



Prof. Roberto Capone

Limiti e continuità delle funzioni reali 2

Corso di Matematica –mod. II
2013/2014

Corso di laurea in Scienze biologiche



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DEL MOLISE

Discontinuità di I specie

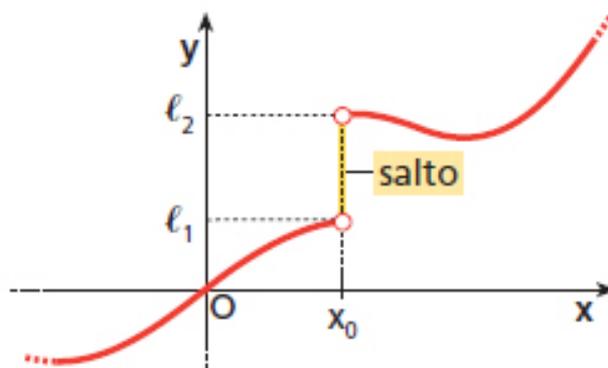
Si ha una discontinuità di I specie se, essendo x_0 di accumulazione per X a sinistra e a destra, esistono e sono entrambi finiti i limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_1$$

e

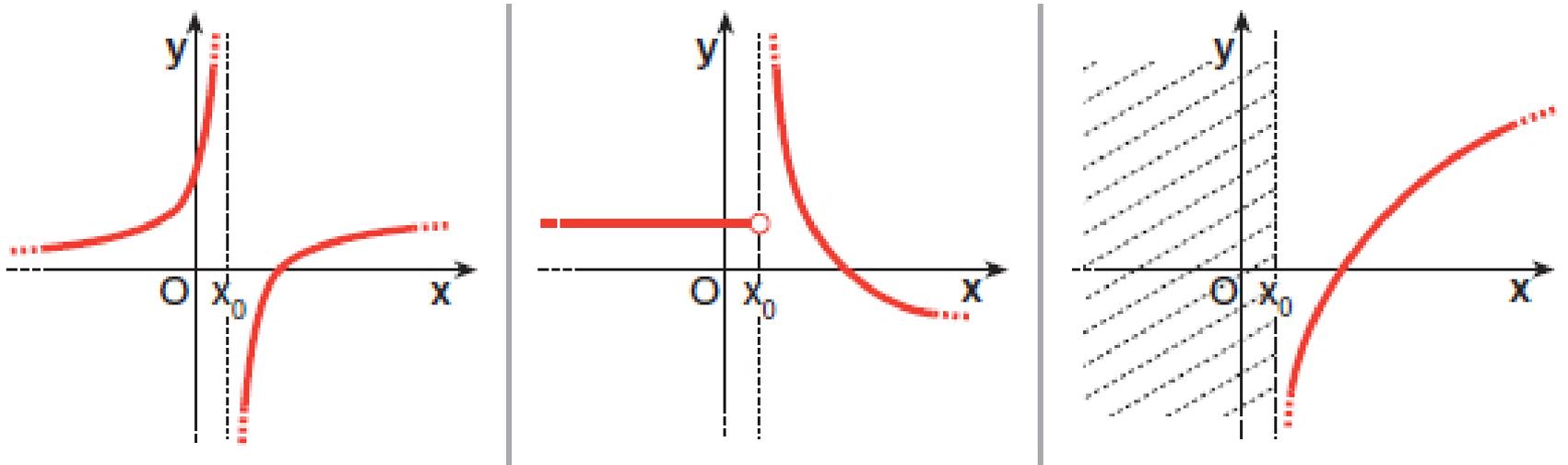
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_2$$

ma diversi. La differenza $|l_1 - l_2|$ prende il nome di salto della funzione



Discontinuità di II specie

Si ha una discontinuità di II specie quando almeno uno dei due limiti (sinistro e destro) o non esiste oppure è infinito



