Prof. Roberto Capone

Limiti e continuità delle funzioni reali 3

Corso di Matematica –mod. II
2013/2014

Corso di laurea in Scienze biologiche

Università degli Studi del Molise

Teorema degli zeri

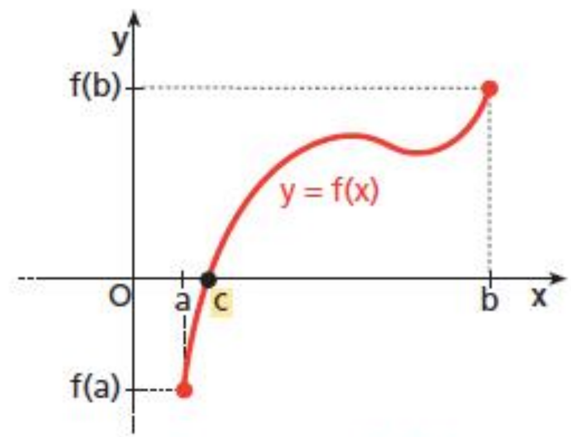
Una funzione reale f continua nell'intervallo chiuso e limitato [a; b] che assuma valori di segno opposto negli estremi di tale intervallo, si annulla in almeno un punto ad esso interno

Dimostrazione

Si supponga, per fissare le idee, che f(a)<0 e f(b)>0. Sia c l'estremo superiore dei punti $x \in [a; b]$ tali che f(x)<0.

Essendo f continua in a e in b, per il teorema della permanenza del segno $c \neq a, c \neq b$, perciò $c \in [a; b]$ dovendo essere f(x)<0 in un opportuno intorno destro di a e f(x)>0 in un opportuno intorno sinistro di b, allora nel punto c dovrà essere f(c)=0.

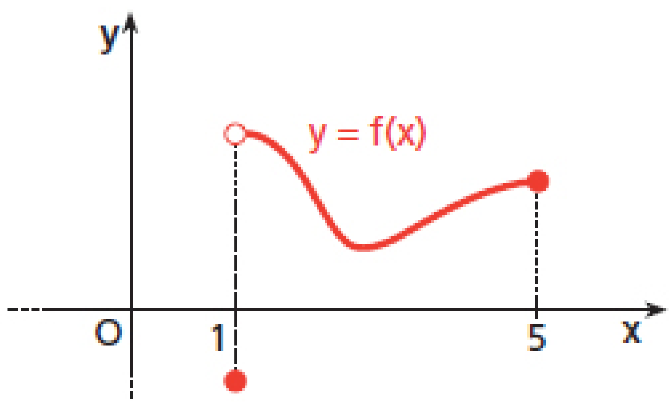
Diversamente, se f(c)<0, per la permanenza del segno esisterebbe un intorno di c nel quale si avrebbe f(x)<0 in contrasto con il fatto che c è estremo superiore degli $x \in [a; b]$ per i quali f(x)<0



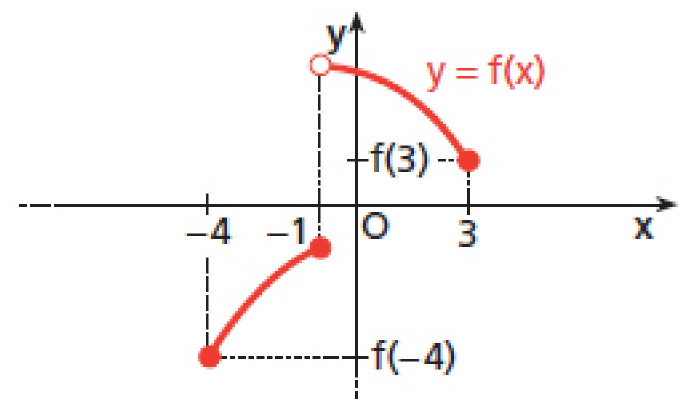
f continua in [a; b]
f(a) < 0, f(b) > 0 ⇒
∃ c ∈]a; b[| f(c) = 0

Teorema degli zeri

Nei seguenti due casi non sono verificate le ipotesi del teorema; in particolare nel primo caso la funzione non è definita in un intervallo chiuso, nel secondo caso la funzione non è continua. In questi due casi non esiste alcun punto c in cui la funzione si annulla.



