ELEMENTI DI PROBABILITA’ E STATISTICA

Prof. Roberto Capone
A.A. 2023/24
Corso di Laurea in Scienze Biologiche

Che cos’è il calcolo combinatorio

«Quante sono tutte le colonne che si possono giocare al Superenalotto, cioè quanti sono tutti i modi possibili di scegliere 6 numeri tra i 90 a disposizione?»
«Quante sono le possibili classifiche di una gara a cui partecipano 10 concorrenti?»

Il calcolo combinatorio permette di rispondere a queste domande o ad altre simili, in quanto studia il numero di modi in cui è possibile raggruppare, disporre o ordinare gli elementi di un insieme finito di oggetti o persone.

Raggruppamenti

Esaminiamo il seguente problema. Un ragazzo ha a disposizione due paia di pantaloni e quattro magliette. Ci domandiamo in quanti modi diversi può vestirsi. Fissato un paio di pantaloni, a questo può accostare, una alla volta, ognuna delle quattro magliette, e quindi abbiamo quattro possibilità.

Ma a questo numero di possibilità dobbiamo aggiungere le possibilità che si ottengono con il secondo paio di pantaloni e, di nuovo, ognuna delle quattro magliette. Quindi le possibilità sono in totale otto

Raggruppamenti

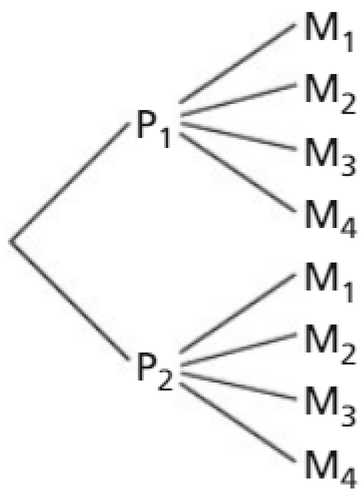
Indichiamo le due paia di pantaloni con P_1 e P_2, le quattro magliette con $M_1, M_{\ 2}, M_3$ e M_4 e consideriamo gli insiemi P={P_1, P_2} e M={$M_1, M_{\ 2}, M_3, M_4$}. Elenchiamo tutte le possibili coppie. Esse non sono altro che gli elementi del prodotto cartesiano fra l’insieme dei pantaloni P e l’insieme delle magliette M:

$$P \ \times \ M \ = \{(P_1; M_1), (P_1; M_2), (P_1; M_3), (P_1; M_4), (P_2; M_1), (P_2; M_2), \}. (P_2; M_3), \}. (P_2; M_4)\}.$$

Raggruppamenti

$$P \times M = \{(P_1;M_1),(P_1;M_2),(P_1;M_3),(P_1;M_4),(P_2;M_1),(P_2;M_2),\}.(P_2;M_3),\}.(P_2;M_4)\}.$$

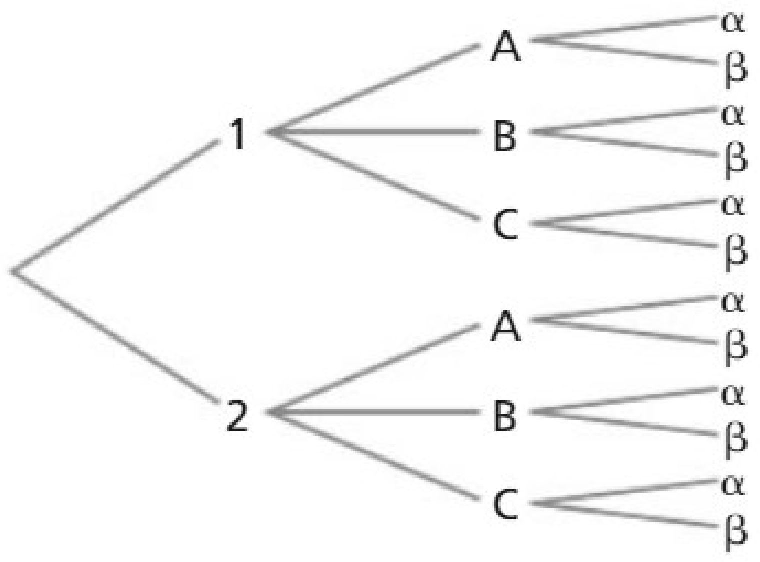
Il diagramma ad albero della figura sotto suggerisce un metodo per determinare il numero di tutti i gruppi che è possibile formare. Le 2 possibilità corrispondenti ai rami dei pantaloni devono essere moltiplicate per le 4 possibilità corrispondenti ai rami delle magliette. Quindi in totale abbiamo $2 \cdot 4 = 8$ gruppi.



