UNIVERSITA' DEGLI STUDI DEL MOLISE

Prova scritta del 23/06/2014 – Analisi Matematica (II modulo)

Corso di studi in Ingegneria edile

Prof. R. Capone

NOME
COGNOME
MATRICOLA

ES.1	Dato il campo di forze: $$F(x,y) = -\frac{y}{y^2+x^2}\hat{\imath} + \frac{x}{y^2+x^2}\hat{\jmath}$$ verificare se esso è irrotazionale, se è conservativo ed, in tal caso, determinarne un potenziale. Calcolare, inoltre, il lavoro compiuto dal campo per spostare un punto di massa m lungo la curva di equazioni parametriche $x(t) = 1 + \frac{1}{2}cost, y(t) = 1 + \frac{1}{2}sint,\ con\ t \in [0,2\pi]$
ES.2	Determinare il seguente integrale doppio con le formule di riduzione di Fubini: $$\iint_D (x^2+y^2)dxdy$$ dove $D = \{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x\}$ Verificare che si perviene allo stesso risultato usando le formule di Gauss-Green
ES. 3	Si risolva almeno una delle seguenti equazioni differenziali: $$a)\ \begin{cases} y'' + 4y' + 13y = e^{-2x}cos3x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1/2 \end{cases}$$ $$b)\quad 2y' + \frac{3x^2+1}{x^3+x+5}y = (x^3+x+5)y^3$$
ES. 4	Stabilire il carattere della seguente serie: $$\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^2\left(1 - cos\frac{1}{n}\right)\right]^n$$

ES 3

Svolgimento:

a) Le radici dell'equazione caratteristica della omogenea associata sono $-2+3i, -2-3i$; quindi l'integrale generale vale

$$y(x;c_1,c_2,c_3) = c_1 e^{-2x}\cos 3x + c_2 e^{-2x}\sin 3x + \bar{y}(x),$$

con

$$\bar{y}(x) = xe^{-2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)\ ;$$

con opportuni calcoli, risulta infine

$$A = 0,\ B = \frac{1}{6}$$

Imponendo

$$y(0) = 1 \Longrightarrow c_1 = 1$$

$$y'(0) = \frac{1}{2} \Longrightarrow c_2 = \frac{5}{6}$$

si ricava infine

$$y(x) = e^{-2x}\cos 3x + \frac{5}{6}e^{-2x}\sin 3x + \frac{1}{6}xe^{-2x}\sin 3x,$$

b) L'equazione differenziale èdel tipo *Bernulli*, dividendo per y^3si può riscrivere come:

$$2\frac{y'}{y^3} + \frac{3x^2+1}{x^3+x+5}\frac{1}{y^2} = (x^3+x+5)$$

ponendo $t = \frac{1}{y^2}$si ottiene $t' = -\frac{2}{y^3}\ y' \Longrightarrow y' = -\frac{t'y^3}{2}$

$$-t' + \frac{3x^2+1}{x^3+x+5}t = (x^3+x+5)$$

$$t' = \frac{3x^2+1}{x^3+x+5}t - (x^3+x+5)$$

Per risolvere l'equazione differenziale lineare calcolo:

$$A(x) = \int \frac{3x^2+1}{x^3+x+5}\,dx = \log\left|x^3+x+5\right|$$

$$\begin{aligned} t(x) &= e^{\log|x^3+x+5|}\left[-\int e^{-\log|x^3+x+5|}(-x^3+x+5)dx + c\right] = \\ &= \left|x^3+x+5\right|\left[-\int \frac{1}{|x^3+x+5|}(-x^3+x+5)dx + c\right] \end{aligned}$$

Osservando che $\left|x^3+x+5\right| = \pm\left(x^3+x+5\right)$

$$t(x) = \left(x^3+x+5\right)[-x+c]$$

ma $t = \frac{1}{y^2}$si ricava infine

$$\frac{1}{y^2} = t(x) = \left(x^3+x+5\right)(-x+c) \quad con \quad y \neq 0 \qquad \Longrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{\left(x^3+x+5\right)(-x+c)}}$$

Si osservi che $y = 0$ è un integrale singolare.

ES. 4

Esercizio 121 *Stabilire il carattere della seguente serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right]^n.$$

Applicando il criterio della radice, si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left[n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right]^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Quindi, la serie converge.

ES. 2

Esercizio 405 *Determinare:*

$$\int\int_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy,$$

dove $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\right\}$.