Discontinuità di III specie

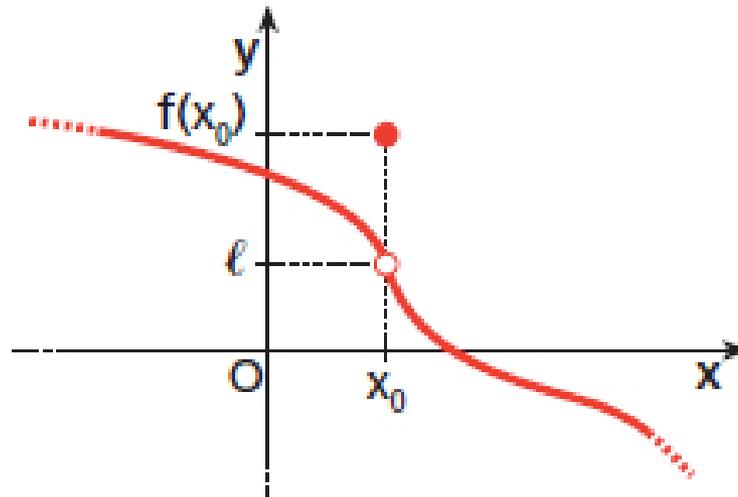
Se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

ma

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

la discontinuità si dice eliminabile



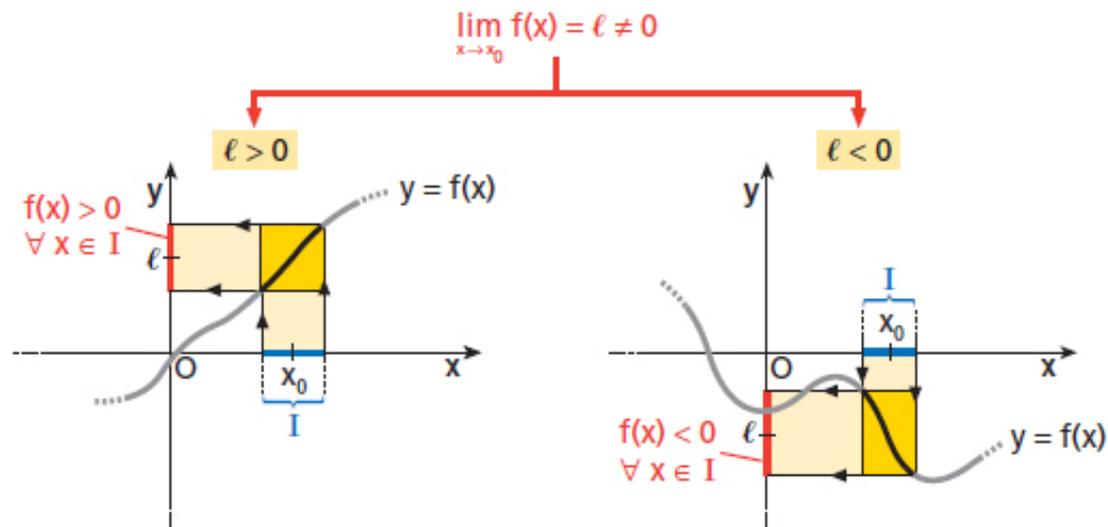
Teorema di permanenza del segno

Sia f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di \mathbb{R} , regolare nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$, di accumulazione per X . Allora, se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$$

$\exists I_{x_0}$ t.c. $\forall x \in I \cap X$, con $x \neq x_0$ si ha $f(x) > 0$

In particolare, se la f è continua in $x_0 \in X$ e se il valore di f è positivo, esiste un intorno di x_0 in cui la $f(x)$ è positiva.



Teorema di permanenza del segno (dimostrazione)

Per la definizione di limite, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists I_{x_0} \text{ t.c. } |f(x) - l| < \varepsilon$$

ovvero

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Per l'arbitrarietà di ε , posso porre $\varepsilon = |l|$

da cui:

$$l - |l| < f(x) < l + |l|$$

$$\text{Se } l > 0 \quad 0 < f(x) < 2l$$

$$\text{se } l < 0 \quad 2l < f(x) < 0$$

c.v.d.

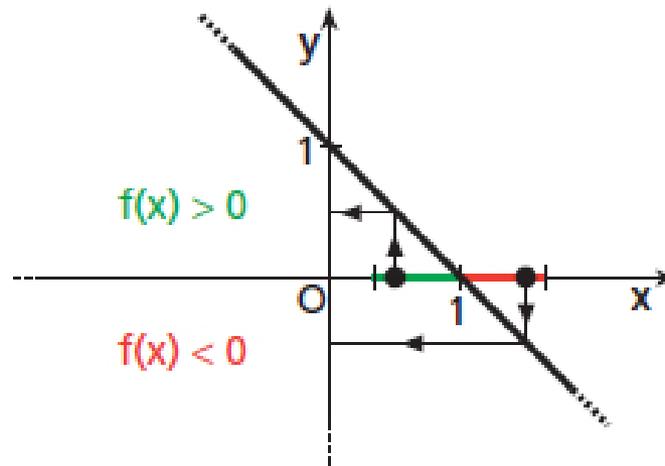
Caso di $l = 0$

Il teorema non è valido per $l = 0$

Sia, ad esempio,

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) = 0$$

La funzione $y=1-x$ rappresenta una retta nel piano cartesiano. Come si può vedere dalla figura, in un qualunque intorno completo del punto 1, i valori assunti dalla funzione $y=1-x$ sono in parte positivi e in parte negativi



