# SISTEMI LINEARI

Sistemi lineari e forma matriciale (definizioni e risoluzione).
Teorema di Rouché-Capelli. Sistemi lineari parametrici.

---

**Esercizio 1** *Risolvere il sistema omogeneo la cui matrice è*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 2** *Verificare se* $(2, 1, 1)$ *è soluzione del sistema*

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y - z = 3. \end{cases}$$

*Trovare poi tutte le soluzioni del sistema.*

**Esercizio 3** *Risolvere il seguente sistema:*

$$\begin{cases} z + w = 2 \\ y + z = 1 \\ x + y = 4 \\ y + w = 5 \\ x + z = 1. \end{cases}$$

**Esercizio 4** *Risolvere i seguenti sistemi lineari:*

$$S_1 : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 2 \\ 2x - 3y = 1 \\ 4x - 7y = 3 \end{cases} \quad ; \quad S_2 : \begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x - z = 1 \\ 5x - 2y - z = -1 \end{cases} \quad ; \quad S_3 : \begin{cases} x - y + 2t = 0 \\ 2x + y + z - t = 0 \\ x - z - t = 0 \end{cases} .$$

*Le soluzioni di quali sistemi formano un sottospazio?*

**Esercizio 5** *Scrivere un sistema lineare di 3 equazioni in 2 incognite avente (1,2) come unica soluzione. È vero che una delle equazioni è combinazione lineare delle altre? È vero che sono tutte proporzionali?*

**Esercizio 6** *Costruire, se siste, un sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite in modo che sia verificata, di volta in volta, una delle seguenti proprietà:*

*1) il sistema ammetta una e una sola soluzione;*

*2) il sistema ammetta* $\infty^1$ *soluzioni;*

*3) il sistema ammetta* $\infty^2$ *soluzioni;*

*4) il sistema non ammetta soluzioni.*

**Esercizio 7** *Sia* $t$ *un numero reale e consideriamo la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

*Risolvere per* $t = 0$ *e* $t = 1$ *il sistema in 3 incognite* $AX = 0$.

**Esercizio 8** *Sia $t$ un numero reale e consideriamo le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & t \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Risolvere per $t = 0$ e $t = 1$ il sistema matriciale $AX = B$.*

**Esercizio 9** *Risolvere il sistema di matrice completa*

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

**Esercizio 10** *Utilizzando la regola di Cramer, risolvere i seguenti sistemi ($h$ è un parametro reale):*

$$S_1 : \begin{cases} -2x + y + z = -1 \\ x - z = 1 \\ 5x - 2y - z = -1 \end{cases} \quad ; \quad S_2 : \begin{cases} hx + (2h-1)y = 2 \\ x + hy = 1 \end{cases}$$

*(attenzione: discutere il secondo sistema anche per i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui non è utilizzabile la regola di Cramer.)*

**Esercizio 11** *Date le seguenti matrici, discutere la risolubilità dei sistemi lineari $AX = B$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, specificando il numero di soluzioni nei vari casi e, in quelli in cui il sistema sia risolubile, calcolandone le soluzioni:*

$$S_1 : (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 1 & k^2 - 1 \\ -3 & 2k & -2 & 2k - 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right); \quad S_2 : (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} k & -k & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 & 0 \end{array}\right);$$

$$S_3 : (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 2k - 1 \\ 1 & k & 1 & 0 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad S_4 : (A \mid B) = \left(\begin{array}{cc|c} k & 2 & k \\ 1 & -k & 0 \\ 3 & k - 1 & 1 \end{array}\right);$$

$$S_5 : (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & -k \\ k + 1 & 1 & -1 & 0 \\ k & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

**Esercizio 12** *Discutere al variare dei parametri reali $a$ e $b$ e risolvere nei casi di indeterminazione i seguenti sistemi lineari $AX = B$ :*

$$S_1 : (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 2 \\ a + 1 & 2 & a + 2 & 3b - 2 \\ 1 & a & a + 2 & b + 2 \end{array}\right); \quad S_2 : (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b + 2 \\ a^2 & 0 & a & b \\ 2 & a & -4 & b^2 \end{array}\right);$$

$$S_3 : (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & b(b + 1) \\ 1 & 0 & a^2 & b(b - 2) \\ 0 & a + 1 & -3 & 0 \end{array}\right); \quad S_4 : (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & -a & b + 1 \\ a & 0 & 2 & 0 & b + 4 \\ 1 & a & 1 & a & b + 1 \end{array}\right).$$

