire un criterio per la sua orientazione.

Definizione E4.1. Sia D un dominio internamente connesso di \mathbb{R}^2 . Una superficie regolare $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice regolare fino al bordo se ϕ è iniettiva in tutto D e se in tutti i punti $(u,v) \in D$ la matrice $D\phi(u,v)$ ha rango 2. Il bordo di ϕ è l'insieme $\partial\phi := \phi(\partial D)$.

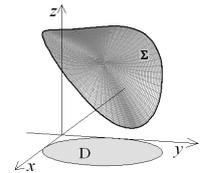
Si può provare che, se ψ è un'altra superficie regolare fino al bordo, avente lo stesso sostegno Σ di ϕ , allora il bordo di ψ coincide con quello di ϕ . Per questo motivo è lecito parlare del bordo di Σ piuttosto che del bordo di ϕ ; e si può anche utilizzare al riguardo il simbolo $\partial\Sigma$, se il contesto è tale che non ci si possa confondere con la frontiera di Σ .

Se, come spesso accade, D è un dominio regolare e ∂D è l'unione dei sostegni di un numero finito di curve semplici, chiuse e regolari a tratti, a causa delle proprietà di ϕ anche $\partial\phi$ è l'unione dei sostegni di un numero finito di curve semplici, chiuse e regolari a tratti, che “delimitano” il sostegno Σ di ϕ .



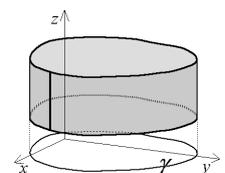
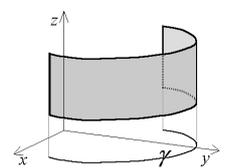
Ricordiamo che ∂D^+ indica la frontiera di D intesa con l'orientazione convenzionalmente assunta come positiva. A questa orientazione su ∂D si associa una orientazione su $\partial\phi$, che pure chiameremo positiva: l'orientazione positiva di $\partial\phi$ (o di una sua parte) è quella indottavi dalla parametrizzazione $\phi \circ \gamma$, dove γ è una qualunque rappresentazione parametrica regolare di ∂D^+ (o di una sua parte). Il bordo di ϕ preso con questa orientazione verrà indicato con $\partial^+\phi$.

Esempio E4.1. Regolare fino al bordo è la superficie cartesiana $\phi \equiv (x, y, g(x, y))$, con $(x, y) \in D$, se D è un dominio internamente connesso di \mathbb{R}^2 e $g \in C^1(D)$. Il bordo di ϕ è la parte del grafico di g che si proietta su ∂D .



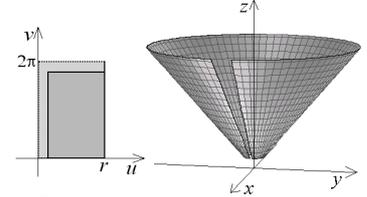
Esempio E4.2. La superficie cilindrica $\phi \equiv (\gamma_1(u), \gamma_2(u), v)$, con $(u,v) \in D = [a, b] \times [h, k]$, è regolare fino al bordo se la curva $\gamma \equiv (\gamma_1(u), \gamma_2(u))$, $u \in [a, b]$, è aperta, semplice, regolare e tale che, $\forall u \in [a, b]$, $\gamma'(u) \neq (0, 0)$.

Da notare che, se γ è chiusa, i lati sinistro e destro del rettangolo D vengono trasformati dall'applicazione ϕ in una medesima generatrice del sostegno Σ , e l'insieme $\phi(\partial D)$, costituito dalle due direttrici estreme e dalla generatrice suddetta, non merita di essere considerato un vero e proprio bordo.



Esempio E4.3. La superficie conica $\phi \equiv (u \cos v, u \sin v, ku)$, $(u, v) \in D = [0, r] \times [0, 2\pi]$, con $r, k \in \mathbb{R}^+$, non è regolare fino al bordo. Si riconosce infatti che, quando ∂D viene descritto dal punto (u, v) , il punto $\phi(u, v)$, che percorre $\phi(\partial D)$, staziona nel vertice $(0, 0, 0)$ finché (u, v) scorre sul lato $u = 0$; ed inoltre la generatrice $\phi(v=0) = \phi(v=2\pi)$ viene percorsa due volte. Per giunta il vettore $N_\phi(u, v)$ è nullo se $u = 0$.

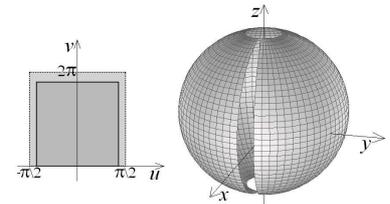
Invece la restrizione di ϕ a $[r_1, r] \times [0, \alpha]$, con $0 < r_1 < r$ e $0 < \alpha < 2\pi$, è una superficie regolare fino al bordo, il cui sostegno è un tronco di cono privato di una striscia compresa fra due generatrici.



