Parte 3. Rango e teorema di Rouché-Capelli

A. Savo − Appunti del Corso di Geometria 2013-14

Indice delle sezioni

1 Rango di una matrice

1.1 Minori di una matrice

• Un *minore* di una matrice A è per definizione una sottomatrice quadrata di A. Un minore si ottiene intersecando n righe ed n colonne di A, opportunamente scelte.

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ha quattro minori di ordine 1 (cioè $(1), (2), (3), (4)$) e un minore di ordine 2 (la matrice stessa).

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Oltre ai minori di ordine 1 (gli elementi della matrice), abbiamo tre minori di ordine 2:

$$\mu_{12,12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mu_{12,13} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mu_{12,23} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

dove $\mu_{ij,hk}$ denota il minore ottenuto scegliendo le righe i, j e le colonne h, k.

Esempio $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{pmatrix}$. Abbiamo nove minori di ordine due:

$$\mu_{12,12} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}, \mu_{12,13} = \begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix}, \dots, \mu_{23,23} = \begin{pmatrix} e & f \\ h & l \end{pmatrix}$$

e ovviamente solo un minore di ordine tre (la matrice stessa).

Esercizio a) Elencare tutti i minori di ordine tre di una matrice 3×4.

b) Quanti sono i minori di ordine p di una matrice $m \times n$? (*Risposta:* $\binom{m}{p} \cdot \binom{n}{p}$).

1.2 Definizione di rango

Definizione *Una matrice A di tipo $m \times n$ ha* rango p *se:*

1. *Esiste almeno un minore di ordine p con determinante non nullo.*
2. *Tutti i minori di ordine $p + 1$ (se esistono) hanno determinante nullo.*

Espresso a parole, il rango di una matrice è *l'ordine massimo di un minore di A avente determinante non nullo.* Denoteremo il rango di A con il simbolo: $\text{rk}A$. Per convenzione, il rango della matrice nulla è posto uguale a zero. Tutte le altre matrici hanno rango maggiore o uguale a 1.

• Osserviamo che, se esiste un minore di ordine h con determinante non nullo, allora $\text{rk}A \geq h$.

Segue immediatamente dalla definizione che:

• Se A ha m righe e n colonne si ha sempre $0 \leq \text{rk}A \leq \min\{m, n\}$ (il minimo tra m e n). Questo semplicemente perchè non ci sono minori di ordine superiore a tale numero. Se $\text{rk}A = \min\{m, n\}$ diremo che A ha *rango massimo.*

• Se A è quadrata, di ordine n, allora $\text{rk}A = n$ (massimo) se e solo se $\det A \neq 0$.

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Poichè $\det A \neq 0$ si ha $\text{rk}A = 2$.

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Il rango vale 1 poiché $\det A = 0$ e A non è nulla.

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$. Il rango vale 1 (i tre minori di ordine 2 hanno determinante nullo).

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Il rango vale 2 (c'è infatti almeno un minore di ordine 2 a determinante non nullo: quale?).

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Il minore $\mu_{12,12}$ ha determinante non nullo, dunque rk$A$ vale 2 oppure 3. Poichè $\det A = 0$, si ha effettivamente rk$A = 2$.

Esercizio Verificare che, se tutti i minori di un certo ordine h hanno determinante nullo, allora tutti i minori di ordine più grande di h avranno determinante nullo.

Proposizione *Si ha sempre* $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}(A^t)$.

Dimostrazione. I minori di A^t si ottengono trasponendo quelli di A (e viceversa). Siccome il determinante assume lo stesso valore su un minore M e sul suo trasposto, si ha immediatamente l'asserto. $\square$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Si vede subito che il rango vale almeno 2, poiché $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Esaminiamo i determinanti dei minori di ordine 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Sono tutti nulli, dunque rk$A = 2$.

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Si vede che rk$A \geq 2$. Inoltre un calcolo mostra che $\det A = 0$. Dunque il rango può valere 2 oppure 3. A questo punto dovremmo esaminare tutti i minori di ordine 3 (sono in tutto 16). Lasciamo in sospeso il calcolo, poiché nella prossima sezione enunceremo un teorema che ci permetterà di abbreviare i calcoli.

2 Teorema degli orlati

2.1 Minori orlati di un minore dato

Dato un minore M di ordine n di una matrice A, diremo che il minore M' di ordine $n+1$ è un *orlato* di M se esso contiene M, se cioè si ottiene da M aggiungendo elementi di un'altra riga e un'altra colonna di A.

Esempio Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. Osserviamo che A ammette sei minori di ordine 2 (elencare tali minori). Ora fissiamo il minore di ordine 1 dato da $M = \mu_{2,1} = (5)$ ed elenchiamo i minori orlati di M. Essi sono tre; precisamente:

$$\mu_{12,12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mu_{12,13} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mu_{12,14} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Esempio Sia ora $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Fissiamo il minore di ordine 2 dato da

$$M = \mu_{12,12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

ed elenchiamo i minori orlati di M. Essi sono in tutto quattro, e si ottengono aggiungendo, rispettivamente, elementi dalla:

- terza riga e terza colonna: $\mu_{123,123} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$,
- terza riga e quarta colonna: $\mu_{123,124} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$,
- quarta riga e terza colonna: $\mu_{124,123} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,
- quarta riga e quarta colonna: $\mu_{124,124} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.2 Teorema degli orlati ed esempi

Enunciamo ora il *teorema degli orlati.*

Teorema *Sia A una matrice $m \times n$ e M un suo minore di ordine p con determinante non nullo. Se tutti i minori orlati di M hanno determinante nullo allora il rango di A è esattamente p (l'ordine di M).*

Dimostrazione. Omessa. $\square$

Esempio Calcoliamo il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Il minore

$$M = \mu_{12,12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo. Esaminiamo ora i determinanti dei minori *orlati* di M, che sono solamente quattro, e sono già stati elencati precedentemente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Tutti i minori orlati hanno determinante nullo: possiamo applicare il teorema degli orlati, e concludere che il rango vale 2.

