

## **Valutare per competenze in Matematica e in Fisica**

**Roberto Capone**

### **Introduzione**

Nella società del *παντα ρει*, caratterizzata da rapidi mutamenti e fagocitata dalla tecnologia, la scuola deve darsi, ora più che mai, una identità nuova, adattando metodologie e mezzi per dare risposte alla sete di conoscenze che si manifesta attraverso atteggiamenti nuovi e inusitati.

La formazione dei docenti, in questo contesto, diventa di fondamentale rilevanza perché solo attraverso una "riforma dell'insegnamento si può condurre alla riforma di pensiero e la riforma di pensiero deve condurre a quella dell'insegnamento" (Morìn).

In quest'ottica si innestano gli incontri di formazione/aggiornamento rivolti ai docenti della Scuola Secondaria di Secondo grado promossi dalla Regione Campania nell'ambito del progetto PLS docenti.

### **Il quadro teorico e le metodologie**

In una riflessione estremamente interessante sul senso di fare educazione oggi, Edgar Morìn riprende tre ben noti aforismi rispettivamente di Eliot, Pascal e Montaigne:

*"Dov'è la conoscenza che perdiamo nell'informazione? Dov'è la saggezza che perdiamo nella conoscenza?"*

*"Dunque, poiché tutte le cose sono causate e causanti, aiutate ed adiuvanti, mediate ed immediate, e tutte sono legate da un vincolo naturale e insensibile che unisce le più lantane e le più disparate, ritengo che sia impossibile conoscere le parti senza conoscere il tutto, così come è impossibile conoscere il tutto senza conoscere il tutto?"*

*"E' meglio una testa ben fatta che una testa ben piena"*

I nostri studenti sono bombardati da informazioni continue che provengono dai mass-media; a queste spesso dobbiamo aggiungere la mole di informazioni che provengono dalla impostazione nozionistica della vecchia didattica trasmissiva ed enciclopedica che non si riesce a mandare in soffitta.

Le stesse tecnologie digitali, da un lato, garantiscono l'opportunità di estendere all'intero sistema formativo dei paesi sviluppati (dalla Scuola Primaria all'Università) un tipo di approccio learning by doing (Dewey) perché le tecnologie digitali "naturalmente" inducono a un metodo interattivo e sociale nell'accostarsi alla conoscenza (*Point; click and share*); gli alunni e gli studenti nativi digitali praticano spontaneamente fuori da scuola questo tipo di comportamenti attraverso social-network e strumenti di comunicazione istantanea cui accedono attraverso notebook, consolle per video giochi, smartphone.

D'altro canto, l'approccio digitale alla conoscenza, se non supportato da una didattica adeguata e veicolato attraverso metodologie al passo coi tempi, rischia di informare e non formare i nostri studenti, che, con un

clic soddisfano la curiosità del momento senza rendersi conto che quella informazione acquisita spesso non si traduce in conoscenza.

Ancora più arduo è il passaggio dalla conoscenza a quella che Eliot chiama saggezza e che noi potremmo tradurre col termine competenza.

Le *conoscenze* sono collegate al *sapere* e sono per lo più di natura dichiarativa. Esse comprendono i fatti e le idee acquisite dal soggetto in modo autonomo attraverso lo studio, la ricerca o l'esperienza. Una conoscenza rappresenta una rielaborazione di uno o più contenuti (Sbaragli). Potremmo fare una ulteriore precisazione sui termini conoscenza e sapere:

“per *saperi* si intendono i dati, i concetti, le procedure, i metodi che esistono al di fuori di ogni soggetto che conosce e che sono generalmente codificati in opere di riferimento, manuali, enciclopedie, dizionari;

le *conoscenze* sono indissociabili da un soggetto conoscente; non esiste cioè una conoscenza a personale; una persona che interiorizza un sapere *prendendone coscienza*, trasforma questo sapere in conoscenza” (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Santi, Sbaragli, 2009).

Le *abilità* sono invece di solito associate al *saper fare* o, come si dice in psicologia, a conoscenze di tipo procedurale.

La *competenza* può essere definita come un sistema coordinato di *conoscenze* e *abilità* che sono mobilitate dal soggetto in relazione ad uno scopo (un compito, un insieme di compiti o un'azione) che lo interessano e che favoriscono buone *disposizioni interne* motivazionali e affettive (Pellerey, 2003)

Come sostiene D'Amore (2000): «(Le competenze) non possono ridursi ad una sola disciplina; esse suppongono e creano delle connessioni tra conoscenze e suggeriscono nuovi usi e nuove padronanze, il che significa che “le competenze generano competenze”».

La scelta dei contenuti da proporre, deve vertere sull'obiettivo di sviluppare negli allievi quelle competenze di base indispensabili per una formazione culturale del cittadino che rispondono alle necessità etiche e sociali riconosciute e condivise come: porsi e risolvere problemi, progettare e costruire modelli di situazioni reali, esprimere adeguatamente informazioni, intuire e immaginare, creare collegamenti tra conoscenze diverse, ...”

L'idea è di fornire dei contenuti spendibili fuori dal mondo della scuola, nella vita quotidiana, da “cittadini” più che da “studenti” (Arzarello, Robutti, 2002): «Le competenze devono costituire un bagaglio (non tanto di nozioni, quanto delle abilità di risolvere situazioni problematiche, sapendo scegliere risorse, strategie e ragionamenti) per il cittadino»; si tratta quindi di individuare degli importanti contenuti che costituiscono il cuore fondante, il nucleo attorno al quale ruotano altri contenuti.

Oltre ai contenuti (*saperi*) all'interno della disciplina matematica, occorre saper gestire una loro rielaborazione cosciente e attiva, legata quindi alla motivazione e alla volizione, che ne permettano l'uso e l'interpretazione in situazioni problematiche e la padronanza di collegamenti tra contenuti diversi.

Quando l'allievo osa al di là delle consuetudini della vita d'aula, creando collegamenti tra conoscenze diverse, nasce l'idea del superamento della semplice conoscenza verso la competenza. (Sbaragli, 2011)

Le finalità educative assumono, nella scuola delle competenze, una rilevanza sociale: lo studente deve acquisire l'attitudine ad organizzare la conoscenza. Il docente ha la responsabilità non solo di una corretta acquisizione, da parte dello studente, dei saperi disciplinari ma anche quella di "insegnare" coinvolgendo aspetti emozionali e motivazionali. Ha, inoltre, il compito di "educare": e così la scuola diviene insegnamento della condizione umana, apprendistato alla vita, apprendistato all'incertezza, educazione alla cittadinanza europea e planetaria (Morin, 2000). Siamo di fronte a delle sfide educative importanti. La sfida è culturale: si confronta sapere umanistico (che affronta la riflessione sui fondamentali problemi umani e favorisce l'integrazione delle conoscenze) e la cultura tecnico-scientifico (che separa i campi, suscita straordinarie scoperte ma non una riflessione sul destino umano e sul divenire della scienza stessa). La sfida è civica: il sapere è diventato sempre più esoterico (accessibile ai soli specialisti) e anonimo (quantitativo e formalizzato). Si giunge così all'indebolimento del senso di responsabilità (poiché ciascuno tende ad essere responsabile solo del proprio compito specializzato) ed all'indebolimento della solidarietà (poiché ciascuno percepisce solo il legame organico con la propria città e i propri concittadini). Siamo cioè di fronte ad un deficit democratico. La sfida è sociologica: l'informazione è una materia che la conoscenza deve prima integrare e padroneggiare; la conoscenza deve essere costantemente rivisitata e riveduta dal pensiero; il pensiero è oggi più che mai il capitale più prezioso per l'individuo e la società.

