# ELEMENTI DI PROBABILITA' E STATISTICA: LEZ.4

Prof. Roberto Capone
A.A. 2023/24
Corso di Laurea in Scienze Biologiche

# Probabilità condizionata

Eventi dipendenti ed eventi indipendenti (some remarks)

Consideriamo una scatola contenente 9 palline: 3 rosse, 2 blu e 4 gialle. Estraiamo una pallina per due volte consecutive. La seconda pallina viene estratta dopo aver rimesso la prima nella scatola.
Consideriamo gli eventi
$E_1$ = «la prima pallina estratta è rossa»,
$E_2$ = «la seconda pallina estratta è gialla». Gli eventi $E_1$ ed $E_2$ sono indipendenti, perché la seconda estrazione non è influenzata dalla prima.
Se invece la prima pallina estratta non viene rimessa nella scatola, gli eventi $E_1$ ed $E_2$ sono dipendenti, perché il verificarsi o il non verificarsi di $E_1$ cambia il numero dei casi favorevoli per $E_2$

DEFINIZIONE

Due eventi $E_1$ ed $E_2$ sono: indipendenti se il verificarsi di uno non influenza la probabilità di verificarsi dell'altro; dipendenti in caso contrario.

# Probabilità condizionata

DEFINIZIONE

Dati due eventi $E_1$ ed $E_2$ con $P(E_1) \neq 0$ si chiama **probabilità condizionata** di $E_2$ rispetto a $E_1$ , e si indica con $P\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$ la probabilità che si verifichi $E_2$ nell'ipotesi che $E_1$ si sia verificato.

Chiamiamo k il numero degli esiti favorevoli al verificarsi di $E_1$ e r quello degli esiti favorevoli al verificarsi di $E_2$ nell'ipotesi che $E_1$ si sia verificato, ossia il numero di elementi di $E_2 \cap E_1$. Per definizione, abbiamo:

$$P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{r}{k}$$

Dividiamo numeratore e denominatore per n, numero degli elementi di U:

$$P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{r}{k} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)}$$

# Probabilità condizionata

Chiamiamo k il numero degli esiti favorevoli al verificarsi di $E_1$ e r quello degli esiti favorevoli al verificarsi di $E_2$ nell'ipotesi che $E_1$ si sia verificato, ossia il numero di elementi di $E_2 \cap E_1$. Per definizione, abbiamo:

$$P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{r}{k}$$

Dividiamo numeratore e denominatore per n, numero degli elementi di U:

$$P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{r}{k} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)}$$

**TEOREMA**

La probabilità condizionata di un evento $E_2$ rispetto a un evento $E_1$ , non impossibile, è:

$$P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$

# Probabilità condizionata

**ESEMPIO**
Uno scaffale in disordine

In un negozio di scarpe, uno scaffale contiene 120 scatole, di cui 58 sono bianche e 62 sono marroni. 20 scatole bianche e 15 marroni contengono ciascuna un paio di sandali. Se un commesso prende dallo scaffale una scatola marrone, qual è la probabilità che essa contenga un paio di sandali?

Rappresentiamo gli eventi:
$E_1$ = «la scatola è marrone»; $E_2$ = «la scatola contiene un paio di sandali»
Calcoliamo $P\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$ applicando il problema della probabilità condizionata.
$P(E_1 \cap E_2)$ =«la scatola è marrone e contiene un paio di sandali»
Il numero di casi favorevoli è il numero di scatole marroni contenenti un paio di sandali, ovvero 15. I casi possibili sono tutte le scatole, ovvero 120. $P(E_1 \cap E_2) = 15/120 = 1/8$
La probabilità di prendere una scatola marrone è $P(E_1) = \frac{62}{120} = 31/60$
Se il commesso ha preso una scatola marrone, la probabilità che questa contenga un paio di sandali è

$$P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{60}{31} = \frac{15}{62}$$

# Prodotto logico di eventi

**ESEMPIO**

Estraiamo una carta da un mazzo di 52 carte.
L'evento E = «esce un re nero» è l'intersezione di:
$E_1$ = «esce una carta con seme nero»; $E_2$ = «esce un re».
Essendo E = {re di picche, re di fiori}, i casi favorevoli sono 2, quindi la probabilità del prodotto logico di $E_1$ ed $E_2$ è:

$$P(E) = P(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

Questo risultato si può ottenere anche in un altro modo. Dalla relazione della probabilità condizionata abbiamo:

$$P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} \rightarrow P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$$