• È chiaro che, se il determinante di almeno uno dei minori orlati fosse stato diverso da zero, allora il rango della matrice risulterebbe almeno pari a 3 e avremmo dovuto continuare, esaminando i minori di ordine 4 (in questo caso, la matrice stessa).

Il teorema degli orlati ha permesso di ridurre i calcoli: invece di considerare tutti i (sedici) minori di ordine 3, è stato sufficiente considerare solo i quattro minori orlati del minore precedentemente fissato. $\square$

Esempio Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & y & z & w \end{pmatrix}$$

determinare x, y, z, w in modo che $\mathrm{rk} A = 1$.

Soluzione. È chiaro che il rango vale almeno 1. Per essere proprio uguale a 1, tutti gli orlati del minore $M = (1)$ devono avere determinante nullo. Otteniamo le condizioni:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ x & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ x & w \end{vmatrix} = 0,$$

e quindi

$$\begin{cases} y = 2x \\ z = 3x \\ w = 4x. \end{cases}$$

Dunque la matrice deve essere del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & 2x & 3x & 4x \end{pmatrix},$$

con x parametro reale. Notiamo che le righe (e anche le colonne) sono proporzionali. $\square$

• Con un argomento simile, possiamo verificare che una matrice avente solo due righe ha rango 1 se e solo se è non nulla e ha righe proporzionali. Stessa cosa per le matrici con due colonne. Ad esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

hanno rango 1, mentre $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ha rango 2.

Esercizio Dimostrare che il rango di una matrice diagonale è uguale al numero degli elementi diagonali non nulli.

Esercizio Sia A' la matrice ottenuta da A aggiungendo una riga (o una colonna). Dimostrare che $\mathrm{rk}A' \geq \mathrm{rk}A$ e piú precisamente si ha $\mathrm{rk}A' = \mathrm{rk}A$ oppure $\mathrm{rk}A' = \mathrm{rk}A + 1$. In altre parole, aggiungendo una riga (o colonna) il rango rimane inalterato oppure aumenta di un'unità (a seconda dei casi).

3 Rango e algoritmo di Gauss

Abbiamo visto nella prima parte come l'algoritmo di Gauss permetta di risolvere i sistemi lineari. In questa sezione useremo l'algoritmo di Gauss per calcolare il rango di una matrice: tale metodo, almeno per matrici di grandi dimensioni, è molto piú efficiente del metodo dei minori usato per definire il rango.

3.1 Il rango di una matrice a scalini

Ricordiamo la definizione di matrice a scalini, già data precedentemente.

Definizione *Una matrice A si dice* a scalini *se verifica entrambe le seguenti proprietà:*

1. *Se una riga è nulla, tutte le righe ad essa sottostanti sono nulle.*

2. *Sotto il primo elemento non nullo di ciascuna riga, e sotto tutti gli zeri che lo precedono, ci sono elementi nulli.*

In una matrice a scalini, il primo elemento non nullo di una riga è detto il *pivot* della data riga. Osserviamo che il numero dei pivot uguaglia il numero delle righe non nulle.

Vogliamo ora calcolare il rango di una matrice a scalini. Iniziamo con un esempio.

Esempio Calcoliamo il rango della matrice a scalini $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il numero dei pivot (righe non nulle) è 3. Chiaramente, ogni minore di ordine 4 ha almeno una riga nulla, dunque determinante nullo. Ne segue che il rango non può essere maggiore di 3. Dimostriamo che è proprio uguale a 3. Consideriamo il minore di ordine 3 individuato dalle righe e dalle colonne corrispondenti ai pivot: nel nostro caso,

$$\mu_{123,135} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tale minore è triangolare superiore, con elementi diagonali dati dai pivot di A: il suo determinante, essendo il prodotto dei pivot, è sicuramente diverso da zero. Dunque: esiste un minore di ordine 3 con determinante non nullo, e tutti i minori di ordine 4 hanno determinante nullo. La conclusione è che il rango di A vale 3, esattamente il numero dei pivot di A.

Questo è sempre vero.

Teorema *Il rango di una matrice a scalini uguaglia il numero dei suoi pivot.*

Dimostrazione. Basta generalizzare l'argomento dell'esempio precedente. Sia r il numero dei pivot. Allora:

- ogni minore di ordine $r + 1$ ha una riga nulla, dunque determinante nullo;
- il minore di ordine r individuato dalle righe e dalle colonne cui appartengono i pivot è triangolare superiore, con elementi diagonali non nulli, dunque ha determinante non nullo.