Teorema inverso

Se una funzione $f(x)$ ammette limite finito l per x che tende a x_0 e in un intorno I_{x_0} , escluso al più x_0 , è positiva o nulla, allora $l \geq 0$; se è negativa o nulla allora $l \leq 0$.

Dimostrazione:

Per assurdo, sia $l < 0$, allora

$$\exists I'_{x_0} \text{ t. c. } f(x) < 0, \forall x \in I'_{x_0}, \text{ con } x \neq x_0$$

ma, per ipotesi, $f(x)$ è positiva o nulla in I_{x_0} .

Ciò significa che per i punti x dell'intorno $I_{x_0} \cap I'_{x_0}$ la funzione assume valori sia positivi che negativi. Abbiamo ottenuto una contraddizione!

Teorema dei carabinieri

Siano f , g ed h tre funzioni reali:

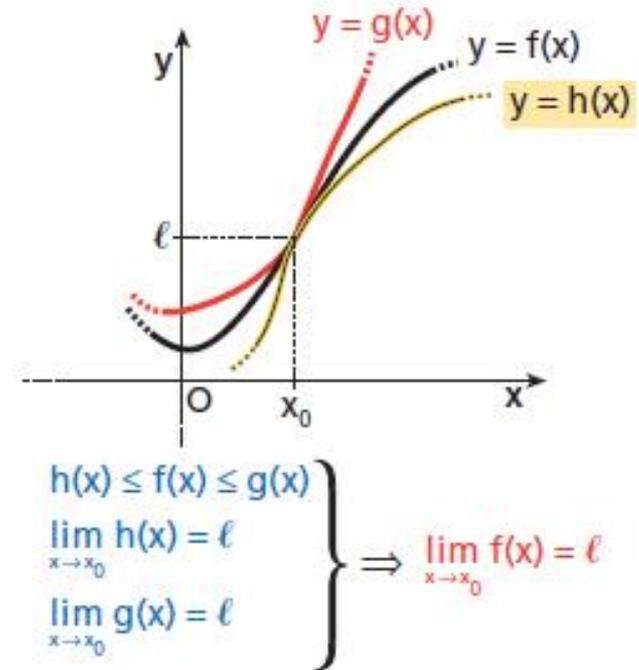
$$\begin{aligned}f &: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\g &: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\h &: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

sia x_0 di accumulazione per X . Allora, se esiste un intorno I_{x_0} tale che

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I \cap X, x \neq x_0$$

nell'ipotesi che h e g siano regolari in x_0 ed abbiano lo stesso limite, anche h è regolare in x_0 e si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$



Teorema dei carabinieri (dimostrazione)

Essendo h e g dotate di limite in x_0 , per la definizione di limite, si ha:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists I_{1x_0} \text{ t.c. } |h(x) - l| < \varepsilon \text{ ovvero } l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists I_{2x_0} \text{ t.c. } |g(x) - l| < \varepsilon \text{ ovvero } l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$$

Tenendo conto della relazione fra le funzioni, si ha:

$$l - \varepsilon < h(x) \leq f(x) \leq g(x) < l + \varepsilon$$

$$\forall x \in I_1 \cap I_2$$

il che implica che

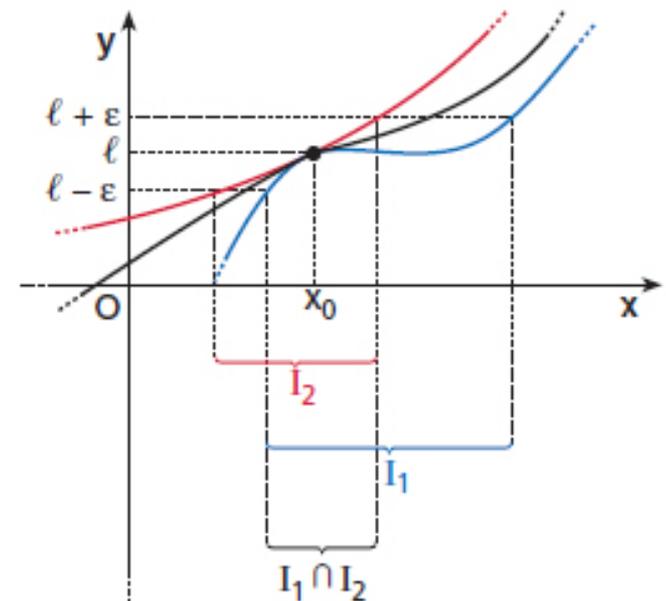
$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

ovvero

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

e quest'ultima relazione significa proprio che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$



Operazioni con i limiti

Teorema

Sia f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di \mathbb{R} , dotata di limite nel punto x_0 .

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \implies \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$$

a condizione di porre $|- \infty| = + \infty$, $|+ \infty| = + \infty$

In particolare, se $x_0 \in X$ e la funzione è continua in x_0 , anche la funzione $|f|$ è continua in quel punto

Teorema sul limite della somma

Siano f e g due funzioni reali definite nel sottoinsieme X di \mathbb{R} e x_0 un punto di accumulazione per X . Allora, se f e g sono entrambe regolari in x_0 , anche la funzione $f+g$ è regolare in x_0 e si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

a meno che non si presenti una delle seguenti due situazioni

$$(+\infty) + (-\infty), (-\infty) + (+\infty)$$

che si dicono forme indeterminate.

In particolare, se $x_0 \in X$ e se le funzioni f e g sono entrambe continue in x_0 , anche la funzione $f + g$ è continua in tale punto

Situazioni possibili

$f(x)$ \oplus $g(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$
m	$m+l$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$?
$-\infty$	$-\infty$?	$-\infty$

Teorema sul limite del prodotto

Siano f e g due funzioni reali definite nel sottoinsieme X di \mathbb{R} e x_0 un punto di accumulazione per X . Allora, se f e g sono entrambe regolari in x_0 anche la funzione $f \cdot g$ è regolare in x_0 e si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

a meno che il prodotto non si presenti nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$

In particolare, se $x_0 \in X$ e se le funzioni f e g sono entrambe continue in x_0 , anche la funzione $f \cdot g$ è continua in tale punto.

Situazioni possibili

$f(x) \backslash g(x)$	$l > 0$	$l < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$m > 0$	$m \cdot l$	$m \cdot l$	0	$+\infty$	$-\infty$
$m < 0$	$m \cdot l$	$m \cdot l$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$?	$-\infty$	$+\infty$

Teorema sul limite del quoziente

Siano f e g due funzioni reali definite nel sottoinsieme X di \mathbb{R} e x_0 un punto di accumulazione per X . Allora, se f e g sono entrambe regolari in x_0 e se $g(x) \neq 0$ in $X - \{x_0\}$ anche la funzione f/g è regolare in x_0 e si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

a meno che il quoziente non si presenti in una forma indeterminata ∞/∞ o $0/0$.

In particolare, se $x_0 \in X$ e se le funzioni f e g sono entrambe continue in x_0 e $g(x) \neq 0$ anche la funzione f/g è continua in tale punto.

Situazioni possibili

$g(x)$ $\frac{f(x)}{g(x)}$ $f(x)$	$m \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l \neq 0$	$\frac{l}{m}$	∞	0	0
0	0	?	0	0
$+\infty$	∞	∞	?	?
$-\infty$	∞	∞	?	?

Altre forme indeterminate

Se f e g sono due funzioni reali definite nel sottoinsieme X di \mathbb{R} con $f(x)$ positiva in tutto X , entrambe dotate di limite nel punto x_0 di \mathbb{R} , si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \cdot \log(f(x))}$$

Tale limite, a norma del teorema sul limite di una funzione composta, esiste se e solo se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \log(fx)$$

Anche in questo caso, possono incontrarsi delle forme indeterminate:

$$0^0, (+\infty)^0, 1^{\pm\infty}$$

Situazioni possibili

$f(x)$ \ $g(x)$ $(f(x))^{g(x)}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$?	$+\infty$	0^+
0^+	?	0^+	$+\infty$
1	1	?	?
$0 < \ell < 1$	1	0^+	$+\infty$
$\ell > 1$	1	$+\infty$	0^+