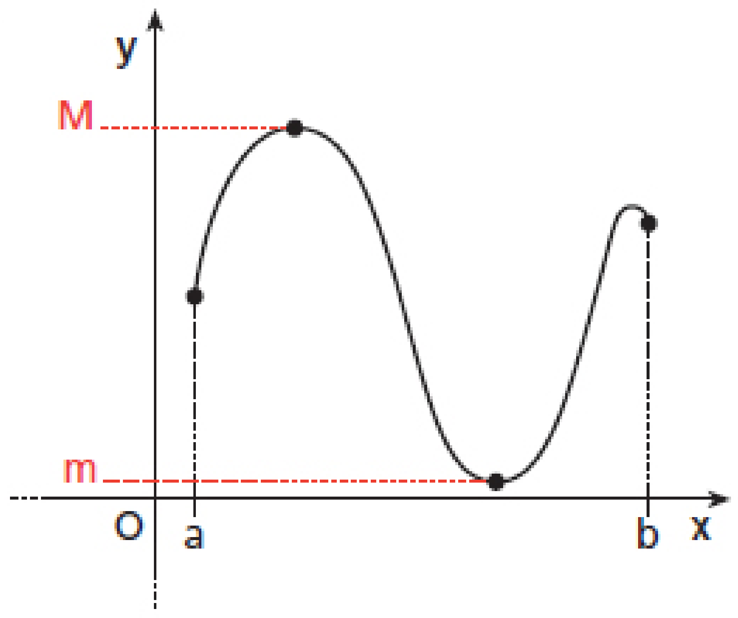
a. La funzione è continua nell'intervallo $]1; 5]$, $f(1) < 0$ e $f(5) > 0$, ma non esiste alcun punto dell'intervallo in cui essa si annulla.



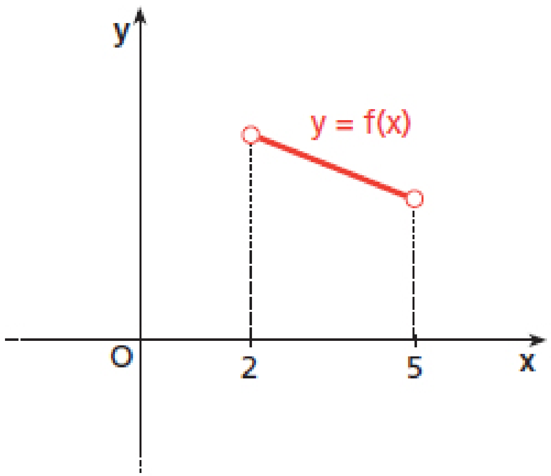
b. La funzione non è continua in $x = -1$; $f(-4) < 0$ e $f(3) > 0$. Non esiste alcun punto dell'intervallo $[-4; 3]$ in cui essa si annulla.

Teorema di Weiestrass

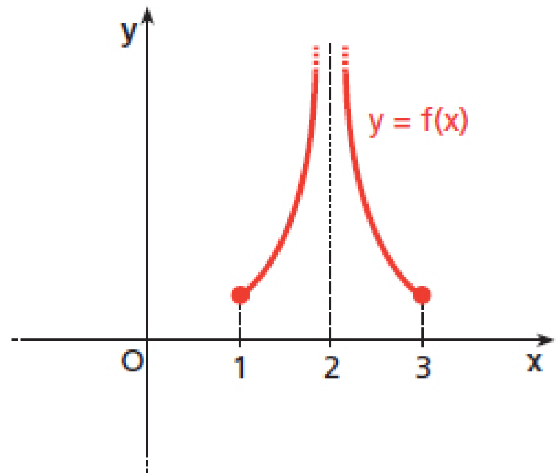
Se f è una funzione continua in un insieme compatto [a; b], ha come codominio un insieme anch'esso compatto e conseguentemente essa è dotata in X di minimo e di massimo



