UNIVERSITA' DEGLI STUDI DEL MOLISE

Prova scritta del 13/06/2014 – Analisi Matematica (I modulo)

Corso di studi in Ingegneria edile

Prof. R. Capone

NOME	
COGNOME	
MATRICOLA	

ES.1	Si studi il campo di esistenza, il segno, l'intersezione con gli assi, il comportamento agli estremi del C.E. le proprietà di monotonia della seguente funzione, evidenziando se presenta punti di discontinuità $$y = \frac{e^{\lvert x-2\rvert}}{2x}$$
ES.2	Assegnata la funzione $$f(x,y) = \log_{(y-x^2)}\left(\sqrt{4-x^2}-x\right)$$ se ne determini il campo di esistenza. Si determini, inoltre il gradiente della funzione $$f(x,y) = \log\left(\sqrt{4-x^2}-y\right)$$
ES. 3	Si calcoli il valore del seguente limite $$\lim_{x\to\infty} \sqrt[4]{x^2+4} - \sqrt[4]{x^2+x}$$

2. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[4]{x^2+4} - \sqrt[4]{x^2+x}$$

SVOLGIMENTO:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sqrt[4]{x^2+4} - \sqrt[4]{x^2+x} &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left[\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^{\frac{1}{4}} - \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\right] = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left[\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 + 1 - \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\right] = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left[\frac{\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^{\frac{1}{4}}-1}{\frac{4}{x^2}}\frac{4}{x^2} - \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}-1}{\frac{1}{x}}\frac{1}{x}\right] = \\
&= 0\times\frac{1}{4} - 0\times\frac{1}{4} = 0
\end{aligned}$$

E' stato utilizzato il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha$

Campo di esistenza:

$D=\{x\in R:\quad x\neq 0\}=R-\{0\}$

Simmetrie:

Non presenta simmetrie

Segno:

$f(x)\geq 0\quad\Leftrightarrow x>0$

e non interseca gli assi .

Limiti:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+}\frac{e^{2-x}}{2x}=+\infty\\ \lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0+}\frac{e^{2-x}}{2x}=-\infty\\ \lim_{x\to +\infty} f(x) &= \lim_{x\to +\infty}\frac{e^{x-2}}{2x}=+\infty\\ \lim_{x\to -\infty} f(x) &= \lim_{x\to -\infty}\frac{e^{2-x}}{2x}=-\infty\end{aligned}$$

quindi la retta $x=0$ è un asintoto verticale.Essendo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{x-2}}{2x^2}=0\\ \lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{e^{2-x}}{2x^2}=0\end{aligned}$$

non ci sono asintoti obliqui .

Studio della derivata prima

Sia $g(x)=\frac{e^{x-2}}{2x}\quad,\qquad x\geq 2$

$g'(x)=\frac{(x-1)e^{x-2}}{2x^2}$ e $g'(x)\geq 0\leftrightarrow\quad x\geq 1$ e la funzione è strettamente crescente

Sia $h(x)=\frac{e^{2-x}}{2x}\quad,\qquad x<2$

$h'(x)=-\frac{(x+1)e^{2-x}}{2x^2}$ e $h'(x)\geq 0\leftrightarrow x\leq -1$ quindi la funzione è strettamente crescente se $x<-1$ e strettamente decrescente se $x>-1$. Il punto $x=-1$ è un punto di massimo e $h(-1)=-\frac{e^{-3}}{2}$

Studio della derivata seconda

$g''(x)=\frac{e^{x-2}\left(x^2-2x+2\right)}{2x^3}$ e $g''(x)\geq 0\leftrightarrow x>0\leftrightarrow$ (funzione convessa)

Analogamente

$h''(x)=\frac{e^{2-x}\left(x^2+2x+2\right)}{2x^3}$ e $h''(x)\geq 0\leftrightarrow x>0\leftrightarrow$

la funzione è sempre concava .

Il dominio di tale funzione è rappresentato dalla risoluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{4-x^2}-x>0, \\ y-x^2>0, \\ y-x^2\neq 1, \\ 4-x^2\geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-x^2}>x, \\ y>x^2, \\ y\neq x^2+1, \\ 4-x^2\geq 0. \end{cases} \tag{6.4}$$

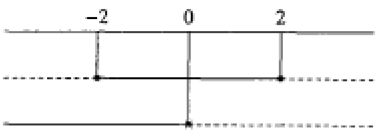
La seconda disequazione del sistema definisce i punti del piano (x, y) *al di sopra della parabola di equazione* $y = x^2$*, avente vertice in* $(0,0)$ *e concavità rivolta verso l'alto. Inoltre, la terza relazione del sistema impone che si escludano i punti appartenenti alla parabola di equazione* $y = x^2 + 1$*, avente concavità rivolta verso l'alto e vertice in* $(0,1)$*. Resta da discutere la prima disequazione, che è irrazionale, con radice di indice pari. Risolverla equivale a determinare la soluzione dei due sistemi:*

$$\begin{cases} 4-x^2\geq 0, \\ x<0, \end{cases} \vee \begin{cases} 4-x^2\geq 0, \\ 4-x^2\geq x^2, \\ x\geq 0. \end{cases}$$

Risolviamo il primo dei due sistemi:

$$\begin{cases} 4-x^2\geq 0, \\ x<0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\leq x\leq 2, \\ x<0, \end{cases}$$

che, come si evince dalla figura che segue,



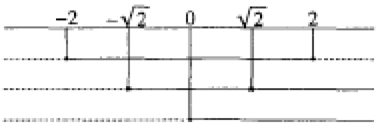
ha soluzione:

$$-2 \leq x < 0.$$

Risolviamo il secondo sistema:

$$\begin{cases} 4-x^2\geq 0, \\ 4-x^2\geq x^2, \\ x\geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2\geq 0, \\ 4\geq 2x^2, \\ x\geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\leq x\leq 2, \\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}, \\ x\geq 0, \end{cases}$$

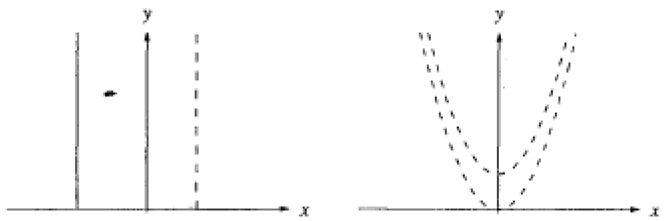
che ha come soluzione $0 \leq x < \sqrt{2}$*, come si evince dalla figura seguente:*



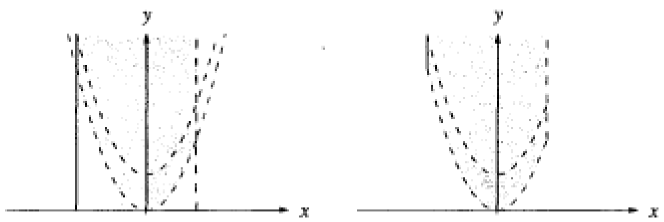
Di conseguenza,

$$\sqrt{4 - x^2} > x \Leftrightarrow -2 \leq x < \sqrt{2}.$$

La prima, la seconda e la terza relazione del sistema (6.4) sono rappresentate graficamente nella figura che segue.



L'intersezione di tali regioni e il dominio della funzione sono rappresentate nella seguente figura:



Si tenga presente che la quarta disequazione è stata, di fatto, inclusa nella prima.