Raggruppamenti, ESEMPIO

Elenchiamo tutte le sigle di tre elementi che possiamo scrivere utilizzando le cifre 1 e 2 per il primo posto, le lettere A, B, C per il secondo e le lettere greche α e β per l'ultimo posto. Calcoliamo poi quante sono.

Disegniamo il diagramma ad albero.
Percorrendo i diversi rami del diagramma possiamo costruire tutte le sigle possibili. Procedendo dall'alto verso il basso: $1A\alpha, 1A\beta, 1B\alpha, \ldots$
Calcoliamo il numero delle sigle che possiamo scrivere: 2 sono le possibilità per la prima posizione, 3 per la seconda e 2 per la terza. Complessivamente abbiamo $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ gruppi.



In generale, per determinare quanti gruppi si possono formare assegnando il primo posto a un elemento di un insieme A con n elementi, il secondo a uno di un insieme B con m elementi, il terzo a uno di un insieme C con k elementi, …, con $n, m, k \in N - \{0\}$, occorre calcolare il prodotto $n \cdot m \cdot k$

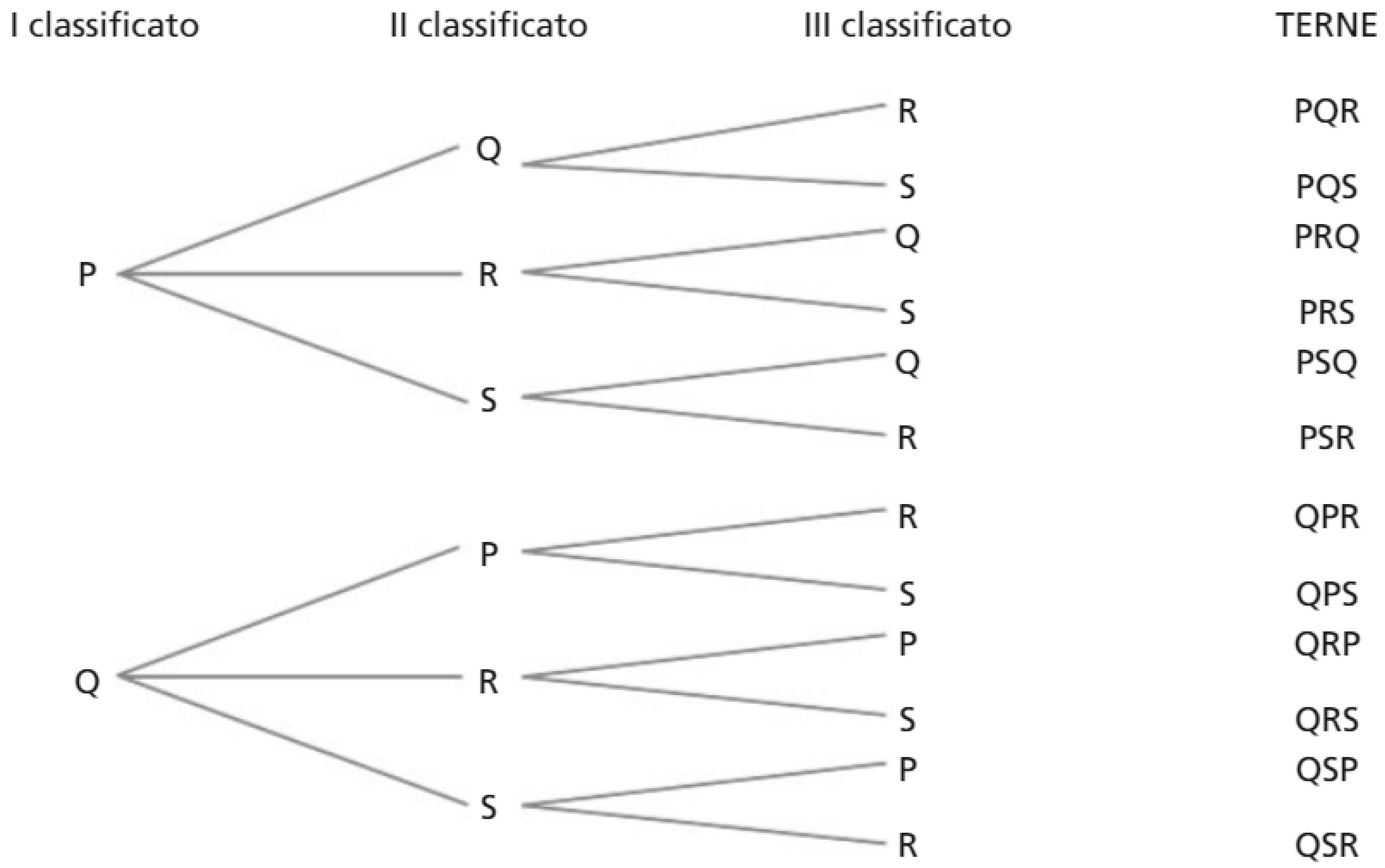
Disposizioni

Pierre, Quentin, Robert e Samuel si sfidano in una corsa campestre. Vengono premiati solo i primi tre. Calcoliamo quante sono le possibili classifiche dei premiati.

Indichiamo i quattro atleti con le lettere P, Q, R, S e con A l’insieme costituito da questi quattro elementi, cioè: $A = \{P, Q, R, S\}$

Costruiamo con un diagramma ad albero tutte le possibili terne di premiati.

Disposizioni



Disposizioni