Oltre ai contenuti (saperi) all'interno della disciplina matematica, occorre saper gestire una loro rielaborazione cosciente e attiva, legata quindi alla motivazione e alla volizione, che ne permettano l'uso e l'interpretazione in situazioni problematiche e la padronanza di collegamenti tra contenuti diversi.

Quando l'allievo osa al di là delle consuetudini della vita d'aula, creando collegamenti tra conoscenze diverse, nasce l'idea del superamento della semplice conoscenza verso la competenza. (Sbaragli, 2011)

La didattica per competenze mira al superamento del sapere parcellizzato, della multidisciplinarietà a favore della pluridisciplinarietà, cioè uno stesso argomento viene proposto dal punto di vista delle varie discipline attraverso una progettazione per ambiti disciplinari.

Il transfert delle conoscenze, in una didattica più polisopica per competenze si realizza attraverso una didattica che superi anche la pluridisciplinarietà attraverso l'interdisciplinarietà. Una didattica interdisciplinare può consistere in una semplice comunicazione di idee, nella individuazione di relazioni tra strutture disciplinari, nella reciproca integrazione dei concetti fondamentali, nella organizzazione comune della ricerca e dei metodi didattici (individuazione di obiettivi comuni, definizione di progetti unitari ecc.) (Barone). La vera rivoluzione didattica si può realizzare, però, solo attraverso una impostazione transdisciplinare. Per transdisciplinarietà, si suole designare la coordinazione complessa di tutte le discipline ed interdiscipline, poste anche a livello gerarchico diverso, per organizzare obiettivi comuni e definire schemi epistemologici in cui l'interazione di metodi e di contenuti si rivela indispensabile, e gli stessi risultati parziali risultano necessari per il conseguimento di una finalità comune. Per Mauro Laeng, il termine transdisciplinarietà designerebbe "l'interdisciplinarietà in senso forte" in quanto a questo livello si verifica "l'effettivo superamento di una barriera epistemologica con la scoperta di un nuovo orizzonte unificante". Ci

forniscono esempi di transdisciplinarietà la progressiva unificazione delle matematiche tra loro e con la logica, la cibernetica, la teoria dei sistemi, l'ecologia considerata come la scienza che studia il funzionamento normale e patologico dell'ambiente, , l'approccio sistemico alla realtà che prevede anche l'uso di uno specifico linguaggio "transdisciplinare".

L'idea costruttivista ben si lega alle idee esposte secondo una visione non più programmatica dei contenuti disciplinari quanto piuttosto paradigmatica.

L' apprendimento costruttivista si basa sulla partecipazione attiva degli studenti nel problem-solving e lo sviluppo di un pensiero critico per quanto riguarda un'attività di apprendimento che trovano motivante e coinvolgente. Gli studenti "costruiscono" le proprie conoscenze da idee di prova e approcci basati sulla loro conoscenza e esperienze precedenti applicando queste nuove situazioni, e integrando le nuove conoscenze acquisite con costrutti intellettuali preesistenti.

Il costruttivismo prende tre vie, che a volte si intersecano tra loro:

il situated learning o anchored learning che presuppone che la maggior parte dell' apprendimento è dipendente dal contesto, in modo che le esperienze cognitive situate in attività autentiche così come l'apprendimento basato su progetti (project-based learning);

gli apprendistati cognitivi (cognitive apprenticeships) o ambienti di apprendimento basati su casi che si traducono in esperienze di apprendimento più ricche e più significative;

la negoziazione sociale della conoscenza (social negotiation of knowledge) cioè un processo attraverso il quale gli studenti testano i loro costrutti cognitivi in un dialogo con gli altri individui e, più in generale, con la società più ampia. La collaborazione ha come obiettivo principale di attività di apprendimento la negoziazione e la verifica delle competenze.

La teoria dell'apprendimento situato afferma che la conoscenza non è un insieme di nozioni teoriche apprese, ma frutto di un processo dinamico, cioè della partecipazione attiva di un soggetto all'interno di un contesto, data dall'interazione con gli altri membri e la situazione circostante.

Ciò contrasta con quanto si fa tradizionalmente in classe, dove la conoscenza è solitamente presentata in forma astratta e slegata dal contesto. L'interazione sociale ha una grande importanza si entra a far parte di una *comunità di pratica* che ha come obiettivo la produzione di conoscenza, in modo da trasmettere convinzioni e comportamenti da acquisire. Quando i principianti o i nuovi arrivati si spostano dalla periferia al centro di questa comunità diventano più attivi e assumono il ruolo di esperti.

L'individuo, non apprende attraverso lezioni che trasmettono una quantità definita di conoscenze astratte che verranno poi assimilate e applicate in altri contesti, ma "impara facendo" (*learning by doing*). Questo è un modello di apprendimento che coinvolge la persona in situazioni di pratica reale, in cui dovrà assimilare nozioni in relazione all'azione che sta svolgendo; infatti

hanno un ruolo fondamentale in questo tipo di apprendimento l'improvvisazione, i casi reali d'interazione e i processi emergenti.

Caratteristica peculiare è la capacità di apprendere in rapporto alla capacità di svolgere dei compiti; l'apprendimento coinvolge l'intera persona in attività, compiti, funzioni che sono parte di sistemi di relazioni delle comunità sociali. Per imparare è necessario partecipare alle pratiche significative di una certa comunità, e nello stesso tempo contribuendo anche a definirle e a innovarle.

L'apprendimento è dunque un processo che avviene all'interno di una cornice partecipativa e non in un ambiente individuale; ed è quindi mediato dalle diverse prospettive dei copartecipanti (Lave, Wenger)

L'apprendimento situato si basa su tre principi fondamentali:

- la conoscenza è acquisita in modo situato e quindi trasferita solo in situazioni simili;
- l'apprendimento è il risultato di un processo sociale che comprende modi di pensare, di percepire, di risolvere i problemi, e interagisce con le conoscenze dichiarative e procedurali;
- l'apprendimento non è separato dal mondo dell'azione ma coesiste in un ambiente sociale complesso fatto di attori, azioni e situazioni.

Grazie a questi tre principi, l'apprendimento situato si differenzia da ogni altra forma di apprendimento esperienziale. Lo studente apprende i contenuti attraverso delle attività piuttosto che tramite l'acquisizione di informazioni in pacchetti discreti organizzati dall'insegnante

I compiti critici dell'insegnante sono:

- selezionare situazioni che impegnino lo studente in attività complesse, realistiche e centrate sul problema;
- fornire scaffolding ai nuovi studenti e quindi conoscere il tipo e l'intensità di guida necessarie per aiutarli a gestire la situazione ed il calo progressivo del supporto con l'acquisizione da parte dello studente di competenze addizionali;
- ridefinire il suo ruolo da trasmettitore a facilitatore dell'apprendimento sottolineando i progressi degli studenti, costruendo un ambiente di apprendimento collaborativo, incoraggiando la riflessione ed aiutando gli studenti a diventare più consapevoli della loro condotta in un certo contesto per facilitare il transfer;
- valutare continuamente la crescita intellettuale dei singoli individui e della comunità d'apprendimento

## **Le competenze chiave**

La Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio "Relativa a competenze chiave per l'apprendimento permanente" del 18 dicembre 2006 sollecita gli Stati membri perché "sviluppano l'offerta di competenze chiave per tutti nell'ambito delle loro strategie di apprendimento permanente".