**Esercizio 13** *Dato il sistema lineare:*

$$S : \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 2 \\ 5x - y = -1 \end{cases} ,$$

*stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere e quali false:*

*(i)* *non ha soluzioni;*

*(ii)* *ha* $\infty^1$ *soluzioni perché* $\rho(A) = \rho(A \mid B) = 2$;

*(iii)* *ha una sola soluzione perché* $\rho(A) = \rho(A \mid B) = 2$;

*(iv)* *ha* $(1, -1)$ *tra le sue soluzioni.*

**Esercizio 14** *Dato il sistema lineare:*

$$S : \begin{cases} x + u = 0 \\ y + 2t = 0 \\ 2x + y + z + 2t + 2u = 1 \\ y + z = 3 \end{cases},$$

*stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere e quali false:*

*(i)* *ha una sola soluzione;*

*(ii)* *non ha soluzioni perché* $\rho(A \mid B) = 4$;

*(iii)* *ha infinite soluzioni;*

*(iv)* *ha solo 3 soluzioni.*

**Esercizio 15** *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

*stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere e quali false:*

*(i)* $A$ *non è invertibile;*

*(ii)* $A$ *è invertibile e la sua inversa è* $A^T$;

*(iii)* $A$ *è invertibile e la sua inversa è* $-A^T$;

*(iv)* $AX = B$ *ha* $\infty^1$ *soluzioni;*

*(v)* $AX = B$ *ha una sola soluzione.*

**Esercizio 16** *Sapendo che* $(1, 1, -1)$ *è soluzione del sistema lineare*

$$S : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases},$$

*stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere e quali false:*

*(i)* $r(A) = r(A \mid B)$;

*(ii)* *il sistema ha un'unica soluzione;*

*(iii)* $A$ *non è invertibile;*

*(iv)* *il sistema ha 3 soluzioni.*

**Esercizio 17** *Sia* $AX = B$ *un sistema lineare di* $m$ *equazioni in* $n$ *incognite. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:*

*(i)* *se* $n < m$ *il sistema è sempre privo di soluzioni;*

*(ii)* *se* $n = m + 1$ *il sistema ha sempre almeno una soluzione;*

*(iii)* *se* $n > m$ *il sistema ha sempre infinite soluzioni;*

*(iv)* *il sistema ha sempre almeno una soluzione se* $B = 0$.

**SVOLGIMENTI**

---

**Esercizio 1** Si tratta di risolvere il sistema

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(tante incognite quante le colonne di $A$ e tante equazioni quante le sue righe). La matrice

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 4 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

del sistema è già ridotta per righe (sono in grassetto gli elementi speciali), quindi il sistema si risolve facilmente per sostituzione: si ottiene

$$\begin{cases} x + 4z = 0 \\ y + 5z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -4z \\ y = -5z \\ w = 0 \\ z \in \mathbb{R} \text{ qualsiasi.} \end{cases}$$

Tale soluzione dipende da 1 parametro libero e, in termini vettoriali, si può anche scrivere nella forma $(x, y, z, w) = (-4z, -5z, z, 0) = z\,(-4, -5, 1, 0)$ con $z \in \mathbb{R}$ qualsiasi.

**Esercizio 2** Il vettore (2,1,1) è soluzione del sistema in quanto le sue componenti $x = 2, y = 1, z = 1$ soddisfano entrambe le equazioni del sistema, come si vede subito sostituendo.
La generica soluzione del sistema si può allora ottenere sommando a (2,1,1) la generica soluzione del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases},$$

che ha poche equazioni e quindi può essere facilmente risolto per sostituzione: si ottiene

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + z \\ 3x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = -3x \\ x \in \mathbb{R} \text{ qualsiasi.} \end{cases}$$

Dunque il sistema completo ha $\infty^1$ soluzioni, della forma $(x, y, z) = (2, 1, 1) + x\,(1, -2, -3)$ con $x \in \mathbb{R}$ qualsiasi.