Notiamo infine che, stando alla Definizione E4.1, la restrizione di ϕ all'insieme $[r_1, r] \times [0, 2\pi]$, che ha per sostegno la superficie laterale di un intero tronco di cono, non è regolare fino al bordo, mentre lo è l'applicazione $\psi \equiv (x, y, k\sqrt{x^2 + y^2})$, con $r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r^2$, che ha il medesimo sostegno. Questo dimostra che la proprietà, per una superficie regolare, di essere o non essere regolare fino al bordo non dipende dal sostegno ma dalla applicazione con cui esso viene parametrizzato.

Esempio E4.4. La superficie sferica $\phi \equiv (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u)$, $(u, v) \in D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$, non è regolare fino al bordo. Infatti il punto $\phi(u, v)$ staziona sui poli $(0, 0, -r)$ e $(0, 0, r)$ quando (u, v) scorre rispettivamente sui segmenti $u = -\frac{\pi}{2}$ e $u = \frac{\pi}{2}$ di ∂D ; inoltre il meridiano $\phi(v=0) = \phi(v=2\pi)$ viene percorso due volte; per giunta risulta $N_\phi(u, v) = 0$ se $u = \pm \frac{\pi}{2}$.

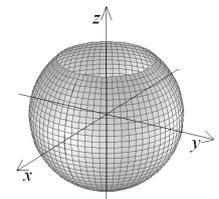
Invece la restrizione di ϕ a $[-\alpha, \alpha] \times [0, \beta]$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $0 < \beta < 2\pi$, è una superficie regolare fino al bordo.



Si può dimostrare che non esiste una rappresentazione parametrica dell'intera superficie sferica che risulti regolare fino al bordo.

La superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq \frac{1}{2}\}$ dell'Esempio E3.8, se viene parametrizzata da $\phi \equiv (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$, con $(u, v) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}] \times [0, 2\pi]$, non è una superficie regolare fino al bordo. Lo è invece se viene parametrizzata mediante la cosiddetta "rappresentazione stereografica",

$\psi \equiv (\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1})$, su $T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 + v^2 \leq 3\}$; poiché ∂T è parametrizzata da $\gamma \equiv \begin{cases} u = \sqrt{3} \cos t \\ v = \sqrt{3} \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$, il bordo $\partial\psi$ è parametrizzato da $\tilde{\gamma} = \psi \circ \gamma \equiv (\frac{\sqrt{3}}{2} \cos t, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t, \frac{1}{2}), t \in [0, 2\pi]$.

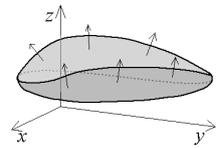


Il teorema che segue stabilisce che la circuitazione di un campo di classe C^1 lungo il bordo di una superficie è uguale al flusso del rotore del campo attraverso la superficie.

Teorema E4.1 (di Stokes). Siano D un dominio regolare intern/te connesso di \mathbb{R}^2 e $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare fino al bordo. Dato il campo vettoriale $F \in C^1(A)$, con A aperto di \mathbb{R}^3 contenente il sostegno di ϕ , si ha che $\int_{\partial+\phi} F \cdot \tau \, ds = \int_\phi \text{rot} F \cdot \nu_\phi \, ds$.

Osservazione E4.1. Dal teorema discende che, se il campo F è irrotazionale nell'aperto A , allora il suo integrale lungo il bordo di una qualsiasi superficie regolare con sostegno contenuto in A è nullo; se in più l'aperto A è semplicemente connesso, allora il campo F è conservativo in A (pur senza entrare nei dettagli, osserviamo che ciò discende essenzialmente dal fatto che, a causa della connessione lineare semplice, ogni curva semplice, chiusa e regolare a tratti con sostegno contenuto in A rappresenta il bordo di una superficie regolare a pezzi con sostegno contenuto in A).

Osservazione E4.2. Il teorema di Stokes consente anche di riaffermare una osservazione fatta a proposito del flusso di un campo solenoidale attraverso una superficie aperta. A tale scopo conviene riscrivere la formula di Stokes scambiandone i membri e usando la lettera G in luogo della F , in modo che questa sia utilizzata per indicare $\text{rot } G$. Si ottiene allora l'uguaglianza $\int_{\phi} F \cdot \nu_{\phi} \, d\sigma = \int_{\partial^+\phi} G \cdot \tau \, ds$, dove F è un campo solenoidale di cui G è un potenziale vettore.



Essa esprime il fatto che: il flusso di un campo solenoidale attraverso una superficie è uguale alla circuitazione lungo il bordo di un potenziale vettore del campo, e quindi esso non cambia se la superficie è sostituita da una qualsiasi altra superficie che abbia lo stesso bordo e sia concordemente orientata.