Applichiamo la relazione ottenuta nel nostro esempio:

$$P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$$

Pertanto,

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{26}$$

# Prodotto logico di eventi

**TEOREMA**

La probabilità del prodotto logico di due eventi $E_1$ ed $E_2$ è uguale al prodotto della probabilità dell'evento $E_1$ per la probabilità dell'evento $E_2$ nell'ipotesi che $E_1$ si sia verificato:

$$\boldsymbol{P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P\left(\frac{E_2}{E_1}\right)}$$

In particolare, nel caso di eventi indipendenti:

$$\boldsymbol{P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)}$$

# Esempi

**ESEMPIO 1**

Da un'indagine di mercato condotta tra i clienti di un centro commerciale è emerso che il 12% usufruisce dell'apertura serale e che il 74% è cliente della farmacia. Se le due preferenze sono indipendenti, qual è la probabilità che un cliente usufruisca sia dell'apertura serale sia della farmacia del centro commerciale?

$\boldsymbol{E_1}$ = «usufruire dell'apertura serale», $\boldsymbol{P(E_1) = \frac{12}{100} = 12\%}$

$\boldsymbol{E_2}$= «essere cliente della farmacia», $\boldsymbol{P(E_2) = \frac{74}{100} = 74\%}$

$$\boldsymbol{P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{12}{100} \cdot \frac{74}{100} = 8,88\%}$$

# Esempi

**ESEMPIO 2**

Qual è la probabilità che la somma del lancio di due dadi a sei facce non truccati sia maggiore o uguale a 8 sapendo che il risultato del primo dado è pari?

L'evento A=«risultato del primo dado pari» contiene 18 elementi per cui P(A)=18/36=1/2
Fra questi solo 9 appartengono anche all'evento B=«somma maggiore o uguale a 8» (sono gli elementi dell'evento $B \cap A$); quindi la probabilità che la somma sia maggiore o uguale a 8 sapendo che il primo dado è pari è uguale a 9/18 (numero di successi diviso numero di tentativi).
Usando invece la probabilità condizionata notiamo che l'evento $B \cap A$ contiene 9 elementi per cui

$$P(B \cap A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

Otteniamo:

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B \cap A) = \frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

# Problemi con somma e prodotto logico

**ESEMPIO**

Da un'urna che contiene 4 palline nere e 6 bianche estraiamo consecutivamente 3 palline. Calcoliamo la probabilità che le palline siano 2 nere e 1 bianca, con estrazioni senza rimbussolamento.

Consideriamo:
$\boldsymbol{E_1}$ = «alla prima estrazione esce una pallina nera»;
$\boldsymbol{E_2}$ = «alla seconda estrazione esce una pallina nera»;
$\boldsymbol{E_3}$ = «alla terza estrazione esce una pallina nera».
L'evento E si verifica se si ottiene una delle seguenti sequenze:

(n, n, b) o (n, b, n) o (b, n, n)

Quindi:

$$E = (E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}) \cup (E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3) \cup (\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3)$$

L'evento E è l'unione di tre eventi incompatibili, dunque

$$P(E) = P(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}) + P(E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3) + P(\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3)$$

# Problemi con somma e prodotto logico

Se non c'è rimbussolamento, gli eventi $E_1, E_2, E_3$ e anche i loro complementari sono dipendenti; quindi, per esempio, per il primo addendo abbiamo

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) \cdot P(\overline{E_3}|E_2 \cap E_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8}$$

Quindi, ripetiamo il procedimento con gli altri addendi:

$$P(E) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{10}$$

# Problema delle prove ripetute

Lanciamo un dado regolare e calcoliamo la probabilità che in cinque lanci consecutivi la faccia 3 si presenti soltanto la prima volta e poi non si presenti più nei lanci successivi. Chiamiamo $E_1$ questo evento. Siamo di fronte a un evento prodotto logico di una sequenza di cinque eventi indipendenti.
La probabilità dell'evento E = «esce la faccia 3» è:

$$P(E) = \frac{1}{6}$$

Mentre la probabilità dell'evento
$\bar{E}$ = «non esce la faccia 3» è $1 - p(E) = 5/6$
La probabilità richiesta è