**Esercizio 3** Si tratta di un sistema lineare completo $AX = B$ di 5 equazioni nelle 4 incognite $x, y, z, w$. La sua matrice (ottenuta disponendo ordinatamente sulle righe i 4 coefficienti con cui le incognite $x, y, z, t$ compaiono nelle 5 equazioni) è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mentre il vettore dei termini noti è

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Riduciamo *per righe* la matrice completa $(A \mid B)$ del sistema: operando ad esempio le trasformazioni indicate, si ottiene

$$(A \mid B) \quad = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_5} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_2]{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_5} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_5 \to R_5 + 2R_3]{R_4 \to R_4 + R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_5 \to R_5 - 2R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Da qui si vede che $\rho(A) = 4 \neq 5 = \rho\,(A \mid B)$ e pertanto il sistema è incompatibile (teorema di Rouché-Capelli).

**Esercizio 4** Le matrici dei sistemi sono

$$S_1 : (A_1 \mid B_1) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -7 & 3 \end{array}\right), \qquad S_2 : (A_2 \mid B_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right),$$

$$S_3 : A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

• Riduciamo per righe la matrice $(A_1 \mid B_1)$: operando le trasformazioni elementari indicate, si ottiene

$$(A_1 \mid B_1) \xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - 4R_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A_1' \mid B_1')$$

ed il sistema $S_1$ è equivalente al sistema $A_1'X = B_1'$. Dunque

$$S_1 : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

cioè $S_1$ ha l'unica soluzione $(x, y) = (-1, -1)$.

• Riduciamo per righe la matrice $(A_2 \mid B_2)$: operando le trasformazioni elementari indicate, si ottiene

$$(A_2 \mid B_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 5R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

e quindi risulta $\rho(A_2 \mid B_2) = 3 \neq 2 = \rho(A_2)$. Dunque $S_2$ è incompatibile (teorema di Rouché-Capelli).

• Riduciamo per righe la matrice $A$: operando le trasformazioni elementari indicate, si ottiene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & 0 & -8 \end{pmatrix} = A'$$

ed il sistema $S_3$ è equivalente al sistema $A'X = 0$. Dunque

$$S_3 : \begin{cases} x - y + 2t = 0 \\ 3y + z - 5t = 0 \\ 4y - 8t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 2t \\ z = 5t - 3y \\ y = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -t \\ y = 2t \\ t \in \mathbb{R} \text{ qualsiasi.} \end{cases}$$

cioè $S_3$ ha $\infty^1$ soluzioni, date da $(x, y, z, t) = t\,(0, 2, -1, 1)$ con $t \in \mathbb{R}$ qualsiasi.

• Solo le soluzioni del terzo sistema formano sottospazio (in accordo col fatto che le soluzioni di un sistema lineare formano sottospazio se e solo se il sistema è omogeneo) e in particolare si tratta di un sottospazio di dimensione 1 di $\mathbb{R}^4$, con base $\{(0, 2, -1, 1)\}$.

**Esercizio 5** Per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema cercato deve avere matrice completa $(A \mid B)$ tale che $\rho(A \mid B) = \rho(A) = 2$ (n. delle incognite), ad esempio

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Qualunque sistema con le caratteristiche richieste ha dunque un'equazione che è combinazione lineare delle altre due (in modo che $\rho(A \mid B) < 3$), ma non può avere equazioni tutte proporzionali (altrimenti avrebbe rango 1 ed ammetterebbe $\infty^{2-1}$ soluzioni).

**Esercizio 6** *1)* Un siffatto sistema non esiste, perchè per il teorema di Rouché-Capelli dovrebbe avere matrice completa $(A \mid B)$ tale che $\rho(A \mid B) = \rho(A) = 3$ (n. delle incognite), il che è impossibile essendo $A$ di tipo $2 \times 3$.