Da queste due osservazioni segue immediatamente che il rango di A vale proprio r. $\square$

3.2 Rango e operazioni elementari sulle righe

Ricordiamo che le operazioni elementari sulle righe di una matrice sono:

1) Scambiare due righe fra loro.
2) Moltiplicare una riga per uno scalare non nullo.
3) Sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga.

Sia A una matrice quadrata, e supponiamo che la matrice A' si ottenga da A dopo aver applicato una successione di operazioni elementari sulle righe. Non è difficile dimostrare che allora anche A si ottiene da A' mediante una successione di operazioni elementari sulle righe. Diremo che A e A' sono matrici *equivalenti per righe.*

Ricordiamo infine l'algoritmo di Gauss:

• Sia data una qualunque matrice A. Con opportune operazioni elementari sulle righe, è sempre possibile arrivare ad una matrice $\tilde{A}$ tale che:

1. $\tilde{A}$ è equivalente per righe ad A.
2. $\tilde{A}$ è a scalini.

$\tilde{A}$ è anche detta una *matrice ridotta* di A.

Il calcolo del rango mediante l'algoritmo di Gauss si basa sul seguente risultato fondamentale:

Teorema *Le operazioni elementari sulle righe non alterano il rango. Quindi, matrici equivalenti per righe hanno lo stesso rango.*

Dimostrazione. Non daremo una dimostrazione formale, ma solo un cenno. Ricordiamo l'effetto di ciascuna delle operazioni 1), 2), 3) elementari sul determinante di una matrice, dimostrate nella Parte 1:

1) il determinante cambia di segno,
2) il determinante viene moltiplicato per un numero non nullo,
3) il determinante rimane invariato.

Ne segue che le operazioni elementari sulle righe di una matrice possono alterare il determinante di un suo qualunque minore, ma solo (eventualmente) moltiplicandolo per un numero non nullo: dunque queste operazioni non alterano la proprietà che tale determinante sia nullo o no. Poiché solo questo conta nella definizione di rango, la conclusione è intuitivamente evidente. □

Corollario *Sia A una matrice e $\tilde{A}$ una ridotta di A (cioè, una matrice a scalini equivalente per righe ad A). Allora il rango di A è uguale al numero dei pivot di $\tilde{A}$.*

Dimostrazione. Dalla proposizione precedente, abbiamo che $\text{rk}A = \text{rk}\tilde{A}$. D'altra parte, sappiamo già che il rango di $\tilde{A}$ è uguale al numero dei suoi pivot. □

3.3 Calcolo del rango con l'algoritmo di Gauss

Dal corollario appena enunciato vediamo che, per calcolare il rango di una matrice A, possiamo procedere nel seguente modo:

- Con l'algoritmo di Gauss, riduciamo A ad una matrice a scalini $\tilde{A}$.
- Contiamo il numero dei pivot di $\tilde{A}$: tale numero è proprio il rango di A.

Esempio Calcoliamo il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, già considerata nella sezione precedente.

Soluzione. Riduciamo A a una matrice a scalini. Con le operazioni $R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - R_1, R_4 \to R_4 - 2R_1$ arriviamo alla matrice equivalente:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Con le operazioni $R_3 \to R_3 + R_2, R_4 \to R_4 - R_2$ arriviamo alla matrice a scalini (matrice ridotta):

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\tilde{A}$ ha due pivot, il rango di A vale 2. □

- Osserviamo che, se in una matrice la riga R_i è proporzionale (in particolare, uguale) alla riga R_j, allora possiamo sostituire R_i con una riga nulla, ottenendo sempre una matrice equivalente (perché?). In particolare, se tutte le righe sono proporzionali a una data riga (supposta non nulla), allora il rango vale 1.

Esempio Il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ vale 1.

Esempio Il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ vale 2 (spiegare perché). In particolare, $\det A = 0$.

4 Matrici dipendenti da uno o piú parametri

A volte occorre considerare matrici che dipendono da parametri.

Esempio Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 4-k \\ k & 4 & 4 \end{pmatrix}$ dipendente dal parametro $k \in \mathbf{R}$. Calcolare il rango di A al variare di k.

Soluzione. Risolviamo prima con il metodo degli orlati. È chiaro che $\mathrm{rk}A$ vale 1 oppure 2. Fissiamo il minore $\mu_{1,1} = 1$ e consideriamo i determinanti dei suoi minori orlati:

$$\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{vmatrix} = 4 - k^2 = (2-k)(2+k)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4-k \\ k & 4 \end{vmatrix} = (k-2)^2$$

Ora, entrambi gli orlati hanno determinante nullo se e solo se $k = 2$: in tal caso il rango vale 1. Se $k \neq 2$ il secondo orlato ha determinante non nullo, dunque $\mathrm{rk}A = 2$. Conclusione:

$$\mathrm{rk}A = \begin{cases} 1 \text{ se } k = 2, \\ 2 \text{ se } k \neq 2. \end{cases}$$

Alla stessa conclusione potevamo arrivare usando l'algoritmo di Gauss. Infatti, riduciamo A a un matrice a scalini. Per far questo, è sufficiente l'operazione $R_2 \to R_2 - kR_1$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & k & 4-k \\ 0 & 4-k^2 & k^2-4k+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k & 4-k \\ 0 & (2-k)(2+k) & (k-2)^2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che, se $k \neq 2$, abbiamo due pivot, dunque il rango è 2. Se $k = 2$ si ha $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ quindi il rango è 1. In conclusione:

$$\mathrm{rk}A = \begin{cases} 1 \text{ se } k = 2, \\ 2 \text{ se } k \neq 2. \end{cases}$$

□

Esempio Calcoliamo il rango di $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 3 \\ 2k & 2 & 6 \\ -k & -1 & -3 \end{pmatrix}$ al variare di k.