La Raccomandazione indica anche le otto competenze chiave, una combinazione di conoscenze, abilità e attitudini appropriate al contesto: Comunicare nella lingua madre, Comunicare nelle lingue straniere, Competenza Matematica e di base in Scienza e Tecnologia, Competenza Digitale, Imparare ad imparare, Competenze sociali e civiche, Spirito di iniziativa ed imprenditorialità, Consapevolezza ed espressione culturale.

Si tratta di competenze di cui tutti hanno bisogno per la realizzazione e lo sviluppo personale, la cittadinanza attiva, l'inclusione sociale e l'occupazione.

Nel definire le modalità organizzative e didattiche per innalzare l'obbligo scolastico, partendo dalle indicazioni europee, sono state operate alcune curvature per meglio corrispondere alla realtà del sistema educativo di istruzione italiano. Nell'ambito del Decreto n. 139 del 22 agosto 2007 "Regolamento recante norme in materia di adempimento dell'obbligo scolastico", sono state individuate otto competenze chiave di cittadinanza, da acquisire al termine dell'istruzione obbligatoria.

In particolare, l'asse matematico ha la finalità di far acquisire allo studente saperi e competenze che lo pongano nelle condizioni di possedere una corretta capacità di giudizio e di sapersi orientare consapevolmente nei diversi contesti del mondo contemporaneo. La competenza matematica, che non si esaurisce nel sapere disciplinare, consiste nell'abilità di individuare e applicare procedure che consentono di affrontare situazioni problematiche attraverso linguaggi formalizzati, oltre a vagliare la coerenza logica delle argomentazioni proprie ed altrui in molteplici contesti.

Le competenze di base a conclusione dell'obbligo d'istruzione sono: utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, rappresentandole anche sotto forme algebrica; confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando in varianti e relazioni; individuare le strategie appropriate per la soluzione a problemi; analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi, anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico. L'asse scientifico-tecnologico ha l'obiettivo di facilitare lo studente nell'esplorazione del mondo circostante, per osservarne i fenomeni e comprendere il valore della conoscenza del mondo naturale e di quello delle attività umane. Si tratta di un campo ampio e importante per l'acquisizione di metodi, concetti, atteggiamenti indispensabili a interrogarsi, osservare e comprendere il mondo, anche attraverso la conoscenza del proprio corpo, dei propri limiti e delle proprie possibilità. L'apprendimento avviene per ipotesi e verifiche sperimentali, raccolta di dati, valutazione della loro pertinenza, formulazione di congetture, costruzione di modelli, superamento di difficoltà ed acquisizione di sempre nuovi schemi motori. Obiettivo determinante e inoltre rendere gli studenti consapevoli dei legami tra scienza e tecnologie, della loro

correlazione con il contesto culturale e sociale, con i modelli di sviluppo e con la salvaguardia dell'ambiente. Le competenze di base a conclusione dell'obbligo d'istruzione sono: osservare, descrivere e analizzare i fenomeni appartenenti alla realtà naturale ed artificiale e riconoscere nelle sue varie forme i concetti di sistema e di complessità; analizzare qualitativamente e quantitativamente fenomeni legati alle trasformazioni di energia a partire dall'esperienza; essere consapevole delle potenzialità e dei limiti delle tecnologie nel contesto culturale e sociale in cui vengono applicate; conoscere e comprendere attività motorie diverse, essere in grado di rielaborarle e svolgerle consapevolmente; rispettare regole ed avversari, collaborare nel gruppo e risolvere problematiche dinamiche.

### **La valutazione delle competenze in matematica**

Così come per le altre discipline, in matematica si distinguono tre momenti fondamentali dell'azione didattica in cui si effettua una valutazione. Prima di iniziare una unità di apprendimento si procede ad una verifica diagnostica e prognostica (ex ante). A circa metà dell'unità di apprendimento si procede ad una verifica in itinere che prevede questionari autovalutativi, rubriche valutative, compiti autentici verifica e valutazione delle conoscenze acquisite. Segue, al termine dell'unità di apprendimento, una verifica sommativa finale (ex post) che prevede uno o più questionari di gradimento (alunni/famiglie/docenti), una rubrica valutativa, compiti autentici, verifica e valutazione delle conoscenze acquisite, valutazione del prodotto atteso.

La valutazione di competenze ridisegna le prospettive valutative a scuola.

La tradizionale verifica di acquisizione di contenuti e concetti da un punto di vista teorico e di studio non viene esclusa dalle nuove prospettive di valutazione ma la ingloba. La tradizionale verifica dei contenuti non basta, infatti, da sola, a rilevare le capacità che gli studenti hanno nell'utilizzare tali contenuti e concetti nella risoluzione di problemi nei distinti ambiti disciplinari.

Da qui il recente interesse nel mondo della scuola e l'attenzione negli studi teorici sul concetto di valutazione autentica. La "valutazione autentica" non privilegia forme standardizzate per la verifica e cerca di verificare non solo ciò che lo studente sa, ma ciò che sa fare contestualizzando ciò che sa. In pratica si cerca di valutare attraverso l'analisi di una prestazione, piuttosto che attraverso strumenti formalizzati e decontestualizzati quali i test.

Con le "valutazioni autentiche" invece di adottare un modello che tende a verificare se lo studente ha raggiunto gli obiettivi prefissati dal docente e dalla scuola, si rimanda a un modello che si fonda su prestazioni reali, competenze da acquisire in un mondo reale.

Ecco che le valutazioni di processo, tra pari, di gruppo o di natura collaborativa diventano forme privilegiate in quanto si fondano su contesti meno formalizzati e più realistici rispetto alle forme tradizionali.

I principali studi sulle forme alternative e nuove forme di verifica prendono le mosse, nel contesto internazionale, proprio nei paesi anglosassoni che hanno speso maggiori energie a costruire e

utilizzare il testing negli anni precedenti. Comoglio offre una serie di differenze tra test tipici e compiti autentici, traducendo direttamente da uno dei più recenti testi americani sulla verifica delle prestazioni all'interno della valutazione educativa (v. tabella 2). Il cambio di paradigma è chiaro. E già Resnick aveva identificato le grandi discontinuità fra apprendimento scolastico e la natura dell'attività cognitiva fuori della scuola: a) la scuola si concentra sulla prestazione individuale, mentre il lavoro mentale all'esterno è spesso condiviso socialmente; b) la scuola è finalizzata a incoraggiare il pensiero privo di supporti, mentre il lavoro mentale fuori dalla scuola include abitualmente strumenti cognitivi; c) la scuola coltiva il pensiero simbolico, laddove l'attività mentale fuori dalla scuola è direttamente coinvolta con oggetti e situazioni; d) la scuola ha il fine di insegnare capacità e conoscenze generali, mentre all'esterno dominano le competenze specifiche per la situazione". Una modifica nei modelli di insegnamento e nei contesti formativi coinvolge e coinvolgerà sempre più le forme e i sistemi di verifica e valutazione scolastici.