*2)* Per il teorema di Rouché-Capelli, occorre e basta che il sistema abbia matrice completa $(A \mid B)$ tale che $\rho(A \mid B) = \rho(A) = 3 - 1 = 2$ (n. delle incognite diminuito del n. di parametri liberi), ad esempio

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

*3)* Per il teorema di Rouché-Capelli, occorre e basta che il sistema abbia matrice completa $(A \mid B)$ tale che $\rho(A \mid B) = \rho(A) = 3 - 2 = 1$ (n. delle incognite diminuito del n. di parametri liberi), ad esempio

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

*4)* Per il teorema di Rouché-Capelli, occorre e basta che il sistema abbia matrice completa $(A \mid B)$ tale che $\rho(A \mid B) \neq \rho(A)$, ad esempio

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

**Esercizio 7** Per ogni $t$ reale, la matrice del sistema

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & 7 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

è già ridotta per righe (sono in grassetto gli elementi speciali), quindi il sistema si risolve facilmente per sostituzione. Per $t = 0$ si ottiene

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 0 \\ y + 7z = 0 \\ z \in \mathbb{R} \text{ qualsiasi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3\,(-7z) - 5z \\ y = -7z \\ z \in \mathbb{R} \text{ qualsiasi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16z \\ y = -7z \\ z \in \mathbb{R} \text{ qualsiasi.} \end{cases}$$

Tale soluzione dipende da 1 parametro libero e, in termini vettoriali, si può anche scrivere $(x, y, z) = z\,(16, -7, 1)$ con $z \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Per $t = 1$ si ha invece

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 0 \\ y + 7z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e quindi il sistema ammette solo la soluzione nulla $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

**Esercizio 8** La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

non è ridotta per righe, quindi conviene procedere alla riduzione della matrice completa $(A \mid B)$ del sistema. Operando ad esempio le trasformazioni elementari indicate, si ottiene

$$\begin{aligned} (A \mid B) \quad &= \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & t & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & t & 0 & 0 \end{array}\right) \\ &\overset{R_2 \to R_2 - 2R_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & t & 0 & 0 \end{array}\right) = (A' \mid B') \end{aligned}$$

ed il sistema $AX = B$ è equivalente al sistema $A'X = B'$, ossia

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 = (0, 1) \\ -3X_2 = (1, -1) \\ tX_2 = (0, 0) \end{cases} \tag{1}$$

dove $X_1, X_2$ sono i vettori riga (di lunghezza 2) della matrice incognita

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

(che deve essere di tipo $2 \times 2$ per risolvere $AX = B$ con $A$ e $B$ di tipo $3 \times 2$). Per $t = 0$, la matrice $(A' \mid B')$ è ridotta per righe ed il sisitema è compatibile ($\rho(A) = \rho(A \mid B) = 2$); si ottiene

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 = (0,1) \\ -3X_2 = (1,-1) \\ (0,0) = (0,0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = (0,1) - 2X_2 \\ X_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = (0,1) - 2\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ X_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \end{cases}$$

cioè

$$X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Per $t = 1$, la matrice $(A' \mid B')$ non è ridotta, ma si vede subito che il sistema (**??**) è incompatibile: esso diventa

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 = (0,1) \\ -3X_2 = (1,-1) \\ X_2 = (0,0) \end{cases}$$

dove le ultime due equazioni sono incompatibili.

**Esercizio 9** Poiché la matrice quadrata $A$ è ridotta con righe tutte non nulle, essa è invertibile e quindi il sistema $AX = B$ equivale a $X = A^{-1}B$. Calcolata

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

si ottiene dunque l'unica soluzione

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 10** • Il determinante della matrice $A$ del sistema $S_1$ è

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

quindi il sistema ha soluzione unica, la quale può essere determinata con la regola di Cramer. Calcoliamo i determinanti delle 3 matrici ottenute sostituendo una colonna di $A$ con la colonna dei termini noti del sistema: si ottiene

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

Dunque il sistema ha la soluzione unica $(x, y, z)$ data da

$$x = \frac{2}{-2} = -1, \quad y = \frac{\Delta_2}{\det A} = \frac{2}{-2} = -1, \quad z = \frac{\Delta_3}{\det A} = \frac{4}{-2} = -2.$$