Notiamo che ogni terna si distingue dalle altre per la diversità di almeno un elemento, l'ordine degli elementi, oppure per entrambi i motivi.
Chiamiamo i gruppi con le caratteristiche indicate con il termine di disposizioni semplici.
Per arrivare rapidamente al calcolo del numero di disposizioni, consideriamo che per il primo posto le possibilità sono 4.
Dopo aver scelto il primo classificato, per il secondo classificato restano 4 - 1 = 3 atleti che possono arrivare secondi, cioè 3 possibilità per il secondo posto.
Per il terzo classificato, infine, restano 4 - 2 = 2 atleti ancora in gara, cioè 2 possibilità per il terzo posto.
Complessivamente i gruppi sono: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.
Per indicare il valore trovato, usiamo la seguente notazione:

$$D_{4,3} = 24$$

(si legge: «disposizioni semplici di 4 elementi di classe 3»).

Disposizioni

Generalizziamo il procedimento considerando n oggetti distinti e determiniamo la formula per i raggruppamenti di classe k, cioè con k oggetti.

DEFINIZIONE

Le disposizioni semplici di n elementi distinti di classe k (con $0 < k \leq n$) sono tutti i gruppi di k elementi scelti fra gli n, che differiscono per almeno un elemento o per l'ordine con cui gli elementi sono collocati:

$$\boldsymbol{D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1)} \qquad con\ n, k \in N; 0 < k \leq n$$

ESEMPIO

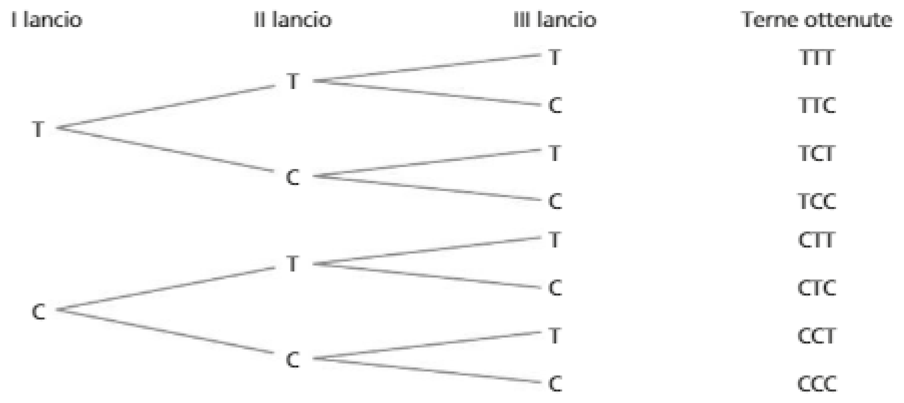
A un torneo di calcio femminile partecipano 15 squadre. Quante sono le possibili classifiche delle prime cinque squadre?