$$P(E_1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^4}{6^5}$$

Abbandoniamo ora la richiesta che la faccia 3 esca la prima volta e consideriamo il caso in cui essa esca una volta sola, non importa in quale posizione della sequenza.
L'evento $E_{1,5}$= «esce 3 solo una volta su cinque lanci» è la somma logica degli eventi $E_i$ = «esce 3 solo all'i-esimo lancio», con i che va da 1 a 5;
tali eventi sono tutti incompatibili fra loro e ognuno ha probabilità uguale $P(E_1)$
Quindi:

$$P(E_{1,5}) = 5P(E_1) = 5 \cdot \frac{5^4}{6^5} = \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

# Problema delle prove ripetute

Il numero di sequenze che contengono solo un 3 può essere visto come il numero dei modi in cui un elemento può occupare cinque posti a disposizione:

$$\binom{5}{1}$$

Se l'evento «esce la faccia 3» si deve presentare due volte, abbiamo:

$$P(E_{2,5}) = \binom{5}{2}\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

Se le volte sono tre:

$$P(E_{3,5}) = \binom{5}{3}\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

E così via.

# Problema delle prove ripetute

Generalizziamo il problema precedente:

Abbiamo un evento E con probabilità costante p di verificarsi. L'evento contrario ha probabilità di verificarsi q = 1 - p. Effettuiamo n prove e vogliamo calcolare la probabilità che l'evento E si verifichi k volte e (n - k) volte non si verifichi. Supponendo che l'evento accada nelle prime k prove e non accada nelle (n - k) successive, dobbiamo applicare il teorema della probabilità del prodotto logico e abbiamo:

$$\underbrace{p\cdot p\cdot p\cdot\ldots\cdot p}_{k\text{ volte}}\cdot\underbrace{q\cdot q\cdot q\cdot\ldots\cdot q}_{(n-k)\text{ volte}}=p^k\cdot q^{n-k}.$$

Poiché le k prove in cui l'evento si verifica si possono presentare con ordine diverso, dobbiamo applicare il teorema della somma logica di eventi e quindi moltiplicare il valore precedente per il numero delle possibilità che ci sono.
Indichiamo il valore della probabilità con il simbolo $P_{k,n}$
Abbiamo:

$$P_{k,n}=\binom{n}{k}p^k\cdot q^{n-k}$$

# Problema delle prove ripetute

**TEOREMA**

Schema delle prove ripetute (o di **Bernoulli**)

Poiché le k prove in cui l'evento si verifica si possono presentare con ordine diverso, dobbiamo applicare il teorema della somma logica di eventi e quindi moltiplicare il valore precedente per il numero delle possibilità che ci sono.
Indichiamo il valore della probabilità con il simbolo $P_{k,n}$
Abbiamo:

$$\boldsymbol{P_{k,n} = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}}$$

# Prova tu

In un'urna ci sono 12 palline, di cui 8 bianche e 4 nere. Si effettuano due estrazioni, con reimmissione. Calcola la probabilità di estrarre, in successione, una pallina bianca e una nera. Determina la stessa probabilità nel caso in cui la prima pallina estratta non venga rimessa nell'urna.

In una indagine per scoprire il gradimento di un certo film sono stati intervistati 50 bambini, 50 donne e 50 uomini, ed è risultato che il film è piaciuto a 30 bambini, 20 donne e 25 uomini. Scegliendo a caso un bambino, una donna e un uomo, qual è la probabilità che il film sia piaciuto solo a uno di loro?

Un test è composto da 10 domande, ciascuna con quattro opzioni di risposta, di cui una sola corretta. Alberto risponde a caso a tutte le 10 domande. Qual è la probabilità che risponda correttamente ad almeno 7 domande?