• Il determinante della matrice $A_h$ del sistema $S_2$ è

$$\det A_h = \begin{vmatrix} h & 2h-1 \\ 1 & h \end{vmatrix} = h^2 - 2h + 1 = (h-1)^2$$

e quindi la regola di Cramer è applicabile per ogni $h \neq 1$. In tal caso, $S_2$ ha la soluzione unica $(x, y)$ data da

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2h-1 \\ 1 & h \end{vmatrix}}{(h-1)^2} = \frac{1}{(h-1)^2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} h & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{(h-1)^2} = \frac{h-2}{(h-1)^2}.$$

Per $h = 1$, il sistema diventa

$$S_2 : \begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

che è ovviamente incompatibile.

**Esercizio 11** Per confrontare il rango della matrice dei coefficienti $A$ con il rango della matrice completa $(A \mid B)$, e discutere quindi la compatibilità del sistema in base al teorema di Rouché-Capelli, si può procedere alla riduzione simultanea per righe delle due matrici, ossia si può *ridurre per righe* $(A \mid B)$ *scegliendo gli elementi speciali sulle colonne di* $A$. Nel caso in cui $A$ sia quadrata, si può anche calcolare prima il determinante di $A$ e scindere i due casi $\det A \neq 0$ e $\det A = 0$.
Si tenga presente che le scritture delle soluzioni trovate di seguito dipendono dalla scelta delle trasformazioni elementari operate nella riduzione e quindi possono cambiare effettuando scelte diverse (si consiglia pertanto di controllare le proprie risostituendo nel sistema).

• $A$ è quadrata e risulta

$$\det A = \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ -3 & 2k & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\,(k+3)\,(k-1)\,.$$

Dunque per ogni $k$ tale che $2k^2 + 4k - 6 \neq 0$, ossia $k \neq -3, 1$, c'è soluzione unica data da (regola di Cramer)

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\begin{vmatrix} k^2-1 & 0 & 1 \\ 2k-2 & 2k & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{2\,(k+3)\,(k-1)} = \frac{2\,(k-1)\left(k^2+3k+4\right)}{2\,(k+3)\,(k-1)} = \frac{k^2+3k+4}{k+3}, \\
y &= \frac{\begin{vmatrix} k & k^2-1 & 1 \\ -3 & 2k-2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2\,(k+3)\,(k-1)} = \frac{(5k+3)\,(k-1)}{2\,(k+3)\,(k-1)} = \frac{5k+3}{2\,(k+3)}, \\
z &= \frac{\begin{vmatrix} k & 0 & k^2-1 \\ -3 & 2k & 2k-2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{2\,(k+3)\,(k-1)} = \frac{-2\,(5k+3)\,(k-1)}{2\,(k+3)\,(k-1)} = -\frac{5k+3}{k+3}.
\end{aligned}$$

Per $k = -3$, risulta

$$S_1 : \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 8 \\ -3 & -6 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & -6 & -3 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

da cui si vede che $(A \mid B)$ ha rango 3, mentre $A$ ha rango 2 (in quanto $(0, -6, -3)$ e $(0, 2, 1)$ sono linearmente dipendenti). Dunque il sistema è incompatibile.
Per $k = 1$, risulta

$$S_1 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

e perciò

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{l} x + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = 2y \\ z = -2y \\ y \in \mathbb{R} \text{ qualsiasi.} \end{array} \right.$$

Dunque $S_1$ ha $\infty^1$ soluzioni, date da $(x, y, z) = y\,(2, 1, -2)$ con $y \in \mathbb{R}$ qualsiasi (sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$).

