Prof. Roberto Capone

Limiti e successioni

Corso di Matematica –mod. II
2013/2014
Corso di laurea in Scienze biologiche

Università degli Studi del Molise

Le successioni: intro

- Si consideri la seguente sequenza di numeri:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,…

detti di Fibonacci.

Essa rappresenta il numero di coppie di conigli presenti nei primi 12 mesi in un allevamento!

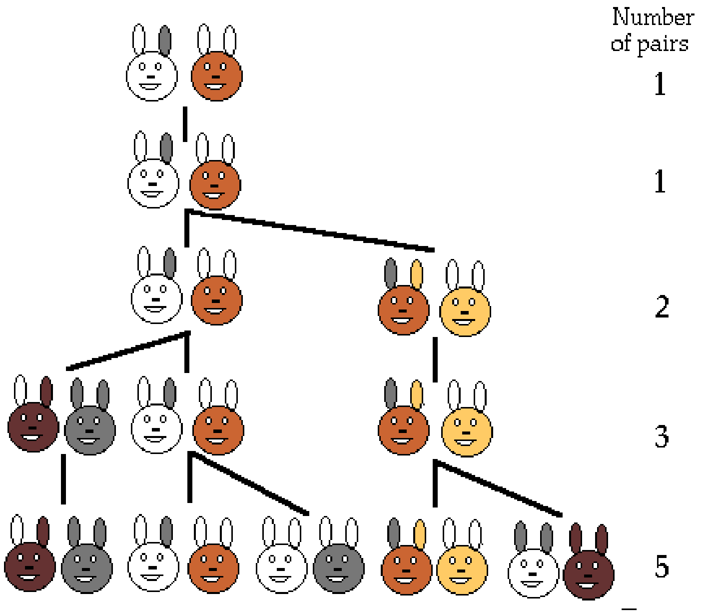
- Si consideri la sequenza ottenuta dividendo ogni elemento per il precedente:

$$1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots$$

ovvero: 1, 2, 1.5, 1., 1.6, 1.625,...

I valori ottenuti si avvicinano alla sezione aurea:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803..$$



Le successioni: formalizzazione

Definizione

Una successione è una funzione che associa ad ogni elemento di N un numero reale, è cioè una funzione reale definita su N:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \qquad f(n) = a_n \qquad n \longmapsto a_n$$

Si denota con

$$\{a_n\}_{n \in N} \qquad \{a_n\} \qquad a_n \qquad n \longmapsto a_n$$

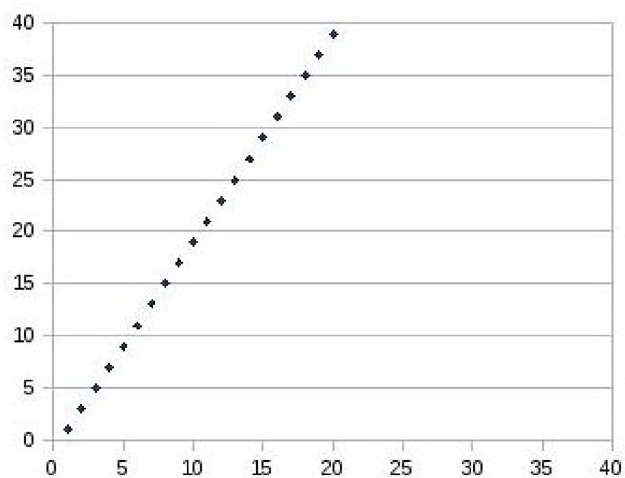
Spesso le successioni sono definite da un certo intero n_0 in poi, cioè il loro dominio è del tipo $\{n \in N | n \geq n_0\}$.

In tal caso, si scrive:

$$\{a_n\}_{n \geq n_0}$$

Successioni : rappresentazione grafica

Anche le successioni possono essere rappresentate sul piano cartesiano, sull'asse delle ascisse vengono riportati i valori di n, su quella delle ordinate invece gli a_n. Il grafico è quindi costituito da una serie di punti isolati; in figura è riportato l'esempio della successione naturale dei numeri dispari



Le successioni: esempi

Esempio 1.

- Si consideri la successione: $$n \to a_n = \frac{1}{n}$$

al crescere di n la frazione, che assume valori positivi, si avvicina sempre di più al numero 0.