Soluzione. Vediamo innanzitutto quando il rango è massimo, cioè 3: questo avviene se e solo se $\det A \neq 0$. Ma un calcolo mostra che

$$\det A = 0 \quad \text{per ogni } k.$$

Dunque il rango vale 1 oppure 2. Consideriamo il minore

$$\mu_{12,23} = \begin{pmatrix} k & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},$$

avente determinante $6k - 6$ che si annulla per $k = 1$. Dunque, se $k \neq 1$ il rango è 2; se $k = 1$ la matrice diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

che ha evidentemente rango 1 (tutte le righe sono proporzionali alla prima). In conclusione:

$$\text{rk}A = \begin{cases} 2 \text{ se } k \neq 1, \\ 1 \text{ se } k = 1. \end{cases}$$

5 Il teorema di Rouché-Capelli

La nozione di rango ci permette di dimostrare un risultato, di tipo essenzialmente teorico, sulla compatibilità o meno di un dato sistema lineare. Consideriamo un sistema lineare di m equazioni nelle n incognite $x_1, \dots, x_n$, che possiamo scrivere in forma matriciale

$$AX = B,$$

dove A è la matrice dei coefficienti (di tipo $m \times n$), $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è il vettore colonna delle incognite e B è il vettore colonna dei termini noti. Il sistema è descritto da due matrici: la matrice dei coefficienti, appunto, e la matrice completa A', ottenuta aggiungendo ad A la colonna dei termini noti. Chiaramente A' è di tipo $m \times (n+1)$.

Il teorema di Rouché-Capelli permette di stabilire la compatibilità conoscendo solamente il rango di A e di A'. Precisamente:

Teorema (Rouché-Capelli) *Sia S un sistema lineare di m equazioni in n incognite con matrice dei coefficienti A e matrice completa A'. Allora:*

a) *S è compatibile se e solo se* $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}A'$.

Supponiamo ora che S sia compatibile, e poniamo $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}A' = r$. *Allora:*

b) *Il sistema ammette una e una sola soluzione se e solo se $r = n$.*

c) *Il sistema ammette ∞^{n-r} soluzioni (cioè infinite soluzioni dipendenti da $n-r$ parametri indipendenti) se e solo se $r < n$.*

Dimostrazione. Dimostreremo solamente la parte a) del teorema. Lo schema è il seguente: prima verifichiamo il teorema per i sistemi a scalini, quindi usiamo il fatto che ogni sistema lineare è equivalente a un sistema a scalini. Faremo uso della seguente proprietà delle matrici a scalini:

- Sia $\tilde{A}'$ una matrice a scalini, e sia $\tilde{A}$ la sottomatrice ottenuta da $\tilde{A}'$ sopprimendo l'ultima colonna. Allora anche $\tilde{A}$ è a scalini.

Sia dunque $\tilde{S}$ un sistema a scalini, con matrice dei coefficienti $\tilde{A}$ e matrice completa $\tilde{A}'$, a scalini. Poiché $\tilde{A}$ è la sottomatrice ottenuta da $\tilde{A}'$ sopprimendo l'ultima colonna, vediamo che anche $\tilde{A}$ è a scalini. Ora sappiamo che il sistema a scalini $\tilde{S}$ è compatibile se e solo se l'ultimo pivot della sua matrice completa $\tilde{A}'$ non cade nell'ultima colonna. Ma questo equivale a dire che:

- Il sistema a scalini $\tilde{S}$ è compatibile se e solo se $\tilde{A}$ e $\tilde{A}'$ hanno lo stesso numero di pivot.

Poichè il numero di pivot di una matrice a scalini è proprio il rango, otteniamo infine:

- Il sistema a scalini $\tilde{S}$ è compatibile se e solo se $\tilde{A}$ e $\tilde{A}'$ hanno lo stesso rango.

Abbiamo dunque dimostrato la parte a) del teorema per i sistemi a scalini.

Supponiamo ora che S sia un sistema arbitrario, con matrice dei coefficienti A e matrice completa A'. Applicando l'algoritmo di Gauss alla matrice completa A' vediamo che S risulterà equivalente a un sistema a scalini $\tilde{S}$ con matrice dei coefficienti $\tilde{A}$ e matrice completa $\tilde{A}'$, entrambe a scalini. È evidente che le operazioni elementari effettuate sulle righe di A' inducono operazioni elementari sulle righe di A, poichè A si ottiene da A' sopprimendo l'ultima colonna. Dunque $\tilde{A}$ è equivalente per righe ad A e di conseguenza $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}\tilde{A}$. Ovviamente $\mathrm{rk}A' = \mathrm{rk}\tilde{A}'$. In conclusione, le seguenti affermazioni sono via via equivalenti:

$$
\begin{aligned}
S \text{ è compatibile} &\iff \tilde{S} \text{ è compatibile} \\
&\iff \mathrm{rk}\tilde{A} = \mathrm{rk}\tilde{A}' \\
&\iff \mathrm{rk}A = \mathrm{rk}A'.
\end{aligned}
$$