<b>Aspetti della competenza</b>	<b>Dimensioni della competenza/processi cognitivi</b>
<i>Pensiero e ragionamento</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• formulare domande che sono tipiche della matematica ("C'è...?", "Se è così, quanti?", "Come troviamo...?");</li> <li>• conoscere i tipi di risposte che la matematica dà a tali domande;</li> <li>• distinguere tra diversi tipi di enunciati (definizioni, teoremi, congetture, ipotesi, esempi, affermazioni di tipo condizionale);</li> <li>• comprendere e trattare la portata e i limiti di determinati concetti matematici.</li> </ul>
<i>Argomentazione</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• conoscere cosa sono le dimostrazioni matematiche e come differiscono da altri tipi di ragionamento matematico;</li> <li>• seguire catene di ragionamenti matematici di diverso tipo e nel valutarne la validità;</li> <li>• avere un'idea dell'euristica ("Che cosa può o non può accadere? E perché?");</li> <li>• creare ed esprimere ragionamenti matematici.</li> </ul>
<i>comunicazione</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• sapersi esprimere in vari modi su questioni di carattere matematico, in forma orale e scritta</li> <li>• comprendere gli enunciati scritti od orali di altre persone circa tali questioni.</li> </ul>
<i>modellizzazione</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• strutturare il campo o la situazione che deve essere modellizzata;</li> <li>• tradurre "la realtà" in strutture matematiche;</li> <li>• interpretare i modelli matematici in termini di "realtà";</li> <li>• lavorare con un modello matematico;</li> <li>• validare il modello, riflettere, analizzare e valutare un modello e i suoi risultati;</li> <li>• comunicare ad altri il modello e i suoi risultati (compresi i limiti di tali risultati);</li> <li>• monitorare e controllare il processo di modellizzazione.</li> </ul>
<i>Formulazione e risoluzione di problemi</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• porre, formulare e definire diversi tipi di problemi matematici (quali problemi "puri", "applicati", "aperti" e "chiusi") e nel</li> </ul>

	risolverli in vari modi.
<i>Rappresentazione</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• decodificare e codificare, tradurre, interpretare e distinguere le diverse forme di rappresentazione di oggetti e situazioni matematiche e le relazioni tra le varie rappresentazioni;</li> <li>• scegliere e passare da una forma di rappresentazione a un'altra, in relazione alla situazione e allo scopo.</li> </ul>
<i>Uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico e delle operazioni</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• decodificare e interpretare il linguaggio simbolico e formale e comprendere il suo rapporto con il linguaggio naturale;</li> <li>• tradurre il linguaggio naturale nel linguaggio simbolico/formale;</li> <li>• lavorare con enunciati ed espressioni che contengano simboli e formule;</li> <li>• usare variabili, risolvere equazioni ed effettuare calcoli.</li> </ul>
<i>Uso di sussidi e strumenti</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• conoscere ed essere capaci di usare vari sussidi e strumenti (comprese le tecnologie dell'informazione) che possono facilitare l'attività matematica e conoscerne i limiti.</li> </ul>

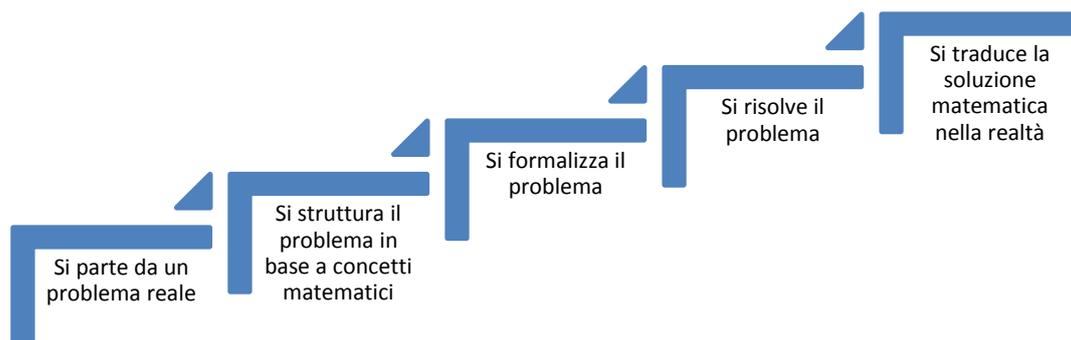
L'autenticità della prova, a dirla in sintesi, riguarda il contesto in cui richiediamo di esibire le competenze e non semplicemente la prova o il compito, sia nella forma esercitativa sia valutativa. Così i compiti autentici si posizionano all'interno di didattiche attive che mirano a contesti di realtà, anche se a scuola non sempre è possibile fare riferimento a situazioni reali, che spingono gli studenti a utilizzare conoscenze e abilità "apprese" per affrontare problemi effettivi, dotati di senso. E quanto più le situazioni e i contesti di apprendimento sono prossimi alla realtà, alla soluzione di problemi (concettuali, operativi, cognitivi ...), tanto più i compiti che chiediamo di svolgere, nella veste esercitativa o valutativa sono propriamente autentici.

<b>Test tipici</b>	<b>Compiti autentici</b>	<b>Indicatori di autenticità</b>
Richiedono una sola risposta corretta	Richiedono un prodotto di qualità e/o una prestazione e una giustificazione.	Accertano se lo studente può spiegare, applicare, autoadattarsi o giustificare le risposte, non solo la correttezza delle risposte utilizzando fatti o algoritmi.
Non devono essere conosciuti in anticipo perché la validità sia assicurata.	Devono essere conosciuti il più possibile in anticipo; richiedono esigenze di eccellenza e compiti essenziali; non sono esperienze di «fortuna»	I compiti, i criteri e gli standard attraverso i quali il lavoro sarà giudicato sono prevedibili o conosciuti – come un pezzo di recitazione, l'esecuzione di una rappresentazione, il motore che è aggiustato, la proposta a un cliente, ecc
Sono disconnessi da un contesto e da costrizioni realistici.	Richiedono l'utilizzo della conoscenza del mondo reale: lo studente deve «fare» storia, scienze, ecc. in simulazioni realistiche o di uso reale.	Il compito è una sfida e un insieme di costrizioni che sono autentiche – probabilità che sono incontrate da un professionista, da un cittadino o da un consumatore (è richiesto un

		«sapere come», non solo una improvvisazione).
Contengono item isolati che richiedono un uso o un riconoscimento di risposte o di abilità conosciute.	Sono sfide integrate nelle quali la conoscenza e il giudizio devono essere usati in modo innovativo per confezionare un prodotto di qualità o una prestazione.	Il compito ha molti aspetti non routinari, anche se c'è una risposta «corretta». Ciò richiede la chiarificazione di un problema, tentativi ed errori, adattamenti e adattarsi al caso o ai fatti che si hanno tra le mani, ecc.
Sono semplificati in modo da poter essere esaminati in modo facile e sicuro.	Implicano compiti complessi e non arbitrari, criteri e standard.	Il compito richiede aspetti importanti di prestazioni e/o sfide sostanziali del campo di studio, non facilmente analizzato; non sacrifica la validità per l'affidabilità.
Sono eseguiti in un arco temporale prestabilito.	Sono iterativi: contengono compiti essenziali ricorrenti, generi e standard.	Il lavoro è programmato per rivelare se lo studente ha conseguito una padronanza reale vs pseudopadronanza o comprensione vs solo familiarità nel tempo.
Dipendono da correlazioni tecniche elevate.	Offrono un'evidenza diretta, coinvolgendo compiti che sono stati validati rispetto a ruoli essenziali adulti e sfide fondate sulla disciplina.	Il compito è valido e giusto nel suo presentarsi. Per questo richiama l'interesse e la persistenza dello studente e sembra adatto a sfidare gli studenti e l'insegnante.
Offrono un'opportunità di punteggio.	Offrono un feedback utilizzabile, diagnostico (a volte alternativo): lo studente è capace di confermare i risultati e autoadattarsi nella misura in cui è necessario.	La prova è programmata non solo per verificare la prestazione, ma anche per migliorare la prestazione futura. Lo studente è considerato come il «cliente» primario dell'informazione.