Esempio 2

- Si consideri la successione:

$$n \to a_n = 10^n$$

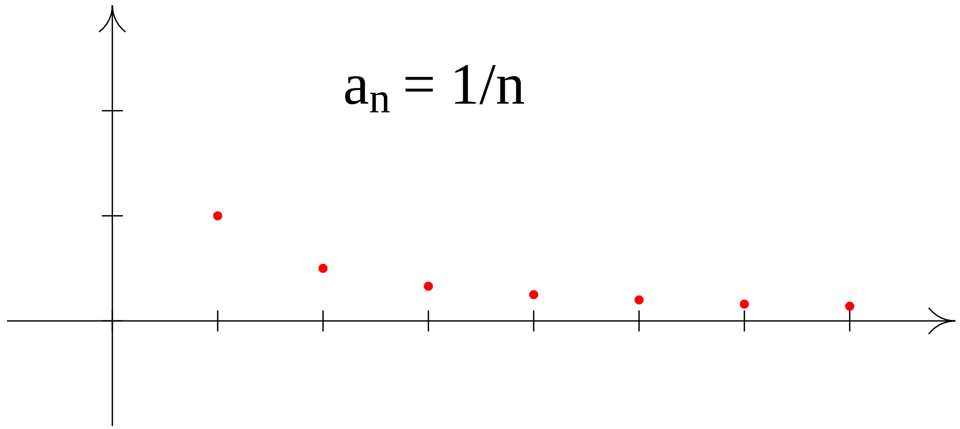
Al crescere di n la potenza assume valori sempre più grandi.

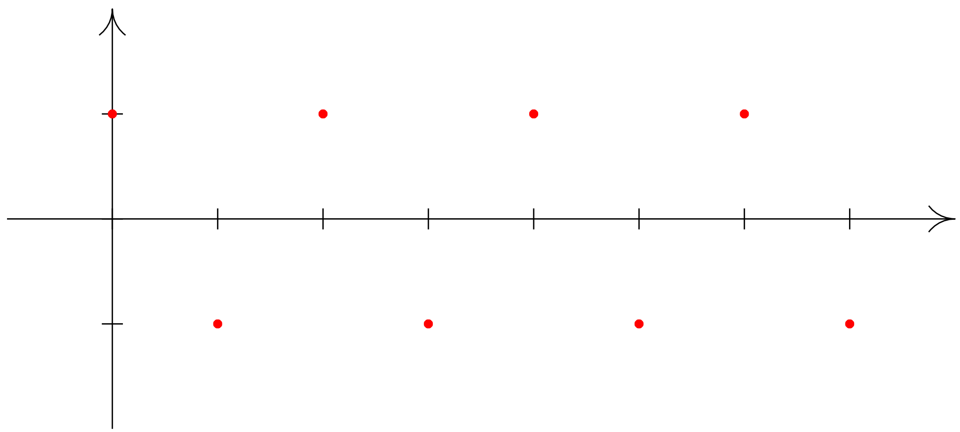
Esempio 3

- Si consideri la successione :

$$n \to a_n = (-1)^n$$

Al variare di n i valori sono alternativamente +1 e –1.





$a_n = (-1)^n$

Le successioni

I tre esempi precedenti esibiscono i tre diversi comportamenti di una successione: convergente, divergente ed oscillante.

Studiare una successione equivale ad individuarne il comportamento al crescere di n ovvero al tendere di n verso ∞

Successioni numeriche: limitatezza

Definizione
Una successione $\{a_n\}$ si dice

- limitata inferiormente se esiste $m \in R|\ a_n \geq m, \forall n \in N$;
- limitata superiormente se esiste M$\in R|\ a_n \leq M, \forall n \in N$;
- limitata se esistono $\mathrm{m}, \mathrm{M} \in R|\ m \leq a_n \leq M, \forall n \in N$.

L'operazione di limite consente di studiare il comportamento dei numeri $\{a_n\}$ quando n diventa sempre più grande.