• $S_2$ è omogeneo e pertanto è sempre compatibile, con soluzioni che dipendono da $4 - \rho\,(A)$ parametri liberi (4 è il n. delle incognite) e formano sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Poiché

$$A \; = \; \begin{pmatrix} k & -k & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ k & -k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - kR_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & k & k & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -2 & -1 & 0 \\ 0 & k & k & \mathbf{1} \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

(sono in grassetto gli elementi speciali), risulta

$$\rho\,(A) = \rho\,(A') = \left\{ \begin{array}{ll} 2 & \text{se } k = 1 \\ 3 & \text{se } k \neq 1 \end{array} \right.$$

e pertanto $S_2$ ha $\infty^2$ soluzioni per $k = 1$ ed $\infty^1$ soluzioni per $k \neq 1$.
In ogni caso, $S_2$ è equivalente al sistema omogeneo di matrice $A'$. Se $k = 1$, allora

$$S_2 : \left\{ \begin{array}{l} x - 2y - z = 0 \\ y + z + w = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = 2y + z \\ w = -y - z \\ y, z \in \mathbb{R} \text{ qualsiasi} \end{array} \right.$$

e dunque le soluzioni di $S_2$ sono della forma

$$(x, y, z, w) = (2y + z, y, z, -y - z) = y\,(2, 1, 0, -1) + z\,(1, 0, 1, -1)$$

con $y, z \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Se $k \neq 1$, allora

$$S_2 : \left\{ \begin{array}{l} x - 2y - z = 0 \\ ky + kz + w = 0 \\ (1-k)\,y = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ w = -kz \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \text{ qualsiasi} \end{array} \right.$$

e dunque le soluzioni di $S_2$ sono della forma

$$(x, y, z, w) = (z, 0, z, -kz) = z\,(1, 0, 1, -k)$$

con $z \in \mathbb{R}$ qualsiasi.

• Poiché $A$ ha due righe uguali, risulta $\det A = 0$ per ogni $k$. Procediamo allora alla riduzione simultanea; operando la trasformazioni indicate, si ottiene

$$(A \mid B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 2k-1 \\ 1 & k & 1 & 0 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 2k-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2k \\ k-1 & 1-k & 0 & 2-2k \end{array} \right),$$

da cui si vede che risulta

$$\rho\,(A) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se } k = 1 \\ 2 & \text{se } k \neq 1 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \rho\,(A \mid B) = \left\{ \begin{array}{ll} 2 & \text{se } k = 1 \text{ oppure } k = 1/2 \\ 3 & \text{se } k \neq 1, 1/2. \end{array} \right.$$

Dunque il sistema è compatibile (cioè $\rho(A) = \rho(A \mid B)$) se e solo se $k = 1/2$, nel qual caso si hanno $\infty^1$ soluzioni. Più precisamente, si ottiene

$$S_3 : \begin{cases} x + \frac{1}{2}y + z = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + \frac{3}{2}x + z = 0 \\ \frac{1}{2}y = 1 + \frac{1}{2}x \end{cases} \quad \begin{cases} z = -1 - \frac{3}{2}x \\ y = 2 + x \\ x \in \mathbb{R} \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

e dunque le soluzioni di $S_3$ sono della forma

$$(x, y, z) = \left(x, 2 + x, -1 - \frac{3}{2}x\right) = (0, 2, -1) + x\left(1, 1, -\frac{3}{2}\right)$$

con $x \in \mathbb{R}$ qualsiasi.

• Osserviamo che il rango di $A$ non può superare 2 e iniziamo allora ad escludere i valori di $k$ per i quali $\rho(A \mid B) = 3$, cioè quelli che non annullano $\det(A \mid B)$. Si ha

$$\begin{vmatrix} k & 2 & k \\ 1 & -k & 0 \\ 3 & k-1 & 1 \end{vmatrix} = (3k + 2)(k - 1)$$

e dunque il sistema è incompatibile per ogni $k \neq 1, -2/3$.
Per $k = 1$, si ha

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -2 \end{array}\right),$$

da cui si vede che $\rho(A) = \rho(A \mid B) = 2$ e pertanto il sistema ha soluzione unica. Più precisamente, risulta

$$S_4 : \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Per $k = -2/3$, si ha

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cc|c} -2/3 & 2 & -2/3 \\ 1 & 2/3 & 0 \\ 3 & -5/3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + \frac{9}{2}R_1]{R_2 \to R_2 + \frac{3}{2}R_1} \left(\begin{array}{cc|c} -2/3 & 2 & -2/3 \\ 0 & 11/3 & -1 \\ 0 & 22/3 & -2 \end{array}\right),$$

da cui si vede che $\rho(A) = \rho(A \mid B) = 2$ e pertanto il sistema ha soluzione unica. Più precisamente, risulta

$$S_4 : \begin{cases} -\frac{2}{3}x + 2y = -\frac{2}{3} \\ \frac{11}{3}y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{3}x = \frac{2}{3} + 2y = \frac{2}{3} - \frac{6}{11} = \frac{4}{33} \\ y = -\frac{3}{11} \end{cases}.$$