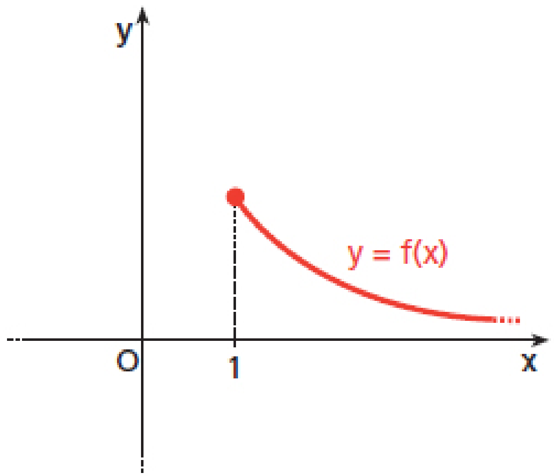
Casi di non validità del teorema di W.



a. La funzione è continua nell'intervallo limitato aperto]2; 5[. Essa è priva di massimo e minimo in questo intervallo, in quanto gli estremi non appartengono all'intervallo.



b. La funzione non è continua nel punto $x = 2$. Nell'intervallo [1; 3] essa assume minimo, ma è priva di massimo.



c. La funzione è continua nell'intervallo illimitato [1; +∞[. Non vale il teorema di Weierstrass e la funzione è priva di minimo assoluto.

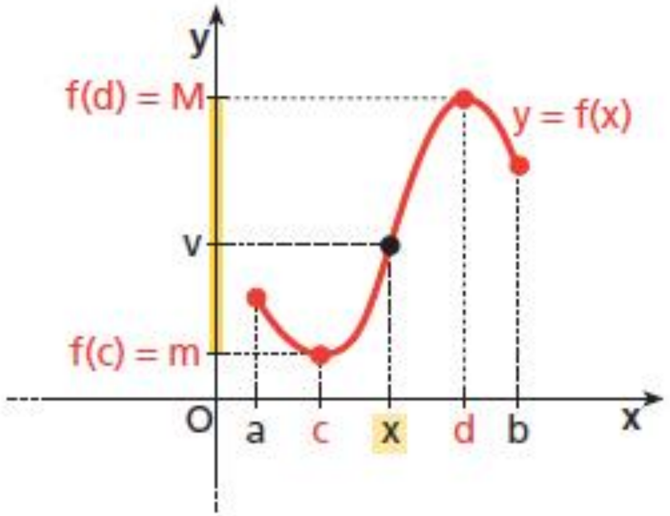
I teorema dei valori intermedi

Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [a; b] assume tutti i valori compresi tra f(a) ed f(b)

Consideriamo il caso in cui $f(a) \leq f(b)$. La tesi consiste nel provare che, qualunque sia
$y_0 \in [f(a); f(b)]$
$\exists x_0 \in [a; b]$ tale che $f(x_0) = y_0$

se

- y_0=f(a) si può porre x_0=a
- y_0=f(b) si può porre x_0=b
- $y_0 \in (f(a); f(b))$ si può considerare la funzione ausiliaria g(x)=f(x)-y_0 $\forall x \in [a; b]$



f continua in [a; b] ⇒
∀ v | m ≤ v ≤ M
∃ x ∈ [a; b] | f(x) = v

Essendo f(a)< y_0 <f(b), si ha:
g(a) = f(a) – y_0 <0
g(b) = f(b) – y_0 >0
Per il teorema degli zeri $\exists x_0 \in (a, b)$ tale che $g(x_0) = 0$, cioè $f(x_0) = y_0$

Il teorema dei valori intermedi

Una funzione continua in un intervallo [a, b] chiuso e limitato assume tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo

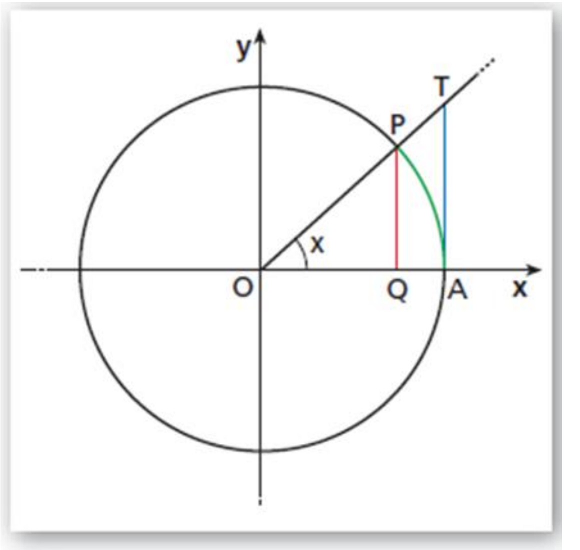
Criterio di invertibilità

Una funzione continua e strettamente monotona in un intervallo [a, b] chiuso e limitato è invertibile in tale intervallo.

Limiti notevoli

Dimostriamo che vale il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$$



Si consideri una circonferenza goniometrica in cui siano noti il seno e la tangente in funzione di un angolo x. Poiché l'arco PA assume lo stesso valore dell'angolo al centro che lo sottende e noto che PQ = sinx e TA=tgx, si ha:

$$sinx < x < tgx$$

dividendo tutti i termini per $sinx$ e passando al reciproco, si ha:

$$cosx < \frac{sinx}{x} < 1$$

In tale relazione, passando al limite per x che tende a zero, essendo

$$\lim_{x \to 0} cosx = 1$$

per il teorema dei carabinieri segue anche che

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$$

C.v.d.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Dimostrazione:

Moltiplicando il denominatore e il numeratore per 1-cosx abbiamo che:

$$\frac{(1 - cosx)(1 + cosx)}{x^2(1 + cosx)} = \frac{1 - cos^2x}{x^2(1 + cosx)}$$

Ma poiché
$sin^2x = 1 - cos^2x$, si ha:

$$\frac{sin^2x}{x^2(1 + cosx)} = \frac{sin^2x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + cosx} = \left(\frac{sinx}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + cosx}$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{sinx}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + cosx} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{sinx}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + cosx} = \frac{1}{2}$$

Altri limiti notevoli

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{log_a(1+x)}{x} = log_e a$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = ln a$$

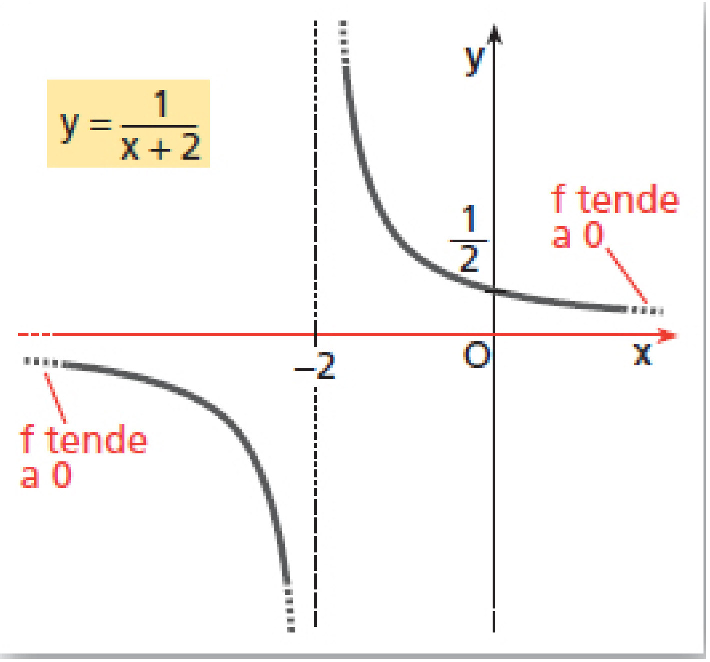
$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

Infinitesimi ed infiniti

Si dice che una funzione è un infinitesimo per $x \to \alpha$ quando il limite di f(x) per $x \to \alpha$ è uguale a zero

Per esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{x+2}$ è un infinitesimo per x che tende a infinito

Funzioni del tipo $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{\sqrt{x}}$ e così via sono tutte infinitesimi per $x \to \infty$