Questo dimostra la parte a). Le affermazioni b) e c) si possono dimostrare con lo stesso procedimento, ma non entreremo nei dettagli. $\square$

Esempio Sia

$$S : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases} .$$

La matrice dei coefficienti e la matrice completa sono, rispettivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Un calcolo (usare il teorema degli orlati) mostra che $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}A' = 2$. Dunque il sistema è compatibile; poiché $n = 4$ e $r = 2$ il teorema di Rouché-Capelli afferma che il sistema ammette ∞^2 soluzioni. Verifichiamo il risultato con l'algoritmo di Gauss, riducendo A' a una forma a scalini. Con le operazioni $R_2 \to R_2 - 2R_1$ e $R_3 \to R_3 - R_1$ arriviamo alla matrice:

$$A'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_2$ arriviamo alla forma a scalini:

$$\tilde{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il sistema $\tilde{S}$ rappresentato da $\tilde{A}'$ è compatibile, e poichè ci sono due pivot e quattro incognite esso ammette ∞^2 soluzioni. Notiamo anche che la matrice dei coefficienti di $\tilde{S}$ è:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notiamo infine che si ha $\mathrm{rk}\tilde{A} = \mathrm{rk}\tilde{A}' = 2$ e che A è equivalente ad $\tilde{A}$. $\square$

Esempio Consideriamo il sistema: $S : \begin{cases} x + y = \alpha \\ 2x + y = \beta \end{cases}$. Dimostrare che S è compatibile, e ammette un'unica soluzione, per ogni scelta di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Soluzione. Si ha $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 2 & 1 & \beta \end{pmatrix}$. Siccome $\det A = -1 \neq 0$, il rango di A è $r = 2$ (massimo), dunque il rango di A' è anch'esso 2. Dal teorema di Rouché-Capelli otteniamo l'asserto. $\square$

Esempio Discutere il sistema $S : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y + 5z = 0 \\ 2y + 6z = 0 \end{cases}$.

Soluzione. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ ha rango 2: infatti $\det A = 0$ e il minore $\mu_{12,12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante diverso da zero. D'altra parte, la matrice completa $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 3, come si vede considerando il minore ottenuto sopprimendo la prima colonna. Dunque $\mathrm{rk}A \neq \mathrm{rk}A'$ e il sistema è incompatibile. $\square$

Esempio Verificare il risultato dell'esempio precedente con l'algoritmo di Gauss.

Esempio Stabilire per quali valori dei parametri a, b, c il sistema lineare

$$S : \begin{cases} x + y + z = a \\ -x + y + 5z = b \\ 2y + 6z = c \end{cases}$$

è compatibile.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ e ha rango 2, indipendentemente dai valori di a, b, c. Il sistema sarà dunque compatibile se e solo se $\mathrm{rk}A' = 2$. Vediamo quando ciò accade. La matrice completa è

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & 5 & b \\ 0 & 2 & 6 & c \end{pmatrix}$$

Il minore $\mu_{12,12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo. Dunque $\text{rk}A' = 2$ se e solo se tutti i suoi minori orlati hanno determinante nullo, dunque se e solo se:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & b \\ 0 & 2 & c \end{pmatrix} = 0.$$

La prima uguaglianza è verificata per ogni valore di a, b, c; la seconda è verificata se e solo se $a + b - c = 0$. Dunque:

- il sistema è compatibile se e solo se $a + b - c = 0$.

In tal caso esso ammette ∞^1 soluzioni. $\square$

Esempio Discutere la compatibilità del seguente sistema al variare del parametro h:

$$S : \begin{cases} x + hy = 4 - h \\ hx + 4y = 4 \end{cases}$$

Soluzione. $A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ h & 4 \end{pmatrix}$ e quindi $\det A = 4 - h^2$. Ora, se $\det A \neq 0$ allora $\text{rk}A = \text{rk}A' = 2$ (perché?). Dunque, se $h \neq 2$ e $h \neq -2$ il sistema è compatibile, e ammette un'unica soluzione. Discutiamo ora i casi $h = 2$ e $h = -2$. Una verifica diretta mostra che, se $h = 2$ si ha $\text{rk}A = \text{rk}A' = 1$ dunque il sistema è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni; se $h = -2$ allora $\text{rk}A = 1$ mentre $\text{rk}A' = 2$ e il sistema è incompatibile. In conclusione:

$$\begin{cases} \text{se } h \neq 2 \text{ e } h \neq -2 \text{ si ha un'unica soluzione,} \\ \text{se } h = 2 \text{ si hanno } \infty^1 \text{ soluzioni,} \\ \text{se } h = -2 \text{ il sistema è incompatibile.} \end{cases}$$

Esercizio Verificare il risultato con l'algoritmo di Gauss.

5.1 Equazioni significative

Il teorema seguente dice che, in taluni casi, è possibile scartare un certo numero di equazioni, senza alterare l'insieme delle soluzioni del sistema.

