UNIVERSITA' DEGLI STUDI DEL MOLISE

Prova scritta del 02/09/2014 – Analisi Matematica

Corso di studi in Ingegneria edile

Prof. R. Capone

I modulo

ES.1	Studiare la seguente funzione e rappresentarla graficamente evidenziando se presenta discontinuità $$f(x)=\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$
ES.2	Si risolva il seguente limite, senza necessariamente ricorrere ai limiti notevoli $$\lim_{x\to 0}\frac{log(1+sin^2 3x)+tg^3x}{\sqrt{1+arctg^2x}-1+x^4}$$
ES. 3	Si calcoli Il dominio della seguente funzione e lo si rappresenti nel piano cartesiano $$f(x,y)=log(x^2y^2-4)-log(16-x^2-y^2)$$

Svolgimento

SOL. 1	**I.D.** $x+1>0$ $$x\in\,]-1;+\infty[$$ **Studio del segno** $$\frac{\log(x+1)}{(x+1)^2}>0$$ $$\begin{cases}\log(x+1)>0\\(x+1)^2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+1>1\\\forall x\in R-\{0\}\end{cases}$$ La funzione è positiva per $x>0$ **Comportamento agli estremi dell'ID** $$\lim_{x\to -1^+}f(x)=-\infty$$ La retta x=1 è pertanto un asintoto verticale destro $$\lim_{x\to +\infty}f(x)=0$$ La retta y=0 è pertanto un asintoto orizzontale destro

Proprietà di monotonia

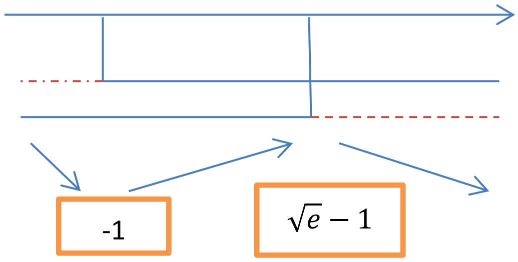
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\log(x+1)}{(x+1)^2}\right)=\frac{1-2\log(x+1)}{(x+1)^3}$$

$$\frac{1-2\log(x+1)}{(x+1)^3}>0$$

$$\left[\begin{array}{c}1-2\log(x+1)>0\\(x+1)^3>0\end{array}\right.$$

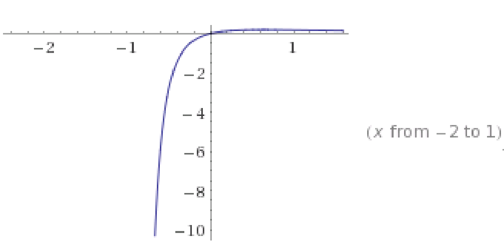
$$\Rightarrow\left[\begin{array}{c}2\log(x+1)<1\\x>-1\end{array}\right.$$

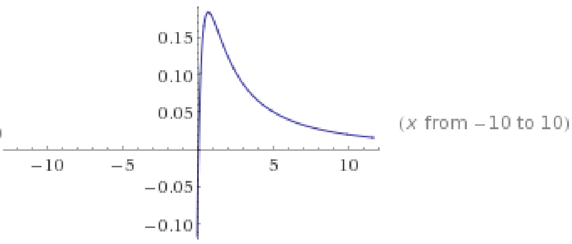
$$\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\log(x+1)<\dfrac{1}{2}\\x>-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{c}x+1<\sqrt{e}\\x>-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{c}x<\sqrt{e}-1\\x>-1\end{array}\right.$$



La funzione è crescente da -1 a $\sqrt{e}-1$
La funzione è decrescente per $x>\sqrt{e}-1$

Il punto $M=\left(\sqrt{e}-1;1/2e\right)$ è un punto di massimo relativo
Derivando ulteriormente e svolgendo i calcoli si ricava la presenza di un flesso nel punto $F\left(e^{\frac{5}{6}}-1;\frac{5}{6e^{5/3}}\right)$





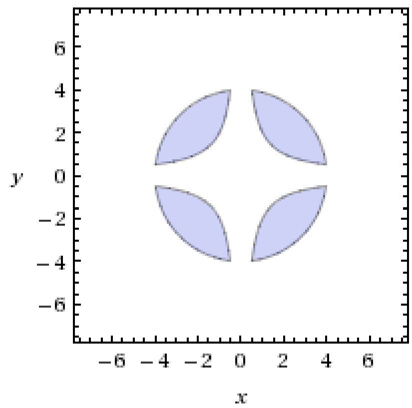
SOL. 2

$$\lim_{x\to0}\frac{log(1+sin^2 3x)+tg^3x}{\sqrt{1+arctg^2x}-1+x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{log(1+sin^2 3x)}{sin^2 3x}\cdot sin^2 3x+\dfrac{tg^3x}{x^3}\cdot x^3}{\dfrac{(1+arctg^2x)^{\frac{1}{2}}-1}{arctg^2x}\cdot arctg^2x+x^4}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{log(1+sin^2 3x)}{sin^2 3x}\cdot\dfrac{sin^2 3x}{9x^2}\cdot 9x^2+\dfrac{tg^3x}{x^3}\cdot x^3}{\dfrac{(1+arctg^2x)^{\frac{1}{2}}-1}{arctg^2x}\cdot\dfrac{arctg^2x}{x^2}\cdot x^2+x^4}=18$$