Un negozio di abbigliamento online ha rilevato che la merce viene resa con una probabilità del 6%. Calcoliamo la probabilità che su 10 capi ordinati:
a. nessuno venga reso; b. 3 vengano resi; c. tutti vengano resi; d. almeno 2 vengano resi

# Teorema di Bayes

## Se l'evento deve accadere: la disintegrazione

**ESEMPIO**

Abbiamo due urne:
urna 1: 3 palline bianche e 2 nere;
urna 2: 4 palline bianche e 5 nere.
Calcoliamo la probabilità che, scegliendo a caso un'urna ed effettuando l'estrazione di una pallina, questa sia bianca. Per la scelta dell'urna ci affidiamo al lancio di un dado: se viene un numero minore di tre, effettueremo l'estrazione dalla prima urna, altrimenti dalla seconda.
Gli esiti dell'esperimento possono essere descritti da coppie il cui primo elemento indica il numero del dado uscito e il secondo se la pallina estratta è bianca (b) oppure nera (n).
Per esempio, la coppia (4, b) indica che nel lancio del dado esce 4 e nell'estrazione dall'urna (la seconda) la pallina è bianca.
Consideriamo i due eventi, riferiti al lancio del dado:
$E_1$= «numero minore di 3»; $E_2$ = «numero maggiore o uguale a 3».
Questi due eventi sono incompatibili ed esauriscono tutte le possibilità di lancio.
Essi hanno probabilità:

$$P(E_1) = \frac{2}{6}, \quad P(E_2) = \frac{4}{6}$$

# Teorema di Bayes

## Se l'evento deve accadere: la disintegrazione

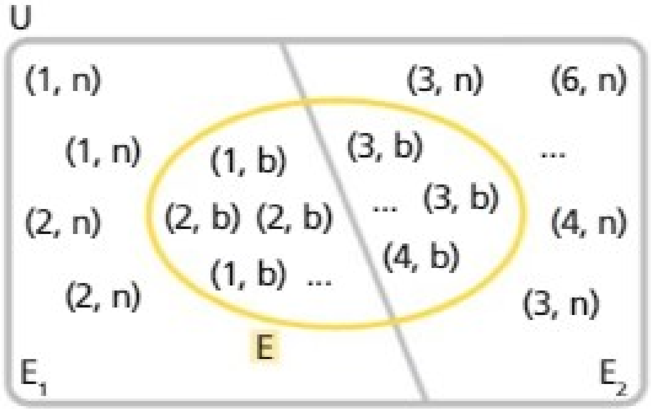
L'evento E = «pallina bianca», formato dalle coppie che hanno come secondo elemento b, è un sottoinsieme di $U = E_1 \cup E_2$ , ed è l'unione di due eventi incompatibili:
$E \cap E_1$= «numero minore di 3 e pallina bianca dalla prima urna»;
$E \cap E_2$= «numero maggiore o uguale a 3 e pallina bianca dalla seconda urna».
Gli eventi $E_1$ ed $E_2$ sono dipendenti, così come gli eventi E ed $E_2$, quindi per calcolare la probabilità delle intersezioni dobbiamo usare la probabilità condizionata.

$$P(E|E_1) = \frac{3}{5} \qquad P(E|E_2) = \frac{4}{9}$$

quindi, applicando il teorema della probabilità del prodotto logico, abbiamo:

$$P(E \cap E_1) = P(E_1) \cdot P(E|E_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{5} = \frac{1}{5}$$

$$P(E \cap E_2) = P(E_2) \cdot P(E|E_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{27}$$