Osserviamo ancora che l'uguaglianza in oggetto è analoga a quella che riguarda l'integrale curvilineo di un campo conservativo invece che il flusso di un campo solenoidale: $\int_{\gamma} F \cdot \tau \, ds = \varphi(Q) - \varphi(P)$, dove γ è una curva di estremi P e Q contenuta in un aperto A di \mathbb{R}^3 e F è appunto un campo conservativo in A di cui φ è un potenziale scalare.

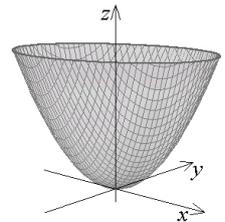
Esempio E4.5. Dato il campo vettoriale $F(x, y, z) = (x^2z, y, yz)$ e data la superficie

$$\phi \equiv \begin{cases} x = u - v \\ y = u \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}, \text{ su } D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 + v^2 \leq 1\}, \text{ calcoliamo l' } \int_{\partial^+\phi} F \cdot \tau \, ds.$$

Poiché ∂D^+ è rappresentata da $\gamma \equiv \begin{cases} u = \cos t \\ v = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$,

allora per rappresentare $\partial^+\phi$ si può assumere l'applicazione

$$\tilde{\gamma} = \phi \circ \gamma \equiv \begin{cases} x = \cos t - \sin t \\ y = \cos t \\ z = 1 \end{cases}, t \in [0, 2\pi]. \text{ Si calcola quindi}$$



$$\int_{\partial^+\phi} F \cdot \tau \, ds = \int_{\tilde{\gamma}} x^2z \, dx + y \, dy + yz \, dz = \int_0^{2\pi} [(2 \sin^2 t - \sin t - 1) \cos t + (2 \cos^2 t - 1) \sin t] \, dt = \dots = 0 \text{ (ciascuno dei due addendi ha primitive } 2\pi\text{-periodiche).}$$

Rifacciamo il calcolo usando la formula di Stokes.

Osservato che $\text{rot} F(x, y, z) = (z, x^2, 0)$ e che $N_{\phi}(u, v) = (2v, -2(u+v), 1)$, si calcola:

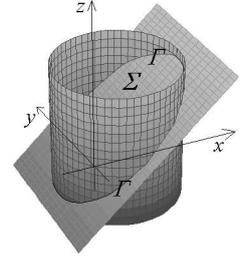
$$\int_{\partial^+\phi} F \cdot \tau \, ds = \int_{\phi} \text{rot} F \cdot \nu_{\phi} \, d\sigma = 2 \iint_D (-u^2 + v^2 + 2uv) u \, du \, dv = 0 \text{ (invero, posto } f(u, v) = (-u^2 + v^2 + 2uv)u, \text{ si vede che } (u, v) \in D \Rightarrow (-u, -v) \in D \text{ ed inoltre } f(-u, -v) = -f(u, v)).$$

Notiamo che $\partial\phi$ è il bordo non solo della superficie ϕ ma anche ad esempio della superficie piana $\psi \equiv (u - v, u, 1), (u, v) \in D$; risulta anzi $\partial^+\phi = \partial^+\psi$, essendo $\phi \circ \gamma = \psi \circ \gamma$. Si ha che $N_{\psi}(u, v) = (0, 0, 1)$ e $\int_{\partial^+\phi} F \cdot \tau \, ds = \int_{\partial^+\psi} F \cdot \tau \, ds = \int_{\psi} \text{rot} F \cdot \nu_{\psi} \, d\sigma = \iint_D 0 \, du \, dv = 0$.

Esempio E4.6. Calcoliamo la circuitazione del campo $F(x, y, z) = (z^2, 1, -xy)$ lungo la curva $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 2x + 3, (x-1)^2 + y^2 = 4\}$.

La curva Γ è parametrizzata da $\gamma \equiv \begin{cases} x = 1 + 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \\ z = 5 + 4 \cos t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$.

Assumendo su Γ il verso indottovi dall'applicazione γ , si calcola $\int_{\Gamma} F \cdot \tau ds = \int_{\gamma} z^2 dx + dy - xy dz = \dots = 2 \int_0^{2\pi} [(8 \sin^2 t + 1) \cos t - (16 \cos^2 t + 40 \cos t + 25) \sin t + 4 \sin^2 t] dt = \dots = 8\pi$.