Confronto tra infinitesimi

Se f(x) e g(x) sono entrambi infinitesimi per $x \to \alpha$ si dice che f(x) e g(x) sono infinitesimi simultanei.
In questo caso, è interessante vedere quale dei due infinitesimi tende a 0 più rapidamente; possiamo stabilire ciò determinando il limite, se esiste, del loro rapporto per $x \to \alpha$

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$$

- Si dice che f(x) e g(x) sono infinitesimi dello stesso ordine
- (essenzialmente vuol dire che tendono a 0 con la stessa rapidità)

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

- Si dice che f(x) è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g(x)
- f tende a 0 più rapidamente di g

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

- Si dice che f(x) è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a g(x)
- f tende a 0 meno rapidamente di g

Ordine di un infinitesimo

Dati due infinitesimi f(x) e g(x), per $x \to \alpha$ si dice che f(x) è un infinitesimo di ordine γ (con γ>0) rispetto a g(x), quando f(x) è dello stesso ordine di $[g(x)]^{\gamma}$, cioè se:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{[g(x)]^{\gamma}} = l \neq 0$$

Diciamo, inoltre, che g(x) è preso come infinitesimo campione.
In genere, come infinitesimo campione, si prende:

$g(x) = x - x_0$ se $x \to x_0$
$g(x) = \frac{1}{x}$ se $x \to \pm\infty$

Infinitesimi equivalenti

Dati due infinitesimi f(x) e g(x), per $x \to \alpha$ essi si dicono equivalenti se :

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

e si scrive $f \sim g$ e si legge f è asintoticamente equivalente a g. Inoltre, uno dei due si dice parte principale dell'altro.

Esempi di infinitesimi equivalenti sono:

$\boldsymbol{sinx \sim x}$
$\log(1+x) \sim x$
$e^x - 1 \sim x$

Applicazioni al calcolo dei limiti

Si calcoli il seguente limite:

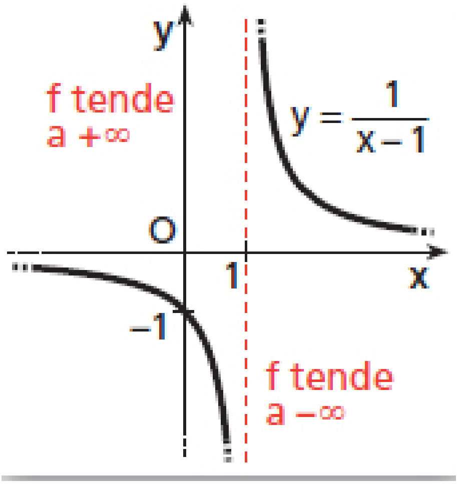
$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+5x)}{sin2x}$$

Poiché $\log(1+5x) \sim 5x$ e $sin2x \sim 2x$
si ha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+5x)}{sin2x} = \lim_{x \to 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

Gli infiniti

Una funzione f(x) si dice un infinito per $x \to \alpha$ quando il limite di f(x) per $x \to \alpha$ vale $+\infty, -\infty\ o\ \infty$



La funzione $f(x) = \frac{1}{x-1}$ è un infinito per x che tende a 1, perché

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$$

Confronto tra infiniti

Per gli infiniti possiamo introdurre dei concetti analoghi a quelli visti per gli infinitesimi. In particolare:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$$

- Si dice che f(x) e g(x) sono infiniti dello stesso ordine
- (essenzialmente vuol dire che tendono a infinito con la stessa rapidità)

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

- Si dice che f(x) è un infinito di ordine inferiore rispetto a g(x)
- f tende a infinito meno rapidamente di g

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

- Si dice che f(x) è un infinito di ordine superiore rispetto a g(x)
- f tende a infinito più rapidamente di g

Ordine di un infinito

Dati due infiniti f(x) e g(x), per $x \to \alpha$ si dice che f(x) è un infinito di ordine γ (con γ>0) rispetto a g(x), quando f(x) è dello stesso ordine di $[g(x)]^{\gamma}$, cioè se:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{[g(x)]^{\gamma}} = l \neq 0$$