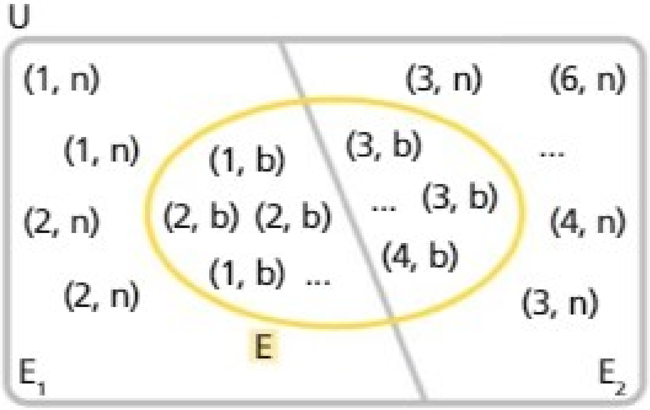


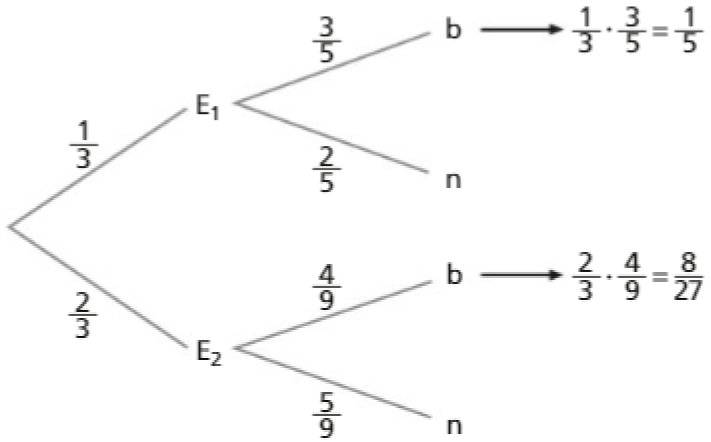

Dunque:
$$P(E) = P(E \cap E_1) + P(E \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E|E_1) + P(E_2) \cdot P(E|E_2) = 67/135$$

# Teorema di Bayes

## Se l’evento deve accadere: la disintegrazione

Visualizziamo tutto il procedimento utilizzando un diagramma ad albero, dove i rami uscenti da un nodo rappresentano eventi incompatibili e, sommando le probabilità segnate su di essi, otteniamo il valore 1.




Partendo da sinistra, percorrendo i rami del diagramma, leggiamo la successione degli eventi che formano l’evento composto ed effettuiamo il prodotto delle probabilità. Addizionando le probabilità degli eventi prodotto dei percorsi, otteniamo la probabilità dell’evento considerato.

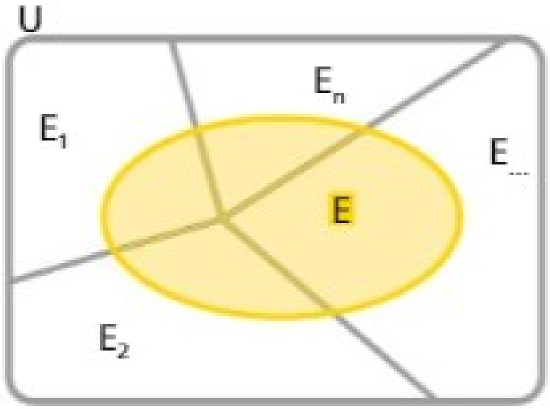
# Teorema di Bayes

## Se l’evento deve accadere: la disintegrazione

In generale, un evento E si può esprimere come unione di eventi composti a due a due incompatibili nel seguente modo:

$$E = (E \cap E_1) \cup (E + E_2) ,\cup \cdots \cup (E + E_n),$$

Dove $E_1, E_2, \ldots, E_n$ costituiscono una partizione dello spazio campionario U, cioè sono eventi:




- non vuoti;
- incompatibili a due a due;
- tali che la loro unione è uguale a U.

Applicando il teorema della probabilità totale, si ha

$$P(E) = P(E \cap E_1) + P(E + E_2) + \cdots + P(E + E_n),$$

e applicando il teorema del prodotto logico di eventi, si ha la formula

$$P(E) = P(E_1) \cdot P(E|E_1) + P(E_2) \cdot P(E|E_2) + \cdots + P(E_n) \cdot P(E|E_n)$$

la cui applicazione risulta facilitata utilizzando i diagrammi ad albero. Questa formula è anche detta **formula di disintegrazione.**

# Teorema di Bayes: se l’evento è accaduto

Consideriamo ancora l’esperimento relativo all’estrazione di una pallina bianca da due urne, la cui scelta è stabilita dal lancio di un dado.
Supponiamo che si sia verificato l’evento:
E = «estrazione di una pallina bianca».
Ci chiediamo:
«Qual è la probabilità che la pallina bianca estratta provenga dalla prima urna?».

Siamo in una situazione completamente diversa da quella precedente.
Infatti in precedenza abbiamo sempre calcolato la probabilità di un evento che potrebbe accadere conoscendo le cause che stanno alla base del suo verificarsi.
Ora invece l’evento si è verificato e vogliamo conoscere la probabilità che sia stata una certa causa a produrlo.