L'insieme di partenza contiene come elementi le 15 squadre, perciò n = 15; i raggruppamenti contengono 5 elementi, dunque k = 5. Il numero delle possibili classifiche è:

$$D_{15,5} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360360$$

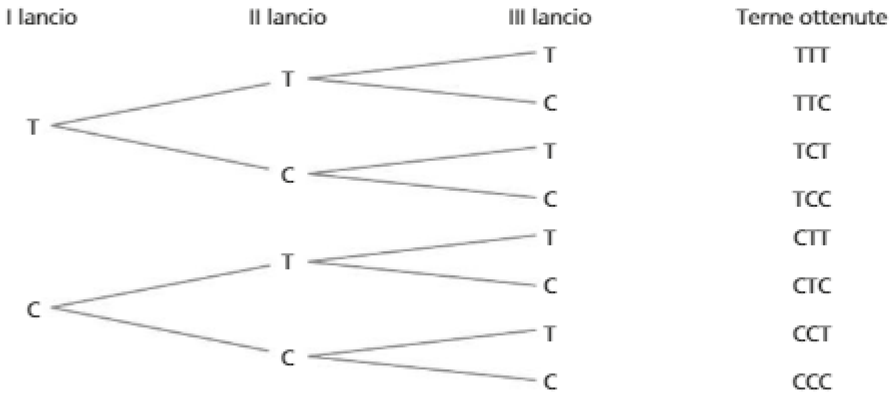
Disposizioni (con ripetizione)

Lanciamo una moneta tre volte e cerchiamo di prevedere tutti i modi con cui si succedono le uscite delle due facce. L'insieme A che contiene i due possibili risultati del lancio è: A = {T, C} , dove T indica il risultato «Testa» e C il risultato «Croce».
Costruiamo con un diagramma ad albero le terne di tutti i possibili risultati.



I gruppi così ottenuti differiscono per l'ordine degli elementi contenuti, ma un elemento può comparire più di una volta. I gruppi trovati si chiamano disposizioni con ripetizione. A differenza delle disposizioni semplici, la classe k di un gruppo può essere maggiore del numero n di elementi a disposizione. Nell'esempio la classe di ogni gruppo è 3, mentre gli elementi sono 2.

Disposizioni (con ripetizione)



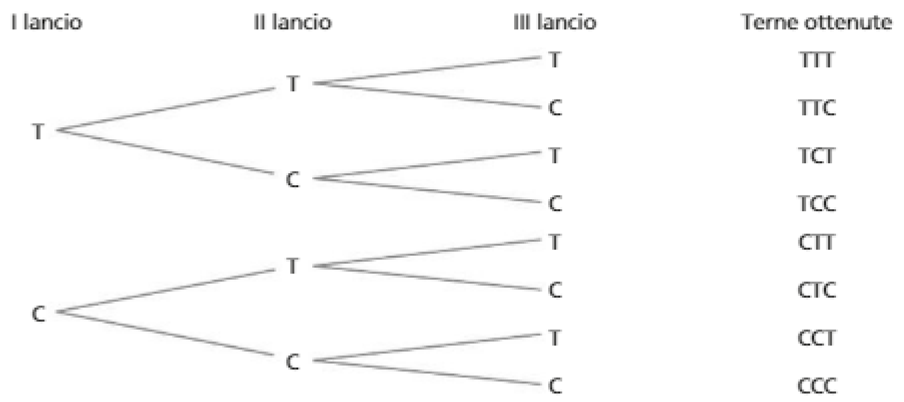
Osserviamo che le terne ottenute corrispondono agli elementi del prodotto cartesiano $A \times A \times A$.
Per determinare il loro numero possiamo usare ciò che già sappiamo sui raggruppamenti.
L'insieme A ha 2 elementi, quindi il numero dei possibili gruppi di tre elementi di A, cioè il numero di elementi dell'insieme $A \times A \times A$, è :

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

In alternativa possiamo ricorrere al «metodo delle possibilità».
Per il primo posto abbiamo 2 possibilità, che restano 2 anche per il secondo e per il terzo in quanto un elemento già utilizzato può ripresentarsi: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$
In simboli, scriviamo

$$D'_{2,3} = 2^3 = 8$$

Disposizioni (con ripetizione)



Generalizziamo il procedimento considerando n oggetti distinti e determiniamo la formula per raggruppamenti di classe k