Un confronto tra test tipici e compiti autentici - Fonte: Wiggins G., *Educative Assessment: Designing Assessments to Inform and Improve Student Performance*, San Francisco, California, Jossey-Bass Inc., 1998, riportato in traduzione in Comoglio M., 2002

Se una prova autentica prevede step risolutivi non sempre rigorosamente susseguentisi, la verifica deve prevedere altrettanti step e pertanto la declinazione di una rubrica di valutazione diventa essenziale a non tralasciare nessun aspetto del processo di insegnamento-apprendimento



Le rubriche valutative possono essere considerate degli strumenti di sintesi per una descrizione delle competenze acquisite e per la definizione di criteri e scale di livello della loro valutazione. Una rubrica si presenta quindi come una scala valutativa per i diversi aspetti di un compito o di una competenza.

Per poter valutare coerentemente al progetto didattico occorrerà distinguere su quali aspetti soffermare la valutazione della scrittura (criteri e indicatori) e descrivere i diversi livelli di prestazione adottando una scala con un numero variabile a più gradi (scala di valutazione), in base al tipo di analicità che si vuole raggiungere nella valutazione (Comoglio)

La rubrica valutativa, nella sua duplice veste di strumento per la valutazione di compiti e o di dimensioni di una competenza, si propone come strumento per una valutazione diacronica e più articolata delle prestazioni degli studenti, singolarmente e in gruppi. Ma per essere uno strumento utile e affidabile la rubrica deve aiutare a discriminare tra le diverse prestazioni in modo da evitare che diversi valutatori possano discordare fortemente sul grado da attribuire. E per evitare distorsioni valutative la rubrica dovrà quindi essere quanto più possibile precisa nella descrizione dei livelli di prestazione per le distinte dimensioni di una competenza

PISA definisce la *literacy* matematica come:

“La competenza matematica è la capacità di un individuo di identificare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell’individuo in quanto cittadino che esercita un ruolo costruttivo, impegnato e basato sulla riflessione” .

La *literacy* matematica non può essere ridotta alla sola conoscenza della terminologia matematica, dei fatti e dei procedimenti, né alle abilità necessarie per svolgere certe operazioni e applicare certi metodi, sebbene presupponga tutto ciò.

La *literacy* matematica comporta l’uso creativo dell’insieme di tali elementi per rispondere a quanto richiesto dalle situazioni esterne.

L'espressione "mondo reale" indica l'ambiente naturale, sociale e culturale nel quale l'individuo vive.

Usare la matematica e confrontarsi con essa significa andare oltre il suo uso funzionale in senso stretto ma comprendere anche gli aspetti estetici e ludici della matematica e la sua importanza per proseguire gli studi

In una tale prospettiva, al centro della valutazione in matematica non si può più porre il contenuto.

La verifica di competenze passerà invece anche attraverso l'analisi dei *processi* cognitivi tramite i quali lo studente sarà capace di adattare le proprie conoscenze matematiche in un contesto non strettamente ed esclusivamente matematico, ma in una *situazione*, familiare e non, della vita reale.

Lo studente, in una prova autentica si troverà di fronte a una situazione reale, contestualizzata al di fuori della matematica ma di fronte alla necessità di *matematizzare* la situazione.

Il processo di matematizzazione può essere descritto sulla base di cinque fasi:

Analisi di un problema situato nella realtà;

Individuazione degli strumenti matematici pertinenti e riorganizzazione del problema in base a concetti matematici individuati;

Eliminazione dal problema degli elementi della realtà;

Risoluzione del problema matematico;

Interpretazione della soluzione matematica nei termini della situazione reale.

La capacità di matematizzare una situazione richiede quindi allo studente di saper individuare e utilizzare gli strumenti matematici necessari, deve cioè mostrare il proprio livello di competenza rispetto agli *ambiti di contenuto*.

A questo riguardo, a livello internazionale si è venuta consolidando una scelta ampiamente condivisa di suddivisione in quattro ambiti dei contenuti della matematica di base. I quattro ambiti individuati, sono sostanzialmente simili. Infatti si parla di:

***Overarching ideas:*** Quantità – Spazio e forma – Cambiamenti e relazioni – Incertezza [**OCSE-PISA 2006**]

***Content domains:*** Numero – Geometria – Algebra – Dati e caso [**TIMSS 2007**]

***Contents:*** Operazioni – Geometria – Algebra – Analisi dei dati e probabilità [**NCTM Standards 2000**]

**Nuclei Fondanti:** Numeri – Spazio e figure – Relazioni e funzioni – Misure, dati e previsioni  
**[Indicazioni per il curriculum 2007]**

Le attività matematiche possono essere suddivise in sei categorie, alle quali riferire ogni concetto matematico (Bishop): *Counting – Locating – Measuring – Designing – Playing – Explaining*  
 In questo, Bishop si poneva già nella prospettiva di una matematica *fatta per ...* piuttosto che *fatta di ...*

Come emerge dagli aspetti indicati, i fattori che PISA prende in considerazione per la definizione dei tre differenti livelli di competenza sono rappresentati da:

- tipo e grado di interpretazione e di riflessione richiesti,
- tipo di abilità di rappresentazione richiesta,
- tipo e livello di abilità matematica richiesta,
- tipo e grado di argomentazione matematica richiesta.

Di seguito esporremo esempi di prove autentiche, rispettivamente una per la matematica, una per matematica&fisica e, infine due simulazioni, una di matematica e una di fisica, somministrate agli studenti delle classi quinte dei Licei, in vista degli esami di Stato dell’A.S. 2014/15

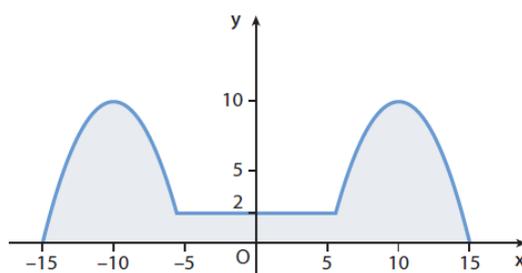
## Gli studi di caso (la matematica)

### In palestra

Claudio e Gianni si iscrivono in una palestra e l’istruttore gli assegna alcuni esercizi per le braccia da eseguire con pesi in plastica.

Hanno a disposizione due tipi di attrezzi

Un primo tipo di attrezzo può essere modellizzato con un solido ottenuto dalla rotazione intorno all’asse  $x$  del grafico della funzione rappresentata: si tratta di due archi di parabola e un segmento (misure in centimetri).