# Teorema di Bayes: se l'evento è accaduto

Usiamo ancora le notazioni:
$E_1$ = «numero minore di 3»;
$E_1 \cap E$ = «numero minore di 3 e pallina bianca dalla prima urna».
Dobbiamo calcolare la probabilità che, verificatosi E, si sia verificato anche $E_1$ , cioè:

$$P(E_1|E) = \frac{P(E_1 \cap E)}{P(E)}$$

Essendo $(E_1 \cap E)$= $(E \cap E_1)$ e utilizzando i valori di probabilità che abbiamo già calcolato,

$$P(E_1 \cap E) = P(E \cap E_1) = P(E_1)P(E|E_1) = 1/5$$

$$P(E) = \frac{67}{135}$$

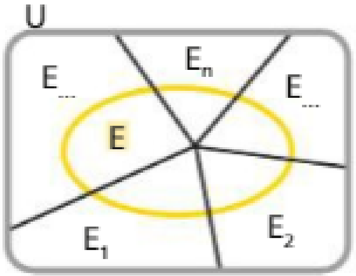
Otteniamo

$$P(E_1|E) = \frac{P(E_1 \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E_1)P(E|E_1)}{P(E)} = \frac{1/5}{\frac{67}{135}} = \frac{27}{67}$$

Pertanto, la probabilità della causa dell'evento che si è verificato si ottiene calcolando il rapporto tra la probabilità dell'evento, verificata la causa, e la probabilità totale dell'evento.

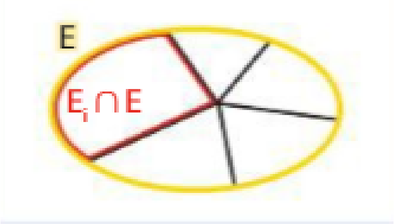
# Teorema di Bayes: se l’evento è accaduto

Generalizziamo il problema
Sia U uno spazio campionario ed $E \subset U$ un evento che supponiamo si sia verificato. Consideriamo una partizione di U in n eventi $E_1, E_2, \dots, E_n$; allora




$$E = (E \cap E_1) \cup (E + E_2) ,\cup \cdots \cup (E + E_n),$$

La probabilità che l’evento $E_i$ sia stato la causa di E si ottiene come rapporto fra la probabilità di $E \cap E_i$ e la probabilità dell’evento totale E.




Ciò conduce alla seguente formula, nota come teorema di Bayes o teorema della probabilità delle cause.

**Teorema di Bayes**
La probabilità che, essendosi verificato un evento E, la causa che sta alla sua origine sia l’evento $E_i$ con $i = 1, 2, \dots, n$, è

$$P(E_i|E) = \frac{P(E_i \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E_i)P(E|E_i)}{P(E)}$$

dove $P(E)$ è la probabilità dell’evento totale

# Teorema di Bayes: esempi

Il teorema di Bayes trova applicazioni nel campo del controllo della qualità, in medicina, in farmacia e ogniqualvolta è necessario valutare il «peso» di una causa di fronte al verificarsi di un evento.

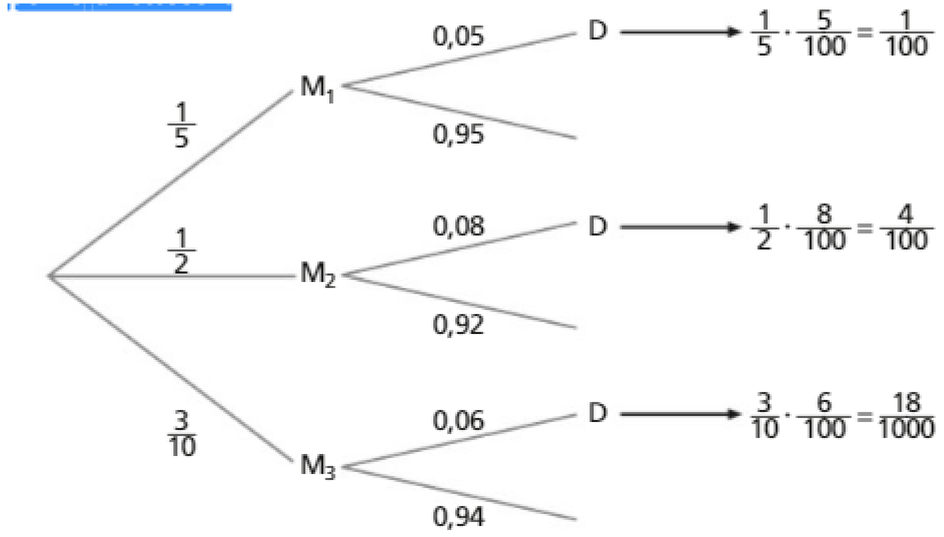
**ESEMPIO**

Un’azienda utilizza tre macchinari: il primo produce 500 pezzi, il secondo 1250 e il terzo 750. I pezzi difettosi prodotti dai tre macchinari sono rispettivamente il 5%, l’8% e il 6%.