• Ragionando come per $S_1$, si trova che $S_5$ ha soluzione unica per $k \neq 0, -2$, data da

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -k & 1 & k \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-k(2+k)} = -\frac{1}{k}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -k & k \\ k+1 & 0 & -1 \\ k & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-k(2+k)} = \frac{1}{k}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -k \\ k+1 & 1 & 0 \\ k & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-k(2+k)} = -1.$$

Per $k = 0$, il sistema risulta incompatibile, mentre per $k = -2$ ci sono $\infty^1$ soluzioni, date ad esempio da

$$(x, y, z) = \left(1 + \frac{1}{2}z, 1 + \frac{3}{2}z, z\right) = (1, 1, 0) + z\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$$

con $z \in \mathbb{R}$ qualsiasi.

**Esercizio 12** Le matrici dei coefficienti dei primi tre sistemi sono quadrate e perciò in tali casi possiamo calcolare il determinante di $A$: per i valori del parametro $a$ per i quali il determinante risulta diverso da 0 si avrà rango massimo uguale al rango della matrice completa ed il sistema ammetterà dunque una ed una sola soluzione; resteranno poi da studiare i casi di rango non massimo, che corrispondono a valori particolari di $a$ e quindi saranno discussi in funzione dell'unico parametro rimasto $b$.

• Si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a+1 & 2 & a+2 \\ 1 & a & a+2 \end{vmatrix} = -(a-1)(a+2)^2$$

e dunque $S_1$ è determinato (cioè ha soluzione unica) per ogni $a \neq -2, 1$ e ogni $b \in \mathbb{R}$.
Se $a = -2$, si tratta di studiare il sistema dato da

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 3b-2 \\ 1 & -2 & 0 & b+2 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3b \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right).$$

Risulta $\rho(A) \neq \rho(A \mid B)$ per ogni $b \neq 0$ (sistema incompatibile) e $\rho(A) = \rho(A \mid B) = 1$ per $b = 0$, nel qual caso ci sono $\infty^2$ soluzioni, della forma $(x, y, z) = (2 + 2y, y, z) = (2, 0, 0) + y(2, 1, 0) + z(0, 0, 1)$ con $y, z \in \mathbb{R}$ qualsiasi.
Se $a = 1$, si tratta di studiare il sistema

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3b-2 \\ 1 & 1 & 3 & b+2 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3(b-2) \\ 0 & 0 & 3 & b \end{array}\right)$$
$$\overset{R_3 \to R_3 - R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3(b-2) \\ 0 & 0 & 0 & -2(b-3) \end{array}\right).$$

Risulta $\rho(A) \neq \rho(A \mid B)$ per ogni $b \neq 3$ (sistema incompatibile) e $\rho(A) = \rho(A \mid B) = 2$ per $b = 3$, nel qual caso ci sono $\infty^1$ soluzioni, della forma $(x, y, z) = (2 - y, y, 1) = (2, 0, 1) + y(-1, 1, 0)$ con $y \in \mathbb{R}$ qualsiasi.

Analogamente si ottiene quanto segue circa $S_2$ ed $S_3$.

• $S_2$ ha soluzione unica per $a \neq 0, -1, -2$ e $\forall b \in \mathbb{R}$.
Per $a = -2$ oppure $a = -1$: il sistema è incompatibile per ogni $b \in \mathbb{R}$.
Per $a = 0$: non ci sono soluzioni se $b \neq 0$, ci sono $\infty^1$ soluzioni se $b = 0$, date da $\{(2z, 2 - 3z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