Teorema *Sia S un sistema lineare compatibile, con matrice dei coefficienti A e matrice completa A' (quindi $\text{rk}A = \text{rk}A' = p$ per ipotesi). Sia B un minore di A avente ordine p e determinante non nullo. Allora il sistema S è equivalente al sistema ridotto SR che* *si ottiene considerando solo le p equazioni corrispondenti al minore B, cioè* $\mathrm{Sol}(S) = \mathrm{Sol}(SR)$.

Dimostrazione. Omessa.

In effetti, possiamo scartare le equazioni che non corrispondono al minore B fissato, poiché queste sono conseguenza delle equazioni del sistema ridotto. Il sistema ridotto è quindi formato dalle equazioni *significative* di S. Se il rango è basso (rispetto al numero di righe), possiamo scartare molte equazioni; se il rango è massimo, nessuna: sono tutte significative.

Esempio Consideriamo il sistema:

$$S : \begin{cases} 2x + 2y + 3z = -1 \\ x + y - z = 2 \\ x + y + 4z = -3 \\ 3x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Si verifica che $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}A' = 2$, dunque S è compatibile (e ammette ∞^1 soluzioni). Ora

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

e il minore di ordine due dato da $B = \mu_{12,23} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo. Dunque il sistema ridotto è quello formato dalle prime due equazioni:

$$SR : \begin{cases} 2x + 2y + 3z = -1 \\ x + y - z = 2 \end{cases},$$

e si ha $\mathrm{Sol}(S) = \mathrm{Sol}(SR)$. Possiamo dunque scartare le ultime due equazioni: in effetti, si vede subito che la terza equazione è la differenza delle prime due, mentre la quarta ne è la somma.

Infine, osserviamo che il sistema ridotto non è unico: potevamo scartare, ad esempio, le prime due equazioni, scegliendo il minore $B' = \mu_{34,23} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. In ogni caso, le equazioni significative sono esattamente due.

6 Sistemi omogenei

- Un sistema lineare si dice *omogeneo* se i suoi termini noti sono tutti nulli.

I sistemi omogenei formano una classe molto importante di sistemi lineari. In forma matriciale, un sistema omogeneo si scrive:

$$S : AX = O,$$

dove A è la matrice dei coefficienti e $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ è il *vettore colonna nullo*. È evidente che la matrice completa A' di un sistema omogeneo si ottiene aggiungendo ad A una colonna nulla.

Un sistema omogeneo è sempre compatibile, poiché ammette sempre la soluzione nulla (o *banale*) $X = O$, ottenuta uguagliando tutte le variabili a zero. Una soluzione non nulla è detta anche *autosoluzione.*

Esempio Il sistema $S : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$ è omogeneo, con forma matriciale $AX = O$, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Una verifica diretta mostra che il vettore $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione non nulla, dunque un'autosoluzione del sistema.

Il problema è ora quello di stabilire quando un sistema omogeneo ammette autosoluzioni. Sappiamo che, per un sistema lineare qualunque S, si hanno solamente tre possibilità:

1. S è incompatibile,
2. S ammette un' unica soluzione,
3. S ammette infinite soluzioni.

Per un sistema omogeneo la prima alternativa non si realizza mai; dunque o S ammette un'unica soluzione (necessariamente quella nulla) oppure S ammette infinite soluzioni (in particolare, almeno un'autosoluzione). In conclusione:

- Un sistema lineare omogeneo ammette autosoluzioni se e solo se esso ammette infinite soluzioni.

Vediamo ora qualche criterio per l'esistenza di autosoluzioni.

Proposizione *Sia $S : AX = O$ un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite. Allora S ammette autosoluzioni se e solo se il rango di A (matrice dei coefficienti) è minore di n (numero delle incognite).*

Dimostrazione. È una conseguenza immediata del teorema di Rouché-Capelli. Infatti, se $\mathrm{rk}A < n$ il sistema ammetterà infinite soluzioni (precisamente $\infty^{n-\mathrm{rk}A}$ soluzioni) dunque almeno un'autosoluzione per quanto già detto. Il viceversa è ovvio. $\square$

Corollario *Sia $S : AX = O$ un sistema lineare omogeneo* quadrato *(cioè, di n equazioni in n incognite). Allora S ammette autosoluzioni se e solo se* $\det A = 0$.

Dimostrazione. La matrice dei coefficienti A è quadrata, e dunque il rango di A è minore di n precisamente quando il determinante di A è nullo. $\square$

Corollario *Sia $S : AX = O$ un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite. Se $m < n$, se cioè il numero delle equazioni è minore del numero delle incognite, allora S ammette autosoluzioni.*

Dimostrazione. Poiché A è $m \times n$, abbiamo che $\mathrm{rk}A \leq \min\{m, n\}$, in particolare $\mathrm{rk}A \leq m$. Ma per ipotesi $m < n$ dunque $\mathrm{rk}A < n$ e il sistema ammette autosoluzioni grazie alla proposizione appena dimostrata. $\square$

Esempio Consideriamo il sistema lineare omogeneo $S : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$ (quello di prima). Un calcolo mostra che $\det A = 0$: per il primo corollario, S ammette autosoluzioni (cosa che avevamo già verificato). Calcoliamo l'insieme delle soluzioni. Riducendo la matrice completa $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ad una forma a scalini otteniamo:

$$\tilde{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque abbiamo ∞^1 soluzioni, del tipo

$$\mathrm{Sol}(S) = \{ \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \}.$$

Osserviamo che la soluzione generica si scrive

$$\begin{pmatrix} -2t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ed è quindi un multiplo dell'autosoluzione $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio È dato un sistema lineare omogeneo $S : AX = O$. Dimostrare che:

1. Date due soluzioni X_1 e X_2 anche la somma $X_1 + X_2$ è una soluzione.
2. Data una soluzione X e un numero $k \in \mathbf{R}$ anche kX è una soluzione.