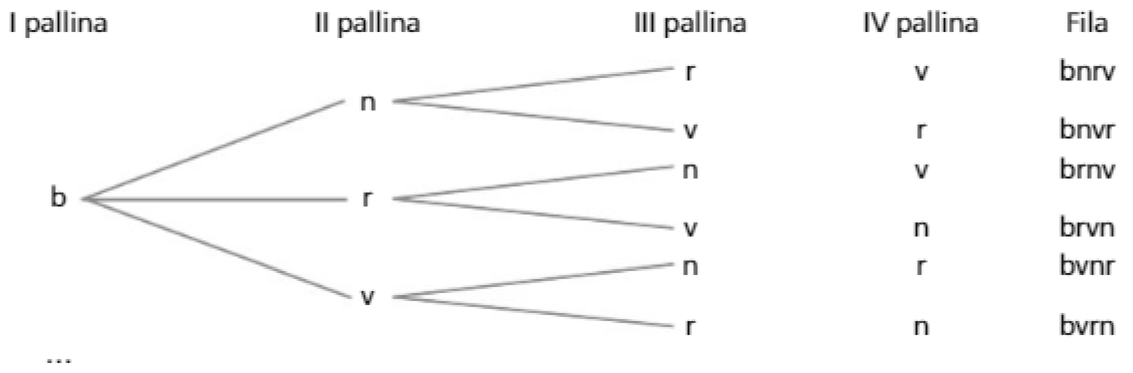
DEFINIZIONE

Le **disposizioni con ripetizione** di n elementi distinti di classe k (con k numero naturale qualunque non nullo) sono tutti i gruppi di k elementi, anche ripetuti, scelti fra gli n, che differiscono per almeno un elemento o per il loro ordine:

$$D'_{n,k} = n^k$$

Permutazioni (semplici)

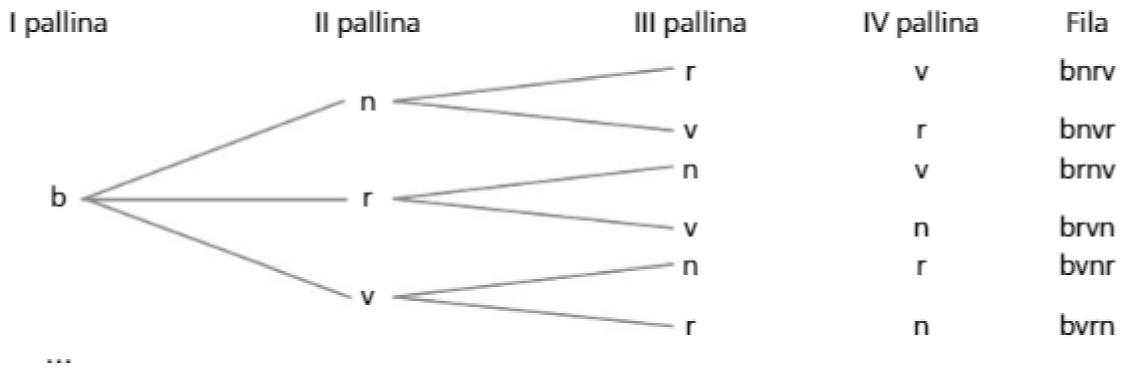
Abbiamo quattro palline colorate, ognuna di un colore diverso (bianco, nero, rosso, verde). Calcoliamo in quanti modi diversi possiamo metterle in fila. L'insieme dei colori è: A = {b, n, r, v }.
Costruiamo con un diagramma ad albero tutti i possibili raggruppamenti.



Se la prima pallina è bianca, si ottengono 6 raggruppamenti.
Ma la prima pallina può essere bianca, rossa, nera o verde, quindi:
$6 \cdot 4 = 24$ raggruppamenti.

Permutazioni (semplici)

Notiamo che ogni gruppo contiene tutti gli elementi dell’insieme e differisce dagli altri solo per l’ordine. Stiamo quindi considerando le disposizioni semplici di 4 elementi di classe 4. Chiamiamo i raggruppamenti che hanno queste caratteristiche permutazioni semplici o più brevemente permutazioni.