Diciamo, inoltre, che g(x) è preso come infinitesimo campione.
In genere, come infinitesimo campione, si prende:

$g(x) = \frac{1}{x - x_0}$ se $x \to x_0$

$g(x) = x$ se $x \to \pm\infty$

Dati due infiniti f(x) e g(x), per $x \to \alpha$ essi si dicono equivalenti se :

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

e si scrive $f \sim g$ e si legge f è asintoticamente uguale a g

Gerarchia degli infiniti

TEOREMA

Gerarchia degli infiniti

Date le tre famiglie di funzioni

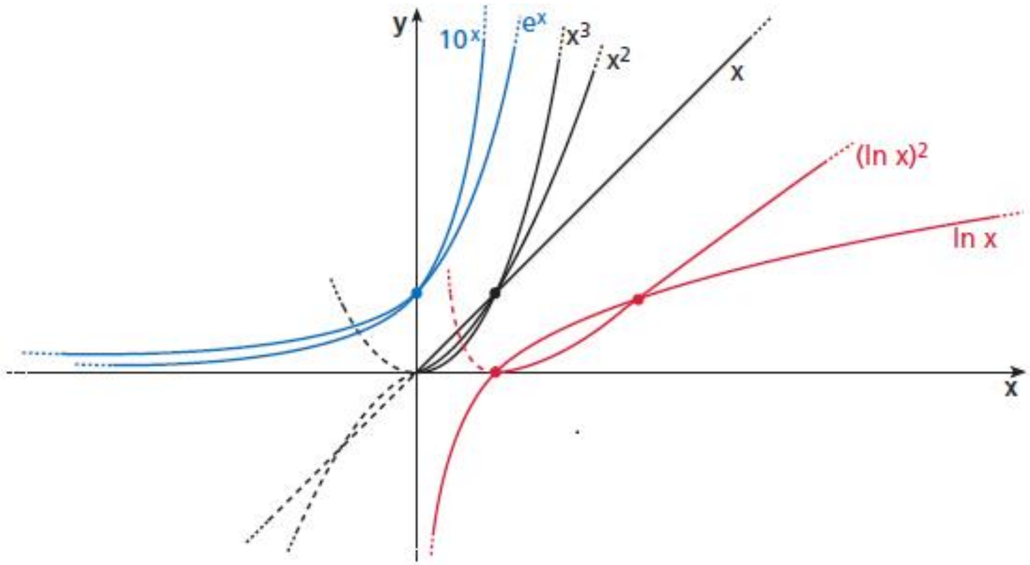
$$(\log_a x)^\alpha, \quad x^\beta, \quad b^x, \quad \text{con } \alpha, \beta > 0 \text{ e } a, b > 1,$$

allora, per $x \to +\infty$, ognuna è un infinito di ordine inferiore rispetto a quella che si trova a destra nell'elenco, cioè:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{b^x} = 0.$$

Sinteticamente, possiamo scrivere, riferendoci agli ordini di infinito:

$$(\log_a x)^\alpha < x^\beta < b^x.$$



Applicazioni al calcolo dei limiti

Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+sin^3x+1-cosx}{\log(1+x^2)+3sinx}$$

Al numeratore è presente la somma di 3 infinitesimi: $2x$, sin^3x, $1-cosx$.
Questi infinitesimi hanno, rispetto al campione x, ordine risp . 1, 2 e 3.
Quindi la somma $sin^3x+1-cosx$ ha ordine 2 (in quanto somma di infinitesimi con ordine diverso) e quindi ha ordine superiore rispetto a 2x potendosi, pertanto, trascurare nel calcolo del limite.
A denominatore è presente la somma di due infinitesimi, uno di ordine 2 e uno di ordine 1 rispetto al campione x: quello di ordine 2 potrà essere trascurato.
Il limite si riduce allora solo a:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3sinx}=\frac{2}{3}$$

Applicazioni allo studio di una funzione: calcolo degli asintoti

Asintoti verticali

Se

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale sinistro per la funzione.

Se

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale destro per la funzione.