Sol. 3

Si calcoli Il dominio della seguente funzione e lo si rappresenti nel piano cartesiano

	$f(x,y)=log(x^2y^2-4)-log(16-x^2-y^2)$ Le condizioni per il calcolo del dominio sono: $\begin{cases} x^2y^2-4>0 \\ 16-x^2-y^2>0 \end{cases}$ La prima delle due disequazioni è rappresentata dalla parte di piano esterna alle iperboli $y=\frac{2}{x}$ e $y=-\frac{2}{x}$ La seconda delle due disequazioni è rappresentata dalla parte di piano inclusa nella circonferenza di equazione $x^2+y^2=4$ 

II modulo

Es. 1	Si calcoli il seguente integrale doppio $\iint_D 2xydxdy$ dove D è il dominio definito dalle limitazioni $D=\left\{(x,y)\in R^2: x^2+y^2\geq 1, \frac{x^2}{4}+y^2\leq 1\right\}$
Es. 2	Si risolva almeno una delle seguenti equazioni differenziali: $a. \quad y'-\frac{2(x+1)y}{x^2+x+1}=0$ $b. \quad \begin{cases} y''+y'-2y=-6sin2x-18cos2x \\ y(0)=2 \\ y'(0)=2 \end{cases}$
Es. 3	Dato il campo di forze: $F(x,y)=-\frac{y}{y^2+x^2}\hat{\imath}+\frac{x}{y^2+x^2}\hat{\jmath}$ verificare se esso è irrotazionale, se è conservativo ed, in tal caso, determinarne un potenziale. Calcolare, inoltre, il lavoro compiuto dal campo per spostare un punto di massa m lungo la curva di equazioni parametriche $x(t)=1+\frac{1}{2}cost, y(t)=1+\frac{1}{2}sint, \ con\ t\in[0,2\pi]$

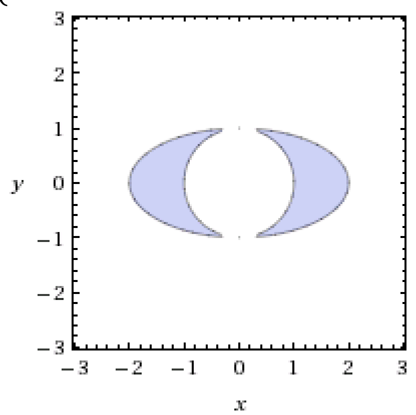
Es. 4	Si calcolino gli estremi della funzione $f(x,y) = xy$ con il vincolo $Z = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Svolgimento

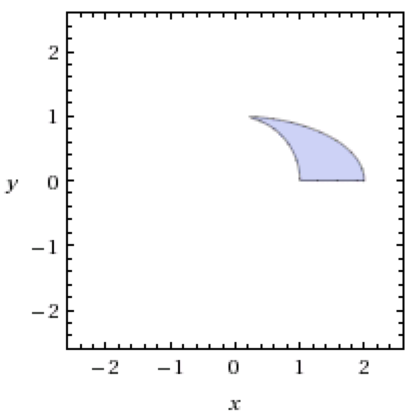
SOL. 1

Il dominio è definito dalle limitazioni

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \geq 1, \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\right\}$$



Uno dei metodi di risoluzione dell'integrale è quello di calcolare l'integrale esteso all'ellisse e sottrarre a questo l'integrale esteso alla circonferenza più interna.
Si può far ricorso alle coordinate polari
Per l'ellisse si ha (limitandoci a considerare come dominio solo la parte di piano posta nel I quadrante):



$$\gamma_1 : \begin{cases} x = 2\rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \end{cases}, \quad 0 \leq \rho \leq 1; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_D 2xydxdy = \iint_T 4\rho cos\theta \cdot \rho sin\theta \cdot 2\rho d\rho d\theta = 8\int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta \cdot sin\theta d\theta\right) d\rho =$$

$$= 8\frac{[\rho^4]_0^1}{4} \cdot \frac{[sin^2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}}{2} = 1$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \end{cases}, \quad 0 \leq \rho \leq 1; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_T 2\rho cos\theta \cdot \rho sin\theta \cdot \rho d\rho d\theta = 2\int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta \cdot sin\theta d\theta \right) d\rho = \frac{1}{4}$$

$$\gamma_1 - \gamma_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Questo risultato va moltiplicato per 4 così da avere come risultato finale 3