Calcoliamo l'integrale doppio senza usare le formule di Gauss-Green. Si ha che:

$$\int\int_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int\int_D x^2 dxdy + \int\int_D y^2 dxdy =$$

$$= \int_0^1 x^2 dx \int_{x^2}^x dy + \int_0^1 dx \int_{x^2}^x y^2 dy = \int_0^1 x^2 \left(x - x^2\right) dx + \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^x dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^3 - x^4\right) dx + \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{3}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{12} - \frac{x^7}{21}\right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{21}\right) = \left(\frac{5-4}{20}\right) + \left(\frac{7-4}{28}\right) =$$

$$= \frac{1}{20} + \frac{1}{28} = \frac{3}{35}.$$

Calcoliamo lo stesso integrale facendo uso delle due formule di Gauss-Green, verificando che l'utilizzo dell'una oppure dell'altra conducono sempre allo stesso risultato.

Sia:

$$F(x, y) = \int f(x, y)\, dx = \int \left(x^2 + y^2\right) dx = \frac{x^3}{3} + xy^2.$$

Allora, si ha:

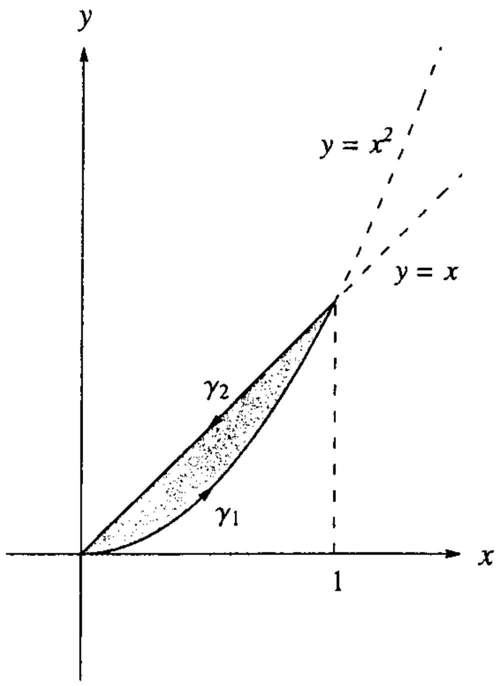
$$\int_{+\partial A} F(x,y)\,dy = \int_{+\partial A} \left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right) dy =$$

$$= \int_{\gamma_1} \left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right) dy - \int_{\gamma_2} \left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right) dy,$$

dove γ_1 *e* γ_2 *hanno rappresentazioni parametriche:*

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases} \quad 0 \le t \le 1,$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = t, \\ y = t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$$



Si noti che γ_2 *ha una parametrizzazione con verso di percorrenza opposto a quello richiesto. Infatti, se ne tiene conto nel segno meno che precede l'integrale curvilineo. Calcoliamo separatamente gli integrali lungo* γ_1 *e* γ_2*. Si ha che:*

$$\int_{\gamma_1} \left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right) dy = \int_0^1 \left(\frac{t^3}{3} + t^5\right) 2t dt = 2\int_0^1 \left(\frac{t^4}{3} + t^6\right) dt =$$

$$= 2\left[\frac{t^5}{15} + \frac{t^7}{7}\right]_0^1 = \frac{44}{105},$$

mentre:

$$\int_{\gamma_2}\left(\frac{x^3}{3}+xy^2\right)dy=\int_0^1\left(\frac{t^3}{3}+t^3\right)dt=\int_0^1\frac{4}{3}t^3dt=\frac{4}{3}\int_0^1 t^3dt=$$

$$=\frac{4}{3}\left[\frac{t^4}{4}\right]_1^0=\frac{1}{3}.$$

Quindi,

$$\int_{+\partial A}F(x,y)\,dy=\frac{44}{105}-\frac{1}{3}=\frac{3}{35}.$$

Consideriamo l'altra formula di Gauss-Green. Sia:

$$F(x,y)=\int f(x,y)\,dy=\int\left(x^2+y^2\right)dy=x^2y+\frac{y^3}{3}.$$

Segue che:

$$-\int_{+\partial A}F(x,y)\,dx=-\int_{\gamma_1}\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+\int_{\gamma_2}\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx,$$

Si può facilmente verificare che:

$$\int_{\gamma_1}\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx=\int_0^1\left(t^4+\frac{t^6}{3}\right)dt=\int_0^1\left(t^4+\frac{t^6}{3}\right)dt=$$

$$=\left[\frac{t^5}{5}+\frac{t^7}{21}\right]_0^1=\frac{1}{5}+\frac{1}{21}=\frac{26}{105},$$

mentre:

$$\int_{\gamma_2}\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{t^3}{3}+t^3\right)dt=\frac{1}{3},$$

e quindi:

$$-\int_{+\partial A}F(x,y)\,dy=-\frac{26}{105}+\frac{1}{3}=\frac{3}{35}.$$

ES. 1

Per il calcolo dell'integrale curvilineo dell'esercizio 1 bastava considerare che la forma è esatta e pertanto l'integrale lungo un alinea chiusa è nullo.