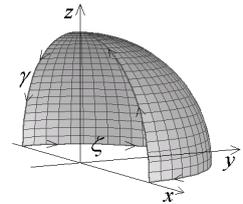


Volendo invece usare la formula di Stokes, si osserva che la curva Γ è il bordo della superficie $\phi \equiv (x, y, 2x + 3), (x, y) \in D$, dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$. Si calcola che $N_{\phi}(x, y) = (-2, 0, 1)$, e che $\text{rot}F(x, y, z) = (-x, y + 2z, 0)$. Pertanto, assumendo su Γ l'orientazione di $\partial^+ \phi$, si ha: $\int_{\Gamma} F \cdot \tau ds = \int_{\partial^+ \phi} F \cdot \tau ds = \int_{\phi} \text{rot}F \cdot \nu_{\phi} d\sigma = \iint_D 2x dx dy = \dots = 8\pi$.

Esempio E4.7. Calcoliamo la circuitazione del campo $F(x, y, z) = (1, xy^2, -xz)$ lungo il bordo della superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1, y, z \geq 0\}$.

Il bordo di Σ è l'unione delle semicirconferenze γ e ζ , dove $\gamma \equiv (\cos t, 0, \sin t), t \in [0, \pi]$, e $\zeta \equiv (-\cos t, \sin t, 0), t \in [0, \pi]$.

Assumendo su $\partial\Sigma$ il verso indotto dalle applicazioni γ e ζ , si calcola: $\int_{\partial\Sigma} F \cdot \tau ds = \int_{\gamma} dx + xy^2 dy - xz dz + \int_{\zeta} dx + xy^2 dy - xz dz = \dots = -\frac{2}{3} - \frac{\pi}{8}$.



Volendo invece applicare la formula di Stokes, calcoliamo $\text{rot}F(x, y, z) = (0, z, y^2)$, e osserviamo che la superficie Σ è parametrizzata da $\phi \equiv (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$, con $(u, v) \in D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$, e risulta $N_{\phi} \equiv (-\cos^2 u \cos v, -\cos^2 u \sin v, -\sin u \cos u)$. Trascureremo il fatto che ϕ non è propriamente una superficie regolare fino al bordo ($\forall v \in [0, \pi], \phi(\frac{\pi}{2}, v) = (0, 0, 1)$ e $D\phi(\frac{\pi}{2}, v)$ non ha rango 2), anche in considerazione del fatto che il teorema di Stokes poteva essere enunciato con ipotesi meno restrittive.

Pertanto, assumendo su $\partial\Sigma$ l'orientazione di $\partial^+ \phi$, si ha: $\int_{\partial\Sigma} F \cdot \tau ds = \int_{\partial^+ \phi} F \cdot \tau ds = \int_{\phi} \text{rot}F \cdot \nu_{\phi} d\sigma = \dots = -\iint_D (\cos^2 u \sin u \sin v + \cos^3 u \sin u \sin^2 v) dudv = \dots = -\frac{2}{3} - \frac{\pi}{8}$.

Oppure parametrizziamo Σ con l'applicazione $\psi \equiv (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$, su $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$. Si ha che $N_{\psi} \equiv (x/\sqrt{1 - x^2 - y^2}, y/\sqrt{1 - x^2 - y^2}, 1)$, e anche qui si trascura il fatto che manca la condizione (a) richiesta per la regolarità in Defin/ne E1.1 (la ψ non ha derivate nei punti della semicirconferenza $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$). Assumendo $\partial\Sigma$ orientata come $\partial^+ \psi$, si ha: $\int_{\partial\Sigma} F \cdot \tau ds = \int_{\partial^+ \psi} F \cdot \tau ds = \int_{\psi} \text{rot}F \cdot \nu_{\psi} d\sigma = \dots = \iint_T (y + y^2) dx dy = \dots = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{8}$.

Il fatto di aver ottenuto che $\int_{\partial^+ \psi} F \cdot \tau ds = -\int_{\partial^+ \phi} F \cdot \tau ds$ sta ad indicare che le rappresentazioni ϕ e ψ inducono su $\partial\Sigma$ due orientazioni tra loro opposte.

Esercizi

01. Calcolare l'area della frontiera dell'insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1 + y\}.$$

02. Calcolare l'area della superficie che si ottiene per rotazione attorno all'asse z della curva del piano xz avente equazione $x = \cosh z$, con $-1 \leq z \leq 1$.



03. Calcolare l'area della superficie che si ottiene per rotazione attorno all'asse z della curva $\gamma \equiv (\cos^3 t, 0, \sin^3 t)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

04. Calcolare l'area della superficie che si ottiene per rotazione attorno all'asse z della curva $\gamma \equiv (1 + \sqrt{2} \cos t, 0, 1 + \sqrt{2} \sin t)$, $t \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

05. Calcolare l'area della superficie che si ottiene per rotazione attorno all'asse x della curva $\gamma \equiv (2 \sin t, \sin 2t, 0)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

06. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z della porzione di superficie conica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ che si proietta sull'insieme B del piano xy individuato dalle condizioni polari $0 \leq \vartheta \leq \pi$ e $0 \leq \rho \leq \vartheta$.