Definizione
Una successione $\{a_n\}$ si dice che possiede definitivamente una proprietà se esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che a_n soddisfa quella proprietà $\forall n \geq N$

Successioni convergenti

Definizione
Una successione $\{a_n\}$ si dice convergente se esiste un numero reale $l \in R$ con questa proprietà: qualunque sia $\varepsilon > 0$ risulta definitivamente

$$|a_n - l| < \varepsilon$$

In altre parole:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} |\, |a_n - l| < \varepsilon, \forall n \geq N.$$

Definizione
Sia $\{a_n\}$ una successione convergente. Il numero reale l che compare nella definizione precedente si chiama limite della successione $\{a_n\}$.
Si scrive

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l$$

oppure $a_n \to l$ per $n \to \infty$

Si noti che dalle proprietà del valore assoluto, la disuguaglianza $|a_n - l| < \varepsilon$ equivale a

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$$

Dunque la condizione di convergenza significa che, fissata una striscia $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ comunque stretta, da un certo indice in poi i punti della successione non escono più da questa striscia.

Da questa osservazione risulta che:

- ❑ Ogni successione convergente è limitata.

Teorema di unicità del limite

Una successione convergente non può avere due limiti distinti

Successioni divergenti

Definizione
Sia $\{a_n\}$ una successione.
Si dice che $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$ se $\forall M > 0$ si ha $a_n > M$ definitivamente e si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

Si dice che $\{a_n\}$ diverge a $-\infty$ se $\forall M > 0$ si ha $a_n < -M$ definitivamente e si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$$

Esempi

Insiemi non limitati

Definizione

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$

- Se E non è limitato superiormente si dice che $supE = +\infty$
- Se E non è limitato inferiormente si dice che $\inf E = -\infty$

Infiniti e infinitesimi

Definizione

Una successione si dice infinitesima se

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

Una successione si dice infinita se

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \pm\infty$$

Le successioni: monotonia

Successioni che presentano una regolarità nell'evoluzione della serie di termini, ovvero il successivo è sempre maggiore (minore) del precedente oppure uguale, vengono dette monotone.

Definizione

Una successione $\{a_n\}$ si dice

- ❑ monotona crescente se $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in N$;
- ❑ strettamente crescente se $a_n < a_{n+1}, \forall n \in N$;
- ❑ monotona decrescente se $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in N$;
- ❑ strettamente decrescente se $a_n > a_{n+1}, \forall n \in N$;

Teorema sul limite delle successioni monotone

Sia $\{a_n\}$ una successione monotona.

Se $\{a_n\}$ è monotona crescente e superiormente limitata, allora $\{a_n\}$ è convergente e

$$\lim_{n \to \infty} a_n = sup\{a_n | n \in N\}$$

Se $\{a_n\}$ è monotona decrescente e inferiormente limitata, allora $\{a_n\}$ è convergente e

$$\lim_{n \to \infty} a_n = inf\{a_n | n \in N\}$$

Esempi

Esempi di successioni crescenti e decrescenti sono i seguenti:

- La successione $a_n = n^2$ è una funzione strettamente crescente
- La successione $a_n = 1/n$ è strettamente decrescente.

Successioni: operazioni coi limiti

- A) $$\lim_{n\to+\infty}\left(a_n \pm b_n\right) = \lim_{n\to+\infty} a_n \pm \lim_{n\to+\infty} b_n$$
- B) $$\lim_{n\to+\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim_{n\to+\infty} b_n$$
- C) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to+\infty} a_n}{\lim_{n\to+\infty} b_n}$$
- D) $$\lim_{n\to+\infty} {a_n}^{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(a_n\right)^{\lim_{n\to+\infty} b_n}$$

Successioni: polinomi

- Si consideri la successione il cui termine generico è rappresentato da un polinomio di grado h in n:
- Esempio 4: $n \to a_n = \alpha_0 n^h + \alpha_1 n^{h-1} + \ldots + \alpha_h$
- Raccogliendo la potenza di grado più elevato in n si ha:

$$n \to a_n = 2n^2 - 5n - 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} n^2\left(2 - \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = +\infty \cdot (2-0-0) = +\infty$$

- In generale si ha: $\lim_{n\to+\infty} a_n = sign(\alpha_0)\infty$

Successioni: rapporto tra due polinomi

- Un successione nella quale il termine generico è dato dal rapporto di due polinomi assume l’espressione:

$$n \to a_n = \frac{\alpha_0 n^h + \alpha_1 n^{h-1} + \ldots + \alpha_h}{\beta_0 n^k + \beta_1 n^{k-1} + \ldots + \beta_k}$$

- A) h>k $\quad n \to a_n = \frac{n^4 + 2}{-n^2 + n + 1}$
- B) h=k $\quad n \to a_n = \frac{n^2 + 2}{-n^2 + n + 1}$
- C) h<k $\quad n \to a_n = \frac{n^2 + 2}{-n^4 + n + 1}$

Rapporto tra polinomi in breve

- Concludendo:
- A) se h>k la successione è divergente a $sign(\frac{\alpha_0}{\beta_0})\infty$
- B) se h=k la successione è convergente a $\frac{\alpha_0}{\beta_0}$
- C) se h<k la successione è convergente a 0.