Tutto questo si esprime dicendo che

- l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è *chiuso* rispetto alla somma e alla moltiplicazione per uno scalare.

Esempio Stabilire se il sistema omogeneo $S : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{cases}$ ammette autosoluzioni.

Soluzione. Il determinante della matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ vale 1: è diverso da zero, dunque S ammette solamente la soluzione nulla. $\square$

7 Dipendenza e indipendenza lineare di vettori di $\mathbf{R}^n$

7.1 Combinazioni lineari

Ricordiamo che i vettori di $\mathbf{R}^n$ possono essere sommati e moltiplicati per uno scalare. Dati k vettori $v_1, \dots, v_k$ di $\mathbf{R}^n$ e k scalari $a_1, \dots, a_k \in \mathbf{R}$ il vettore:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k$$

è chiamato *combinazione lineare di* $v_1, \dots, v_k$ *a coefficienti* $a_1, \dots, a_k$.

Esempio In $\mathbf{R}^2$ consideriamo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Allora:

$$2v_1 + v_2 - 3v_3 = \begin{pmatrix} -13 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Esempio Scrivere, se possibile, il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, come combinazione lineare dei vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Risulta $v = 2v_1 - v_2$, quindi è possibile. $\square$

7.2 Dipendenza e indipendenza lineare

Una *relazione di dipendenza lineare* tra un certo numero di vettori $v_1, \dots, v_k$ è un'espressione del tipo:

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = O,$$

con la condizione che *almeno uno* dei coefficienti sia non nullo.

Quindi, nel nostro linguaggio, l'identità che si ottiene ponendo tutti i coefficienti uguali a zero:

$$0v_1 + \cdots + 0v_k = O$$

non è una relazione di dipendenza lineare.

Esempio $2v_1 + 4v_2 - 5v_4 = O$ è una relazione di dipendenza lineare tra i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 (si noti che non tutti i coefficienti devono essere non nulli... ne basta uno).

Notiamo che, se esiste una relazione di dipendenza lineare, allora almeno uno dei vettori risulterà combinazione lineare degli altri. Nell'esempio precedente, possiamo risolvere rispetto a v_1 e osservare che:

$$v_1 = -2v_2 + \frac{5}{2} v_4.$$

Definizione a) *I vettori $v_1, \dots, v_k$ di $\mathbf{R}^n$ si dicono* linearmente dipendenti *se esiste una relazione di dipendenza lineare tra di essi; se cioè esiste una combinazione lineare:*

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = O,$$

con almeno un coefficiente non nullo.

b) *I vettori $v_1, \dots, v_k$ si dicono* linearmente indipendenti *se non c'e' alcuna relazione di dipendenza lineare tra di essi, se cioè l'uguaglianza*

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = O$$

è verificata solo quando tutti i coefficienti sono nulli: $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

- È facile verificare che i vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno di essi è combinazione lineare degli altri.

Esempio Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Notiamo che $v_2 = 3v_1$ quindi i due vettori sono legati dalla relazione di dipendenza lineare $-3v_1 + v_2 = 0$: ne segue che v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti.

Esempio Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Vediamo se è possibile trovare una relazione di dipendenza lineare tra di essi. Imponiamo

$$xv_1 + yv_2 = 0,$$

con coefficienti $x, y \in \mathbf{R}$ al momento incogniti. Sviluppando l'identità, otteniamo l'equazione vettoriale:

$$\begin{pmatrix} x + y \\ 2x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che dà luogo al sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}.$$

Si vede subito che l'unica soluzione è quella nulla: $x = y = 0$. Dunque la relazione di dipendenza lineare cercata non esiste, e i due vettori sono linearmente indipendenti.

8 Criterio del rango

È possibile fornire un criterio per decidere se un'insieme di vettori di $\mathbf{R}^n$ è linearmente indipendente oppure no. Tale criterio utilizza il rango di un'opportuna matrice.

Esempio Stabilire se i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti oppure no.

Soluzione. Cerchiamo una relazione di dipendenza lineare $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = O$. Esplicitamente, stiamo cercando numeri reali x_1, x_2, x_3 tali che:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tale equazione vettoriale si traduce nel sistema lineare omogeneo, di 4 equazioni in 3 incognite:

$$S : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Notiamo che la forma matriciale del sistema è $AX = O$, con matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Notiamo anche che la matrice A si ottiene incolonnando i vettori considerati.