Nel nostro esempio parliamo di permutazioni di 4 elementi e scriviamo il numero delle permutazioni ottenute nel modo seguente:

$$P_4 = 24$$

Permutazioni (semplici)

Nel caso generale, poiché le permutazioni di n elementi coincidono con le disposizioni semplici di classe n degli n elementi, per calcolare il numero delle permutazioni, poniamo nella formula delle disposizioni semplici $k = n$:

$$P_n = D_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-n+1) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 2 \cdot 1$$

DEFINIZIONE

Le permutazioni semplici di n elementi distinti sono tutti i gruppi formati dagli n elementi, che differiscono per il loro ordine:

$$\boldsymbol{P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 2 \cdot 1}$$

Funzione fattoriale

Abbiamo visto che il simbolo $\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 2 \cdot 1}$ indica il prodotto dei primi n numeri naturali, escluso lo zero. Questa scrittura non è valida per n = 0 ma nemmeno per n = 1, perché un pro- dotto si può eseguire solo se ci sono almeno due fattori. Per poter estendere il significato di fattoriale a tutti i numeri naturali abbiamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Definiamo la funzione fattoriale come:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 2 \cdot 1, con\ n \geq 2$$

$$0! = 1, 1! = 1$$

Dalla definizione deduciamo la relazione

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Questa uguaglianza suggerisce una definizione ricorsiva di $n!$

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1) \cdot n! \end{cases}$$

Inoltre, vale la seguente:

$$(n+1)! - n! = n \cdot n!$$

Funzione fattoriale

La funzione fattoriale può essere usata anche per esprimere le disposizioni

$$D_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 1)}{(2 \cdot 1)} = \frac{5!}{2!}$$

In generale

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutazioni (con ripetizione)

Calcoliamo quanti anagrammi (anche privi di significato) si possono formare con le lettere della parola TETTO. Pensiamo per il momento che le tre T non siano uguali e distinguiamole colorandole: TETTO. Se calcoliamo le permutazioni P_5 di 5 elementi, consideriamo come diverse anche le parole che differiscono soltanto per la posizione delle tre T colorate. Per esempio, mettendo la E e la O nelle prime due posizioni, nel conteggio delle permutazioni semplici sono distinte le parole:

EOTTT, EOTTT, EOTTT, EOTTT, EOTTT, EOTTT.

Abbiamo 6 casi diversi, corrispondenti alle permutazioni delle tre T colorate:

$$3! = 6$$

Questi casi sono invece indistinguibili, e uguali a EOTTT, se consideriamo la T come lettera ripetuta più volte.

Se consideriamo le 120 permutazioni di 5 lettere, in questo caso troviamo ogni raggruppamento ripetuto 6 volte. Quindi per ottenere il numero degli anagrammi di TETTO dobbiamo dividere 120 per 6:

$$\frac{120}{6} = 20$$

Permutazioni (con ripetizione)

Per indicare che dei cinque elementi tre corrispondono a uno stesso elemento ripetuto usiamo il simbolo $P_5^{(3)}$, che si legge: «permutazioni di 5 elementi di cui 3 ripetuti». Abbiamo che:

$$P_5^{(3)} = \frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = 20$$

Chiamiamo i raggruppamenti di questo tipo permutazioni con ripetizione.
In generale:

$$P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!}$$

La formula si generalizza ulteriormente quando nell'insieme di n elementi gli elementi ripetuti sono $k, h, \dots, r,$ *dove* $k + h + \dots + r \leq n$.

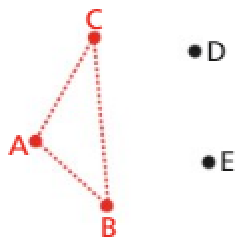
DEFINIZIONE

Le permutazioni con ripetizione di n elementi, di cui h, k, … ripetuti, sono tutti i gruppi formati dagli n elementi, che differiscono per l'ordine in cui si presentano gli elementi distinti e la posizione che occupano gli elementi ripetuti:

$$\boldsymbol{P_n^{(h,k,\dots)} = \frac{n!}{h!\,k!\dots}}$$

Combinazioni (semplici)

Consideriamo cinque punti nel piano, a tre a tre non allineati. Determiniamo quanti triangoli possiamo costruire congiungendo tre punti. Indichiamo i punti con le lettere A, B, C, D, E. Consideriamo, per esempio, il triangolo ABC. Esso viene individuato da tutte queste terne: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Nel contare i triangoli queste terne vanno prese una volta sola



Quindi, tutte le terne di lettere che indicano i vertici dei triangoli costituiscono dei gruppi che si differenziano fra di loro solo per gli elementi contenuti e non per il loro ordine. Chiamiamo questi gruppi combinazioni (semplici) di 5 elementi di classe 3. Per indicare il loro numero usiamo il simbolo $C_{5,3}$