SOL. 2

Si risolva almeno una delle seguenti equazioni differenziali:

$$a. \quad y' - \frac{2(x+1)y}{x^2+x+1} = 0$$

E' una equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x+1)y}{x^2+x+1} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2(x+1)}{x^2+x+1}\, dx$$

L'integrale a destra ha come funzione integranda una funzione fratta con denominatore che presenta un discriminante minore di zero.
Pertanto ci aspettiamo come soluzione un logaritmo ed un'arcotangente.

$$y(x) = c_1 \left(x^2+x+1\right) e^{\frac{2\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}}$$

$$b. \quad \begin{cases} y'' + y' - 2y = -6sin2x - 18cos2x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Si tratta di una equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Si considera l'equazione omogenea associata:

$$y'' + y' - 2y = 0$$

e la sua equazione caratteristica

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Le soluzioni dell'equazione fornisce i valori

$$\lambda = -2, \lambda = 1$$

Pertanto la soluzione dell'omogenea associata è:

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

La soluzione dell'equazione completa è:

$$y(x) = y_0(x) + u(x)$$

Dove $u(x)$è del tipo:

$$u(x) = Acos2x + Bsin2x$$
$$u'(x) = -2Asin2x + 2Bcos2x$$
$$u''(x) = -4Acos2x - 4Bsin2x$$

Sostituendo nella equazione di partenza

$$-4Acos2x - 4Bsin2x - 2Asin2x + 2Bcos2x - 2Acos2x - 2Bsin2x = -6sin2x - 18cos2x$$

$$\begin{cases} -4A + 2B - 2A = -18 \\ -4B - 2A - 2B = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6A + 2B = -18 \\ -6B - 2A = -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3A + B = -9 \\ -3B - A = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4A + 2B - 2A = -18 \\ -4B - 2A - 2B = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 0 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + 3\cos 2x$$

<table>
<tr><td></td><td>
Sostituendo le condizioni di Cauchy, si ottiene una equazione particolare:

$$y(x) = -e^{-2x} + 3\cos 2x$$
</td></tr>
<tr><td>SOL. 3</td><td>Esercizio svolto durante il corso</td></tr>
<tr><td>SOL. 4</td><td>
Come prima cosa scriviamo il vincolo nella forma $g(x,y) = 0$ con $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$; osserviamo che f e g sono di classe C^1 e che la condizione $\nabla g(x,y) \neq 0$ è verificata in tutti i punti del vincolo.
Si ha:

$$\nabla g(x, y = (2x, 2y)$$

Il sistema diventa

$$\begin{cases} y - 2\lambda x = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Per risolverlo basta ricavare $\lambda = \frac{y}{2x}$ dalla prima equazione e sostituire nella seconda ottenendo $x^2 + y^2 = 0$, ricavando $x = \pm y$
Si ottengono così due sistemi ognuno con due soluzioni

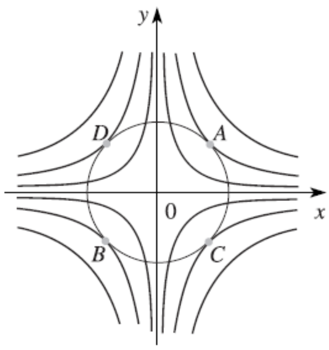
$$\begin{cases} y = x \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \quad A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\begin{cases} y = -x \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \quad C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), D = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Abbiamo trovato quattro candidati possibili: quali tra questi sono punti di massimo vincolato per *f* ? Per scoprirlo basta calcolare i valori di *f* in tali punti e selezionare quello (o quelli) che si trovano alla quota più alta.
Si ha

$$f(A) = f(B) = \frac{1}{2}, \quad f(C) = f(D) = -\frac{1}{2}$$

Dunque i punti A e B rappresentano punti di massimo vincolato, mentre C e D sono punti di minimo di f
Graficamente, se si considera la curva di livello costituita dall'iperbole di equazione $xy = 1/2$, essa risulta essere tangente alla curva $x^2 + y^2 = 1$ nei punti A e B. Analogamente se considero la curva di livello $xy = -1/2$



L'esempio appena visto mette in luce il *significato geometrico del metodo dei moltiplicatori di Lagrange*:
I valori estremi di f con il vincolo g = *k corrispondono a curve di livello di f che sono tangenti al vincolo.*
</td></tr>
</table>