• $S_3$ ha soluzione unica per $a \neq 0, 2, -2$.
Per $a = 0$: non ci sono soluzioni se $b \neq 0$, ci sono $\infty^1$ soluzioni se $b = 0$, date da $\{(0, 3z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.
Per $a = 2$: non ci sono soluzioni se $b \neq 0$, ci sono $\infty^1$ soluzioni se $b = 0$, date da$\{(-4z, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.
Per $a = -2$: non ci sono soluzioni se $b \neq 0$, ci sono $\infty^1$ soluzioni se $b = 0$, date da $\{(-4z, -3z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

• La matrice dei coefficienti di $S_4$ è di tipo $3 \times 2$, quindi procediamo alla riduzione simultanea di $A$ e $(A \mid B)$. Si ha

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & -a & b+1 \\ a & 0 & 2 & 0 & b+4 \\ 1 & a & 1 & a & b+1 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 \to R_2 - aR_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & -a & b+1 \\ 0 & -a^2 & 2 & a^2 & b - ab - a + 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2a & 0 \end{array}\right) = (A' \mid B')$$

e quindi risulta $\rho(A) = \rho(A \mid B) = 3$ se $a \neq 0$ e $\rho(A) = 2$ se $a = 0$.
Nel primo caso, il sistema ha $\infty^1$ soluzioni per ogni $b \in \mathbb{R}$, le quali si possono ricavare per sostituzione

risolvendo $A'X = B'$; si trova

$$S_4 : \begin{cases} x = b + 1 - ay + aw \\ -a^2 y = b - ab - a + 4 - a(a-4)w \\ z = -2aw \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{b+4}{a} + 4w \\ y = -\frac{b-ab-a+4}{a^2} + \frac{a-4}{a}w \\ z = -2aw \\ w \in \mathbb{R} \text{ qualsiasi.} \end{cases}$$

Se $a = 0$, risulta

$$(A' \mid B') = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & b+4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{R_2 \to R_2 - 2R_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

per cui $\rho(A) = \rho(A \mid B)$ se e solo se $b = -4$. Dunque il sistema è incompatibile se $a = 0$ e $b \neq -4$, mentre per $a = 0$ e $b = -4$ equivale a

$$\begin{cases} x = -3 \\ z = 0 \end{cases}$$

che ha le $\infty^2$ soluzioni date da $\{(-3, y, 0, w) : y, w \in \mathbb{R}\}$.

**Esercizio 13** Si ha

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

e quindi risulta $\rho(A) = \rho(A \mid B) = 2$, che coincide anche con il n. di incognite; ciò significa che il sistema ha una ed una sola soluzione (teorema di Rouché-Capelli). Dunque la *(iii)* è vera, mentre *(i)* e *(ii)* sono false. Anche la *(iv)* risulta falsa, in quanto il sistema non è soddisfatto sostituendo $x = 1$ e $y = -1$.

**Esercizio 14** Si ha

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \overset{R_3 \to R_3 - 2R_1 - R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$
$$\overset{R_3 \leftrightarrow R_4}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(sono in grassetto gli elementi speciali) e quindi risulta $\rho(A) = \rho(A \mid B) = 4$, il che significa che il sistema ha $\infty^1$ soluzioni (teorema di Rouché-Capelli). Dunque l'unica affermazione vera è la *(iii)*.

**Esercizio 15** Si ha

$$\det A = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

e quindi $A$ è invertibile. Di conseguenza, la *(i)* e la *(iv)* sono false, mentre la *(v)* è vera. Poiché risulta

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la *(ii)* è vera e la *(iii)* è falsa.

**Esercizio 16** La *(iv)* è in ogni caso falsa, in quanto un sistema lineare compatibile che non abbia una sola soluzione, ne ha infinite. Siccome $(1, 1, -1)$ è soluzione, il sistema è compatibile e quindi la *(i)* è vera (condizione necessaria e sufficiente di compatibilità). Poiché risulta

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

$A$ è invertibile e quindi la *(ii)* è vera e la *(iii)* è falsa.

**Esercizio 17** *(i)* FALSA; ad esempio il sistema

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

è compatibile.

*(ii)* FALSA; ad esempio il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

è incompatibile.

*(iii)* FALSA; v. controesempio al punto precedente.

*(iv)* VERA, in quanto un sistema omogeneo ha sempre la soluzione nulla.