Per definizione, i tre vettori saranno linearmente indipendenti se e solo il sistema S ammette solamente la soluzione nulla $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Dalla teoria dei sistemi omogenei ciò accade se e solo $\mathrm{rk}A = n$, dove n è il numero delle incognite: nel nostro caso se e solo se $\mathrm{rk}A = 3$. Un calcolo mostra che in effetti $\mathrm{rk}A = 3$ (considerare il minore formato dalle prime tre righe). In conclusione, i vettori sono linearmente indipendenti. $\square$

Il procedimento è valido in generale. Dati k vettori *colonna* di $\mathbf{R}^n$, diciamo $v_1, \dots, v_k$, denotiamo con

$$\mathrm{Mat}(v_1, \dots, v_k)$$

la matrice (di tipo $n \times k$) ottenuta incolonnando, nell'ordine, i vettori dati.

Ad esempio, se v_1, v_2, v_3 sono i vettori di $\mathbf{R}^4$ dell'esempio precedente, allora:

$$\mathrm{Mat}(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Una verifica mostra che l'equazione vettoriale

$$x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k = O$$

equivale al sistema omogeneo S di n equazioni in k incognite la cui forma matriciale è:

$$S : AX = O$$

dove $A = \mathrm{Mat}(v_1, \dots, v_k)$ e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Dal teorema di Rouche'-Capelli sappiamo che S ammette soluzioni non nulle se e solo se $\mathrm{rk}A < k$ (il numero delle incognite). Quindi i vettori saranno linearmente dipendenti se e solo se $\text{rk}A < k$ e saranno linearmente indipendenti se e solo se $\text{rk}A = k$. In conclusione, abbiamo dimostrato la seguente

Proposizione *I vettori $v_1, \dots, v_k$ dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^n$ sono linearmente indipendenti se e solo se*

$$\text{rk}A = k$$

dove $A = \text{Mat}(v_1, \dots, v_k)$ è la matrice ottenuta incolonnando i vettori dati.

Corollario *n vettori $v_1, \dots, v_n$ di $\mathbf{R}^n$ sono linearmente indipendenti se e solo se il determinante della matrice $\text{Mat}(v_1, \dots, v_n)$ è diverso da zero.*

Esempio Stabilire se i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ di $\mathbf{R}^3$ sono linearmente indipendenti oppure no.

Soluzione. Incolonniamo i vettori e otteniamo la matrice

$$A = \text{Mat}(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Un calcolo mostra che $\det A = 0$ e il rango è minore di 3 (il numero dei vettori). Dunque i vettori sono linearmente dipendenti.

A questo punto sappiamo che esiste una relazione di dipendenza lineare che lega i tre vettori: cerchiamo tale relazione. Risolvendo il sistema

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = O,$$

cioè il sistema omogeneo $S : AX = O$, otteniamo ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = 3t \\ x_3 = 4t \end{cases}$$

con $t \in \mathbf{R}$. Prendendo ad esempio $t = 1$ vediamo che:

$$2v_1 + 3v_2 + 4v_3 = 0,$$

che è la relazione cercata.

8.1 Indipendenza lineare di righe e colonne

Da quanto detto abbiamo la seguente importante interpretazione del rango di una matrice. Una matrice A di tipo $n \times k$ individua n vettori riga di $\mathbf{R}^k$ e k vettori colonna di $\mathbf{R}^n$.

Proposizione *Sia A una matrice $n \times k$. Allora:*

a) *I vettori colonna di A sono linearmente indipendenti se e solo se* $\mathrm{rk}A = k$ *(il numero delle colonne).*

b) *I vettori riga di A sono linearmente indipendenti se e solo se* $\mathrm{rk}A = n$ *(il numero delle righe).*

In particolare, se A è quadrata $n \times n$, allora gli n vettori riga (o colonna) di A sono linearmente indipendenti se e solo se $\det A \neq 0$.

Dimostrazione. a) Basta osservare che, se $v_1, \dots, v_n$ sono i vettori colonna di A allora per definizione $A = \mathrm{Mat}(v_1, \dots, v_k)$. Dunque a) è immediata dalla proposizione precedente. La parte b) si ottiene scambiando le righe e le colonne e ricordando che $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}A^t$. $\square$

Esempio La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ha rango pari a 3. Dunque i tre vettori colonna (appartenenti allo spazio $\mathbf{R}^4$):

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti , mentre i quattro vettori riga (che appartengono allo spazio $\mathbf{R}^3$)

$$w_1 = (1,1,0), \quad w_2 = (2,3,1), \quad w_3 = (1,1,1), \quad w_4 = (1,0,-1)$$

sono linearmente dipendenti.

Osserviamo infine la seguente

Proposizione *Siano $v_1, \dots, v_k$ vettori di $\mathbf{R}^n$. Se $k > n$ tali vettori risultano sempre linearmente dipendenti.*

Dimostrazione. La matrice che si ottiene incolonnando i vettori, cioè $A = \mathrm{Mat}(v_1, \dots, v_k)$, è di tipo $n \times k$, dunque $\mathrm{rk}A \leq \min\{n, k\} \leq n$. Per ipotesi $n < k$ dunque

$$\mathrm{rk}A < k.$$

Per quanto detto in precedenza, i vettori saranno linearmente dipendenti. □

Si avrà dunque che $n+1$ (o piú) vettori di $\mathbf{R}^n$ saranno sempre linearmente dipendenti.

Esempio I vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti, semplicemente perché i vettori sono tre, e appartengono a $\mathbf{R}^2$. Trovare una relazione di dipendenza lineare, ed esprimere il terzo come combinazione lineare degli altri due.