Se

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale completo per la funzione

Asintoti orizzontali

Se

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = l$$

la retta y=l è un asintoto orizzontale sinistro per la funzione.

Se

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l$$

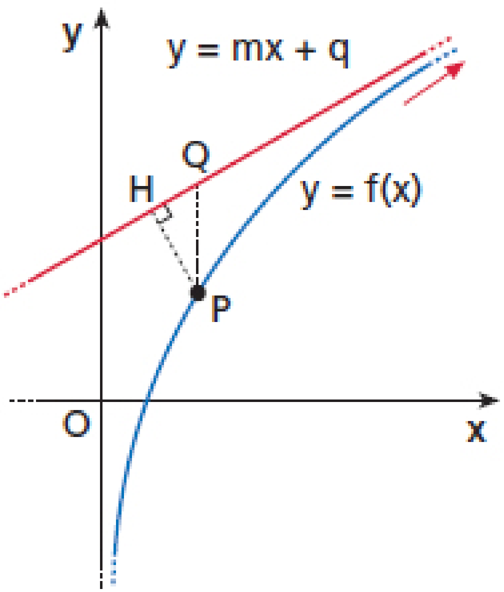
la retta y=l è un asintoto orizzontale destro per la funzione.

Se

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = l$$

la retta y=l è un asintoto orizzontale completo per la funzione

Calcolo di eventuali asintoti obliqui

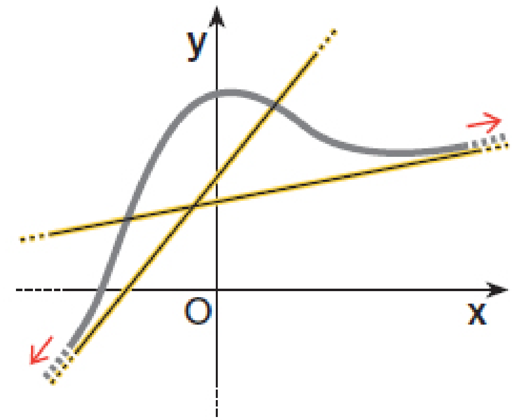


Data la funzione y=f(x), se si verifica che

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(mx+q)]=0$$

si dice che la retta $y = mx + q$ è un asintoto obliquo per il grafico della funzione.
Dimostriamo che la distanza di un generico punto P del grafico di una funzione da un suo asintoto obliquo tende a 0 quando x tende a infinito.
Infatti per la definizione di asintoto,
$\lim_{x\to\infty}$ PQ = $\lim_{x\to\infty}[f(x)-(mx+q)]=0$
Ma poiché PQ ed HP sono rispettivamente ipotenusa e cateto del triangolo QHP, si ha:
PQ>PH>0
Per il teorema del confronto
$\lim_{x\to\infty}$ PH=0

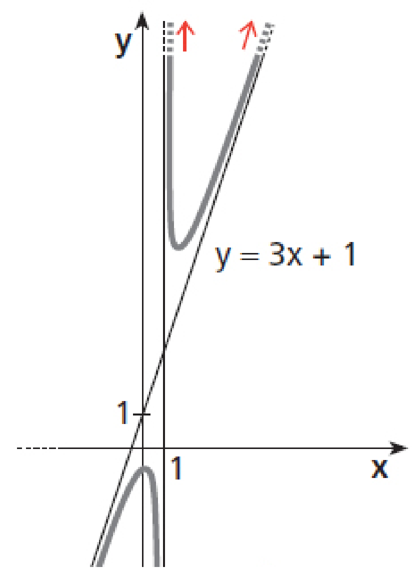
Ricerca degli asintoti obliqui



Se la funzione non presenta un asintoto orizzontale per $x \to \infty$ si passa a valutare l'esistenza dell'eventuale asintoto obliquo.
L'asintoto obliquo è una retta di equazione $y = mx + q$.
Per determinarlo dobbiamo calcolare m e q:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$$



Si noti che la funzione può avere un asintoto obliquo a sinistra, a destra o completo e che talvolta è necessario fare i limiti a +∞ e a -∞ separatamente.