Un’altra forma indeterminata

- Per quanto riguarda la successione il cui termine generico ha la forma:

$$n \to a_n = \left(\frac{\alpha_0 n^h + \alpha_1 n^{h-1} + \ldots + \alpha_h}{\beta_0 n^k + \beta_1 n^{k-1} + \ldots + \beta_k} \right)^{\gamma_0 n^p + \gamma_1 n^{p-1} + \ldots + \gamma_p}$$

- si presenta una situazione difficile solo se la base della potenza tende ad 1 e l’esponente tende all’ ∞ , perché si genera la forma indeterminata 1^∞

Il numero di Nepero

Teorema
La successione definita da
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{,con } n \geq 1$$
è convergente

Si prova che $\{a_n\}$ è strettamente crescente e limitata $(2 \leq a_n \leq 4)$.
Si scrive
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$
Il numero di Nepero e è irrazionale e la sua rappresentazione decimale inizia così: 2.7182818284

Esempio

Si consideri la successione

- Il calcolo del limite porta a: $$n \to a_n = \left(1 + \frac{1}{2n^2 - 3}\right)^{n^2+n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{2n^2-3}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

La successione geometrica (di ragione q)

E’ la successione $\{q^n\}$, per un fissato $q \in R$

Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & se\ q > 1 \\ 1 & se\ q = 1 \\ 0 & se\ |q| < 1 \\ non\ esiste & se\ q \leq -1 \end{cases}$$

Se $q > 1, \{q^n\}$ è monotona crescente, illimitata superiormente.

Se $q = 1, \{q^n\}$ è costante.

Se $0 < q < 1, \{q^n\}$ è monotona decrescente.

Se $q < 1, \{q^n\}$ non è monotona

Esempi

$$n \to a_n = -15 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n \qquad \lim_{n \uparrow +\infty} a_n = 0$$

$$n \to a_n = 5^n \qquad \lim_{n \uparrow +\infty} a_n = \infty$$

$$n \to a_n = (-2)^n \qquad \lim_{n \uparrow +\infty} a_n = ???$$

Limiti e ordinamento

Teorema di Permanenza del segno (prima forma)

- Se $a_n \to a$ e $a > 0$ allora
$$a_n > 0 \;\; definitivamente$$

- Se $a_n \to a$ e $a < 0$ allora
$$a_n < 0 \;\; definitivamente$$

Teorema di permanenza del segno (seconda forma)

- Se $a_n \to a$ e $a_n \geq 0$ definitivamente allora
$$a \geq 0$$
- Se $a_n \to a, b_n \to b$ e $a_n \geq b_n$ definitivamente allora
$$a \geq b$$

Teorema del confronto

Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente ed esiste $l \in R$ tale che $a_n \to l, c_n \to l$ allora anche

$$b_n \to l$$

Legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni

Teorema ponte

Sia f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di R, regolare nel punto $x_0 \in R$ di accumulazione per X e sia $\{x_n\}$ una successione di punti di $X - \{x_0\}$ tale che

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0.$$

Allora la successione di numeri reali $f(x_n)_{n \in N}$ composta per mezzo di f e di $(x_n)_{n \in N}$ è anch'essa regolare e ha lo stesso limite di f. Più schematicamente:

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x \to x_0} f(x) = l \\ \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$$

Vale anche il **viceversa:**

Sia f una funzione reale definita nel sottoinsieme X si R e sia $x_0 \in R$ di accumulazione per X. Allora se, per ogni successione $(x_n)_{n \in N}$ di punti di $X - \{x_0\}$ che abbia x_0 come limite, la successione $f(x_n)_{n \in N}$ è regolare e ha lo stesso limite l, la funzione f è regolare in x_0 e ha limite l