Un secondo tipo di attrezzo ha varie dimensioni; è costituito da una sbarretta cilindrica di lunghezza  $L$  e di raggio  $5\text{cm}$

Claudio utilizza il primo attrezzo. Gianni deve scegliere il secondo attrezzo in modo che possa eseguire l’esercizio con lo stesso peso di Claudio.

L'istruttore interviene, fornito di carta, penna e calcolatrice e rappresenta graficamente i due attrezzi, poi suggerisce di:

1. Scrivere l'equazione della funzione rappresentata.
2. Calcolare il volume a disposizione per inserire della sabbia nel peso.
3. Sapendo che il peso specifico della sabbia è  $1,4 \text{ kg/dm}^3$ , trovare il peso del primo attrezzo pieno.

Infine Claudio intuisce che, per eseguire l'esercizio con lo stesso peso, deve prendere un attrezzo cilindrico che abbia altezza .....

### **Gli studi di caso (Matematica&Fisica)**

#### **Cornetto e cappuccino**

Antonio e Mario sono solito fare colazione al bar; Antonio prende caffè e cornetto e Mario Cappuccino e cornetto. A Mario il cappuccino piace a temperatura ambiente e così i due devono aspettare ogni volta che il cappuccino si raffreddi. Mario fa notare che nello scambio di calore tra un corpo, per esempio una tazzina di caffè, e l'ambiente, la temperatura del corpo cambia al variare del tempo, mentre possiamo considerare costante la temperatura dell'ambiente. Inoltre, la velocità di variazione della temperatura è proporzionale in ogni istante alla differenza di temperatura tra l'ambiente e il corpo.

Il cappuccino di Mario appena versato ha una temperatura di  $67 \text{ }^\circ\text{C}$ , mentre l'ambiente di  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ ; la costante di proporzionalità è  $0,077 \text{ min}^{-1}$ .

Per non fare tardi a scuola, i due amici hanno bisogno di farsi un po' di conti sul tempo di raffreddamento della tazza di cappuccino.

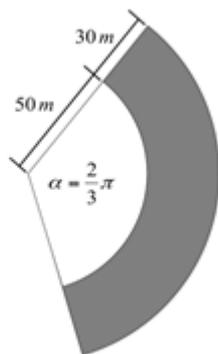
Hanno bisogno del tuo aiuto:

1. per scrivere l'equazione differenziale che rappresenta la legge di raffreddamento.
2. per trovare la funzione che rappresenta la temperatura in funzione del tempo.
3. per calcolare in quanto tempo il caffè si raffredda, cioè raggiunge la temperatura ambiente.

#### **Gli studi di caso: la simulazione ministeriale**



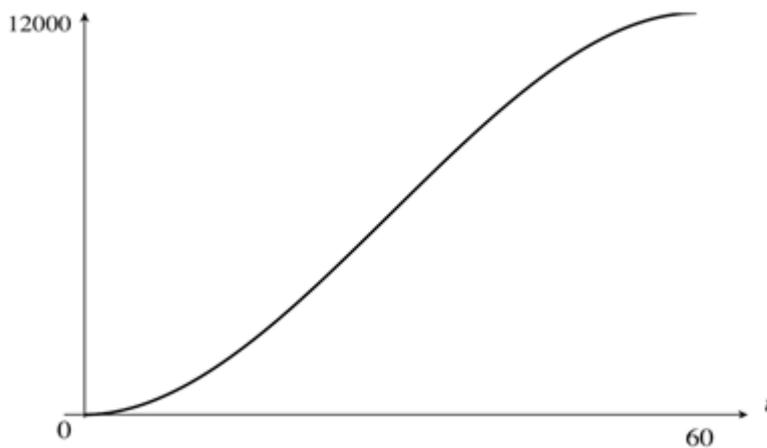
Sei il responsabile della gestione del settore “Curva Nord” dell’impianto sportivo della tua città e devi organizzare tutti i servizi relativi all’ingresso e all’uscita degli spettatori, nonché alla sicurezza e alla assistenza agli spettatori stessi. La forma del settore sotto la tua gestione è una porzione di corona circolare come rappresentata in figura 1.



Nella figura c’è una corona circolare con angolo  $2/3\pi$ , raggio della circonferenza esterna  $R = 50m + 30m = 80m$  e quello della circonferenza interna  $r = 50m$

Tenendo presente che le normative di sicurezza emanate dal Comune prevedono un indice di affollamento di  $3,25 \text{ persone}/m^2$ , e che il 9,5% della superficie della “Curva Nord” è inagibile in quanto necessita di lavori di manutenzione.

1. Determina la capienza massima  $N$  attuale del settore “Curva Nord”, approssimata alle centinaia.
2. La Polizia Municipale propone di aprire i cancelli di ingresso un’ora prima dell’inizio della manifestazione sportiva. È necessario non aprirli con troppo anticipo per limitare i costi, ma anche evitare un afflusso troppo intenso, per motivi di sicurezza: la velocità massima di accesso degli spettatori non deve essere superiore a 350 ingressi al minuto. In base alle osservazioni degli anni precedenti, sai che l’andamento del numero di spettatori, aprendo gli ingressi un’ora prima della manifestazione, segue una curva come quella in figura 2



3. Esprimendo il tempo  $t$  in minuti, determina il polinomio  $p(t)$  (di terzo grado) che meglio riproduce questo andamento, ipotizzando che il numero di spettatori sia 0 all'apertura dei cancelli di ingresso ( $t = 0$ ) e sia pari al numero massimo consentito  $N$  dopo un'ora e che la velocità di accesso sia 0 al momento dell'apertura iniziale degli ingressi e sia ancora 0 dopo un'ora quando l'afflusso termina e il settore è riempito completamente. Verifica che la funzione rispetti il vincolo di sicurezza sulla massima velocità di accesso allo stadio
4. Al termine della manifestazione gli spettatori defluiscono dall'impianto; in base alle osservazioni degli anni scorsi ogni minuto esce dall'impianto il 5% degli spettatori presenti all'interno nel minuto precedente.  
Determina la funzione che meglio rappresenta il deflusso degli spettatori e indicando con  $t=0$  l'apertura dei cancelli e con  $t_f$  (da determinare) l'istante in cui, durante il deflusso, nell'impianto restano meno di 100 spettatori, disegna il grafico della funzione che rappresenta il numero di spettatori presenti nell'impianto nell'intervallo  $[0, t_f]$ . Ipotizza che l'impianto sia riempito alla massima capienza e che la manifestazione sportiva duri un'ora. Determina inoltre la massima velocità di deflusso degli spettatori nell'impianto
5. Devi organizzare i servizi di assistenza e ristoro per gli spettatori, sulla base del numero medio di persone nell'impianto. Determina il numero medio di spettatori presenti nell'impianto, nell'intervallo di tempo dall'istante  $t = 0$  (apertura dei cancelli) all'istante  $t = t_f$

### Proposta di svolgimento

1. La superficie della curva è quella del settore circolare. La calcoliamo come differenza tra le superficie dei due cerchi di raggio  $R$  e  $r$  e poi dobbiamo moltiplicare per l'angolo  $2/3\pi$  e dividere per  $2\pi$  che è l'angolo di  $360^\circ$ :

$$S = (\pi R^2 - \pi r^2) \cdot \frac{2}{3} \frac{\pi}{2\pi} = \frac{\pi}{3} (80^2 - 50^2) = \frac{\pi}{3} (6400 - 2500) = 1300\pi m^2$$

Ma il 9,5% è inagibile, quindi la superficie agibile è il 90,5% di  $S = 1300\pi m^2$  cioè  $S$  agibile è  $1176,5\pi m^2$ .