Avendo prelevato un pezzo difettoso, qual è la probabilità che provenga dal primo macchinario? E qual è la probabilità che provenga dal secondo o dal terzo macchinario?

# Teorema di Bayes: esempi

**SOLUZIONE**
Indichiamo con
$M_1$ = «produzione primo macchinario»,
$M_2$ = «produzione secondo macchinario»,
$M_3$ = «produzione terzo macchinario»,
$D$ = «pezzo difettoso».




Calcoliamo la probabilità che, prendendo a caso un pezzo, esso sia difettoso

$p(D) = 0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}018 = 0{,}068$ (Formula di disintegrazione)

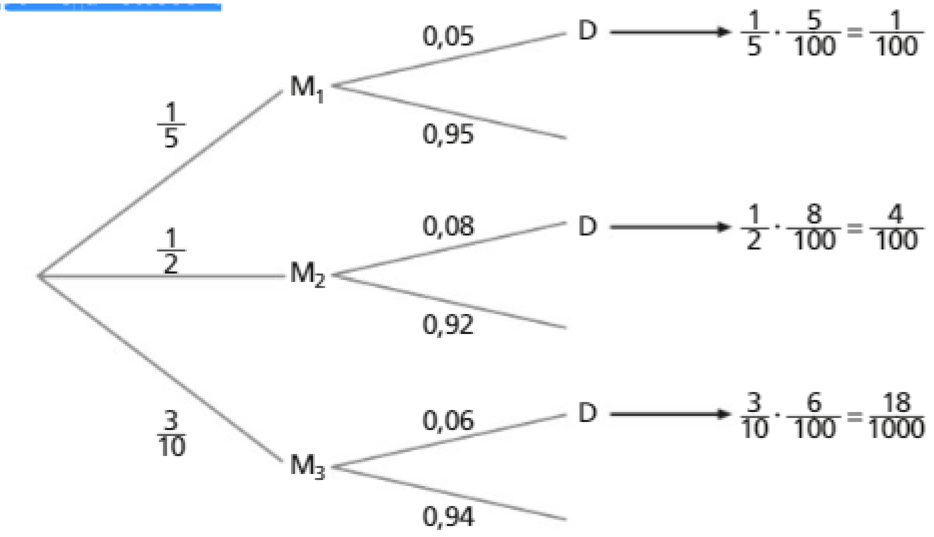
Rispondiamo al primo quesito. La probabilità che esca un pezzo difettoso dalla prima macchina è:

$$P(D \cap M_1) = P(M_1) \cdot P(D|M_1) = 0{,}01$$

Calcoliamo la probabilità che, avendo preso un pezzo difettoso, esso provenga dalla prima macchina:

$$P(M_1|D) = \frac{P(M_1)P(D|M_1)}{P(D)} = \frac{0{,}001}{0{,}068} = \frac{5}{34}$$

# Teorema di Bayes: esempi




Rispondiamo al secondo quesito. La probabilità che esca un pezzo difettoso dalla seconda o dalla terza macchina è:

$$P(M_2) \cdot P(D|M_2) + P(M_3) \cdot P(D|M_3) = 0{,}04 + 0{,}018 = 0{,}058$$

Quindi, la probabilità che, avendo preso un pezzo difettoso, esso provenga dalla seconda o dalla terza macchina è

$$\frac{0{,}058}{0{,}068} = \frac{29}{34}$$

# ESERCIZI

**ESERCIZIO 1**

Una ditta produce bicchieri da vino, da acqua e da amaro in queste proporzioni: 30%, 45%, 25%. I processi produttivi sono diversi e risultano difettosi il 2% dei bicchieri da vino, il 3% di quelli da acqua e il 5% di quelli da amaro.

a. Prendendo un bicchiere a caso, qual è la probabilità che sia difettoso?

b. Se si è preso un bicchiere difettoso, qual è la probabilità che sia da vino?