2. Per trovare la capienza massima  $N$ , moltiplichiamo la superficie disponibile per 3,25 che è il numero di persone per  $m^2$ :

$$N = 1176,5\pi m^2 \cdot 3,25 \frac{\text{persone}}{m^2} \approx 12000$$

3. Il polinomio cercato è  $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$   
Troviamo i coefficienti di  $p(t)$ .<sup>1</sup>

Sappiamo che il numero di persone a  $t=0$  è 0

$$p(0) = d = 0$$

La velocità di ingresso è la derivata di  $p(t)$  rispetto a  $t$  cioè  $p'(t) = 3at^2 + 2bt + c$  che è uguale a 0 per  $t = 0$

$$p'(0) = c = 0$$

Sappiamo anche che la velocità dopo un'ora è 0 quindi  $p'(60) = 3a(60)^2 + 2b(60) = 0$

$$b = -90a$$

Ora sappiamo anche che il numero di persone al tempo  $t=60$  è  $N = 12000$  quindi

$$p(60) = a(60)^3 - 90a(60)^2 = 12000$$

da cui ricaviamo il polinomio cercato

$$a = 12000 / 60^2 (60 - 90) = -1/9$$

$$p(t) = -1/9 t^3 + 10 t^2$$

4. Per verificare che la funzione rispetti il vincolo di sicurezza sulla massima velocità di accesso allo stadio che è di 350 ingressi al minuto, dobbiamo risolvere la disequazione

$$p'(t) = -1/3 t^2 + 20t \leq 350$$

Calcoliamo il  $\Delta/4 = 900 - 1050 < 0$

Dato che il segno della disequazione è concorde abbiamo che è verificata per ogni valore di  $t$ . La velocità non è quindi mai superiore al valore massimo consentito

5. L'inizio del deflusso avviene al termine della manifestazione cioè al tempo  $t=120$  dall'apertura dei cancelli. Ogni minuto il numero di spettatori diminuisce del 5% rispetto numero di spettatori al minuto precedente. Quindi la funzione del deflusso degli spettatori è una funzione esponenziale con base  $0,95 < 1$ .

Per trovare il tempo  $t_f$  quando ci sono meno di 100 spettatori risolviamo la

disequazione  $12000 (0,95)^{t-120} < 100$ . Facendo il logaritmo in base  $e$  a destra e a sinistra abbiamo

$$(t - 120) \ln(0,95) < \ln(1/120) \rightarrow t > -\ln(120)/\ln(0,95) + 120 \approx 213,86$$

Allora gli spettatori saranno meno di 100 dopo  $t_f = 214$  minuti dall'apertura dei cancelli.

<sup>1</sup> Attenzione! Qui il tempo  $t$  indica minuti e non secondi quindi l'intervallo che stiamo considerando è  $[0,60]$ .

Per trovare la velocità massima di deflusso osserviamo che la funzione di deflusso  $d(t)$  è sempre decrescente perché è un esponenziale con base  $<1$  quindi la velocità massima di deflusso  $c'$  è quando inizia il deflusso, cioè al tempo  $t=120$ .

La derivata di  $d(t)$  è  $d'(t) = 120000 \ln(0,95) 0,95^{t-120}$  ed è massima per  $t = 120$  quindi  $d'(120) \simeq -615$  ma a noi interessa il valore assoluto della velocità quindi 615 persone al minuto.

6. Per calcolare il numero medio di spettatori nell'intervallo  $[0, t_f] = [0, 214]$  usiamo il teorema della media. La funzione è quella che dà il numero di spettatori presenti ed è definita a tratti perché dipende da quale momento della manifestazione consideriamo. Chiamiamo questa funzione  $f(t)$ :

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{9}t^3 + 10t^2 & 0 \leq t \leq 60 \\ 12000 & 60 < t \leq 120 \\ 12000 (0,95)^{t-120} & 120 < t \leq 214 \end{cases}$$

Il teorema della media dice che esiste il valore medio  $M$  della funzione  $f(t)$  ed è uguale all'integrale della funzione nell'intervallo diviso la lunghezza dell'intervallo:

$$M = \frac{1}{214} \int_0^{214} f(t) dt$$

Spezziamo l'integrale nella somma degli integrali dei vari tratti, ottenendo 6131

## Studio di caso: la fisica

### Una missione spaziale

Nel 2200 il più moderno razzo vettore interplanetario costruito dall'uomo può raggiungere il 75,0 % della velocità della luce nel vuoto. Farai parte dell'equipaggio della missione che deve raggiungere un pianeta che orbita intorno alla stella Sirio, che dista 8,61 anni-luce e si avvicina con velocità di 7,63 km/s al sistema solare, effettuare ricerche lì per 2,00 anni e poi rientrare sulla Terra. Devi contribuire alla programmazione di tutti i dettagli della missione, come ad esempio le scorte di cibo e acqua; prendendo come istante di riferimento  $t = 0$  il momento della partenza dalla Terra, considerando che viaggerai sempre alla massima velocità possibile e trascurando tutti gli effetti dovuti alla accelerazione del moto nella fase di partenza e di arrivo, fatte tutte le ipotesi aggiuntive che ritieni necessarie, devi valutare:

1. quanto tempo durerà la missione per un osservatore sulla terra;
2. quanto tempo durerà il viaggio di andata e quello di ritorno secondo i componenti dell'equipaggio;
3. quanto tempo durerà complessivamente la missione secondo i componenti dell'equipaggio.

Alcuni test effettuati nei laboratori della Terra sui componenti elettronici simili a quelli utilizzati sull'astronave, indicano che è necessario effettuare alcuni interventi di

manutenzione sull'astronave. Dopo 1,00 anni dalla partenza (tempo terrestre) viene quindi inviato un segnale alla navicella. Quando il capitano riceve il segnale,

4. quanto tempo è trascorso sulla navicella dall'inizio del viaggio?

Ricevuto il segnale, il capitano invia immediatamente la conferma alla Terra;

5. dopo quanto tempo dall'invio del segnale alla navicella la base terrestre riceve la conferma della ricezione?

Durante il viaggio di andata, il ritardo nelle comunicazioni con l'astronave aumenta con l'aumentare della distanza; per illustrare al pubblico questo effetto

7. disegna su un piano cartesiano i grafici che mostrino rispetto al riferimento terrestre la distanza dalla Terra dell'astronave e dei due segnali di comunicazione, in funzione del tempo.

8. Il responsabile della sicurezza della missione ti comunica una sua preoccupazione: teme che, a causa della contrazione relativistica delle lunghezze, il simbolo della flotta terrestre riportato sulla fusoliera del razzo, un cerchio, possa apparire deformato agli occhi delle guardie di frontiera, che potrebbero quindi non riconoscerlo, e lanciare un falso allarme. Pensi che sia una preoccupazione fondata?

Illustra le tue considerazioni in merito a questa preoccupazione e dai una risposta al responsabile della sicurezza, corredandola con argomenti quantitativi e proponendo una soluzione al problema.

### Proposta di svolgimento

Indichiamo con  $t$  e  $\Delta t$  i tempi e gli intervalli di tempo misurati da un osservatore sulla terra e con  $t'$  e  $\Delta t'$  quelli misurati dall'equipaggio della navicella. La durata della missione è la somma della durata del viaggio di andata  $\Delta t_a$  ( $\Delta t'_a$ ) del tempo trascorso su Sirio per effettuare le ricerche  $\Delta t_{sosta}$  ( $\Delta t'_{sosta}$ ) della durata del ritorno  $\Delta t_r$  ( $\Delta t'_r$ ). Per un osservatore sulla terra, il viaggio di andata ha una durata pari a:

$$\Delta t_a = \frac{8,6}{0,75} = 11,6 \text{ anni}$$

il tempo trascorso su Sirio per effettuare le ricerche è di due anni, cioè è eguale al tempo della sosta misurato dall'equipaggio in quanto la velocità di Sirio è trascurabile rispetto alla velocità della luce; il viaggio di ritorno ha una durata pari a quello di andata; pertanto la durata complessiva della missione totale è:

$$t_{tot} = \Delta t_a + \Delta t_{sosta} + \Delta t_r = 11,6 + 2 + 11,6 = 25,2 \text{ anni}$$

Per i componenti dell'equipaggio, la durata del viaggio di andata e del viaggio di ritorno è:

$$\Delta t'_a = \Delta t'_r = \frac{\Delta t_a}{\gamma} = \Delta t_a \sqrt{1 - \beta^2} = 7,67 \text{ anni}$$

il tempo trascorso per effettuare le ricerche  $\Delta t'_{sirio} = 2,00 \text{ anni}$ . Il tempo totale della missione per i componenti dell'equipaggio risulta quindi:

$$t'_{tot} = 7,67 + 2 + 7,67 = 17,3 \text{ anni}$$

Nel sistema di riferimento della terra, l'evento "invio del segnale" avviene nel punto

$$x_0 = 0,00 \text{ al tempo } t_0 = 1,00 \text{ anni.}$$

Per le trasformazioni di Lorentz, nel sistema di riferimento della navicella lo stesso evento avviene nel punto di coordinate spazio-temporali:

$$x'_0 = \gamma(x_0 - vt_0) = -\gamma vt_0 = -1,13 \text{ anni - luce}$$

e al tempo

$$t'_0 = \gamma \left( t_0 - \frac{vx_0}{c^2} \right) = \gamma t_0 = 1,51 \text{ anni}$$

Per i componenti dell'equipaggio il segnale luminoso raggiungerà la navicella dopo un tempo:

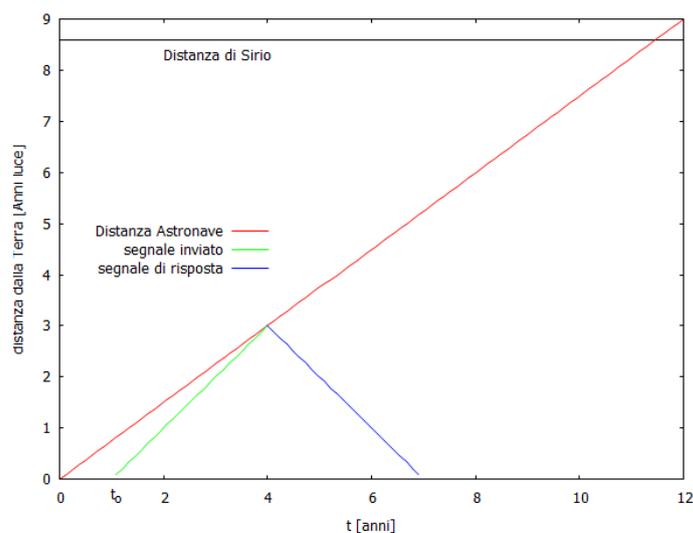
$$\Delta t'_1 = \frac{|x'_0|}{c} = \frac{\gamma vt_0}{c} = 1,13 \text{ anni}$$

Il tempo totale trascorso per l'equipaggio sarà quindi 2,64 anni

Per la base terrestre il segnale giunge alla navicella al tempo  $t_{totale} = 4,00$  anni dopo l'inizio della missione, infatti:

$$c(t_{tot} - t_0) = vt_{tot} \quad \rightarrow \quad t_{tot} = \frac{c}{v - v} t_0 = 4,00 \text{ anni}$$

Impiega quindi 3,00 anni a raggiungere la navicella. Al tempo  $t$  totale, la navicella si trova ad una distanza di 3,00 anni luce dalla Terra; per tornare indietro la risposta impiega quindi altri 3,00 anni e la base a Terra riceverà la conferma della ricezione 6,00 anni dopo l'invio del segnale.



Il grafico illustra al pubblico la tempistica della missione e dei due segnali; esso mostra la distanza astronave-Terra in funzione del tempo; la pendenza della retta è pari alla velocità dell'astronave. Il segnale inviato al tempo  $t=t_0$  si allontana dalla Terra con velocità  $c$ . Il segnale inviato

dall'astronave si avvicina alla Terra con velocità  $c$ . I punti di incrocio delle rette sono gli istanti in cui la navicella raggiunge Sirio (A) e l'istante in cui il segnale raggiunge la navicella (B) e riparte verso la terra.

La preoccupazione del responsabile della sicurezza è fondata, in quanto la contrazione di Lorentz avviene nella direzione longitudinale del moto e non in quella trasversale; il cerchio del simbolo della flotta appare più o meno deformato a seconda di come esso è orientato rispetto alla velocità del moto. Infatti un raggio del cerchio diretto come la velocità apparirà contratto del fattore relativistico 1,51 mentre un raggio ad esso perpendicolare apparirà non contratto.

Per evitare la deformazione del cerchio occorre che la navicella diriga il suo moto sempre verso il posto di guardia della frontiera e che il piano che contiene il simbolo sia sempre perpendicolare alla direzione del moto della navicella in modo che tutti i raggi del simbolo siano perpendicolari al moto e non risentano della contrazione di Lorentz.

## Bibliografia

Arzarello F., Robutti O. (2002). *Matematica*. Brescia: La Scuola.

D'Amore B. (1999a). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Santi G., Sbaragli S. (2009). Il ruolo dell'epistemologia dell'insegnante nelle pratiche d'insegnamento. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*.

D'Amore B., Godino D.J., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.

Pellerey M. (2003). *Le competenze individuali e il portfolio*. Firenze: La Nuova Italia.

Sbaragli S. *Le competenze nell'ambito della matematica*

Lave J., Wenger E., *L'apprendimento situato, Dall'osservazione alla partecipazione attiva nei contesti sociali*, Erickson, 2006.

G. Wiggins (1998). *Educative assessment. Designing assessments to inform and improve student performance*, San Francisco, CA: Jossey-Bass

M. Comoglio (2002). *La valutazione autentica. Orientamenti Pedagogici*, 49(1), 93- 112

Guido Benvenuto, Orietta Simona Di Bucci Franco Favilli, *Le rubriche valutative*

INVALSI, *Valutare le competenze in scienze, lettura e matematica. Quadro di riferimento di PISA 2006*, Roma 2007.