**ESERCIZIO 2**

Un'urna contiene 6 palline bianche e 10 nere e una seconda urna 8 bianche e 2 nere. Scegli a caso un'urna ed estrai una pallina. Calcola la probabilità che essa sia bianca. [47/80]

**ESERCIZIO 3**

Abbiamo due urne. La prima contiene 4 palline bianche e 2 nere e la seconda 6 bianche e 4 nere. Si sceglie a caso un'urna estraendo una carta da un mazzo di 40. Se la carta estratta è una figura, si sceglie la prima urna, altrimenti la seconda. Dopo aver scelto l'urna si estrae una pallina. Calcola la probabilità di estrarre una pallina nera. [19/50]

**ESERCIZIO 4**

Due macchine producono lo stesso pezzo meccanico. La prima produce il 40% di tutto il quantitativo e il 98% della sua produzione è senza difetti. La seconda macchina ha un tasso di difettosità del 5%. Calcola la probabilità che, estraendo a caso un pezzo, questo sia difettoso. [3,8%]

# ESERCIZI

## ESERCIZIO 4

Tre reparti di un’impresa alimentare producono succhi di frutta. Le percentuali della produzione totale sono il 30% per il primo reparto, il 50% per il secondo reparto e il 20% per il terzo. Il livello qualitativo è del 99% per il primo reparto, del 95% per il secondo e del 96% per il terzo. Calcola il livello qualitativo di tutta la produzione. [0,964]

## ESERCIZIO 5

Un automobilista arriva a un bivio. Sa che una strada è quella giusta e l’altra è sbagliata. Vi sono due persone A e B al bivio. A dice la verità quattro volte su dieci e B invece sette volte su dieci. L’automobilista chiede informazioni a caso a una di esse e ne segue l’indicazione. Calcola la probabilità che ha l’automobilista di percorrere la strada esatta. [11/20]

## ESERCIZIO 6

Un’azienda ha prodotto una certa quantità di stampanti, di cui il 15% presenta un difetto di fabbricazione. Le stampanti non difettose hanno una probabilità del 20% di rompersi entro i primi tre anni, mentre quelle difettose dell’80%. Comprando una stampante (senza sapere se è difettosa o meno), qual è la probabilità che si rompa entro tre anni? [29%]

## ESERCIZIO 7

Abbiamo due urne. La prima contiene 4 palline bianche e 6 nere e la seconda 5 bianche e 4 nere. Si sceglie a caso un’urna estraendo una carta da un mazzo di 40. Se la carta è una figura viene scelta la prima urna, altrimenti la seconda. Sapendo che la pallina estratta è nera, calcola la probabilità che essa provenga dalla seconda urna. [140/221]

# ESERCIZI

## ESERCIZIO 8

Si hanno due urne. La prima contiene 5 palline bianche, 2 nere e 3 rosse e la seconda 4 bianche, 2 nere e 4 rosse. Si sceglie a caso un'urna lanciando un dado e quindi si estrae una pallina. Se viene una faccia con il numero minore di 3, si sceglie la prima urna, altrimenti la seconda. Viene estratta una pallina rossa. Calcola la probabilità che essa provenga dalla seconda urna.[8/11]

## ESERCIZIO 9

In un gruppo di 30 guide turistiche, 20 sono donne. Le donne che parlano il tedesco sono 15, mentre gli uomini che lo parlano sono solo 4. Calcola la probabilità che, scelta a caso una persona che parla il tedesco, questa sia un uomo. **[4/19]**

## ESERCIZIO 10

Giada sta cercando una maglietta da abbinare alla sua gonna bianca. Nel suo cassetto ha tre magliette nere, due bianche e una rossa. Non ha molto tempo, perciò si concede al massimo due tentativi, ma vorrebbe non indossare una maglietta bianca. Prende una maglietta dal cassetto: se è bianca la rimette nel cassetto, altrimenti la mette sul letto. Poi prende un'altra maglietta. Se la seconda maglietta è rossa, qual è la probabilità che la prima maglietta che ha afferrato sia bianca? [5/14]

## ESERCIZIO 11

Il 70% di un gruppo di ammalati di gastrite è stato sottoposto a una cura con un nuovo farmaco che ha sostituito il precedente: di questi, il 60% ha ottenuto un miglioramento. Fra le persone non sottoposte al trattamento con il nuovo farmaco, ha ottenuto un miglioramento il 30%. Calcola la probabilità che un paziente abbia preso il farmaco, sapendo che ha avuto un miglioramento. [14/17]