Per ricavare $C_{5,3}$ partiamo da tutte le terne possibili, ossia le disposizioni $D_{5,3}$. Per ogni scelta di 3 elementi ci sono $P_3 = 3!$ disposizioni di questi elementi che differiscono solo per l'ordine. Tutte queste vanno contate solo una volta. Per esempio, abbiamo già visto che al triangolo ABC corrispondono le terne ABC, ACB, BCA, BAC, CBA e CAB. Abbiamo perciò:

$$C_{5,3} = \frac{D_{5,3}}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10$$

Combinazioni (semplici)

DEFINIZIONE

Le combinazioni semplici di n elementi distinti di classe k (con $0 < k \leq n$) sono tutti i gruppi di k elementi, scelti fra gli n, che differiscono per almeno un elemento (ma non per l'ordine):

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Combinazioni (semplici)

Coefficienti binomiali

Il numero delle combinazioni viene anche indicato con il simbolo $\binom{n}{k}$, che si chiama coefficiente binomiale e si legge «n su k».

Il coefficiente binomiale di due numeri naturali n e k

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Proprietà

Dalla definizione possiamo dedurre la seguente proprietà, chiamata delle classi complementari:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

Questa formula di ricorrenza è utile quando conosciamo il valore del coefficiente binomiale per un certo valore di k e dobbiamo trovare i valori delle classi successive (o precedenti)

Combinazioni (semplici)

Coefficienti binomiali

Utilizzando la formula che esprime il numero delle disposizioni semplici $D_{n,k}$ rapporto di due fattoriali, abbiamo:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

Esempio

Quanti genotipi può avere un gene con 7 alleli?

I genotipi omozigoti sono chiaramente 7. I genotipi eterozigoti sono invece combinazioni senza ripetizione dei 7 alleli presi due alla volta, per cui sono:

$$C_{7,2} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \binom{7}{2} = 21$$

Quindi in totale ci sono 21+7=28 genotipi possibili

Combinazioni (con ripetizioni)

Lanciamo consecutivamente una moneta e segniamo la successione di uscita di testa (T) e di croce (C). Questa volta non interessa l'ordine di uscita, ma solo la composizione di ogni possibile gruppo.
Se i lanci sono 2, il numero delle possibilità, rispetto alle disposizioni, si riduce a 3:

$$TT \quad TC \quad CC \quad (k = 2).$$

Se i lanci sono 3, il numero delle possibilità si riduce a 4:

$$TT \quad TT \quad TC \quad TC \quad CC \quad CC \quad (k = 3)$$

Chiamiamo questi raggruppamenti combinazioni con ripetizione. Utilizziamo le combinazioni con ripetizione in tutti i problemi di distribuzione nei quali occorre formare gruppi con oggetti non distinguibili. Osserviamo che in ogni gruppo un elemento può ripetersi fino a k volte e, non interessando l'ordine, ogni gruppo contiene gli stessi elementi, ma con un numero di ripetizioni diverso in ciascun gruppo distinto.

Combinazioni (con ripetizioni)

DEFINIZIONE

Le combinazioni con ripetizione di n elementi distinti di classe k (con k numero naturale qualunque non nullo) sono tutti i gruppi di k elementi che si possono formare, nei quali:

- ogni elemento può essere ripetuto al massimo fino a k volte;
- non interessa l’ordine con cui gli elementi si presentano;
- è diverso il numero di volte col quale un elemento compare:

$$C'_{n,k} = C_{\,n+k.1,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots(n+1)n}{k!}$$

Distribuzione binomiale

ESEMPIO

Leonardo e Silvia ora hanno tre figli. Qual è la probabilità che siano due femmine e un maschio?

Indichiamo con p la probabilità che un figlio sia maschio e con q=1-p la probabilità che un figlio sia femmina.
Supponiamo, inoltre, che le nascite siano indipendenti, nel senso che il sesso dei figli già nati non influisce su quello dei nascituri.
L'ipotesi di indipendenza ci dice allora che la probabilità che il primogenito sia un maschio e gli altri femmine è

$$p \cdot q^2 \approx 0.122$$

Tuttavia questo non è l'unico modo di ottenere un maschio e due femmine; il maschio potrebbe essere il secondogenito o il terzogenito.
La probabilità che si verifichi ciascuno di questi casi è sempre $p \cdot q^2$
Per cui la risposta finale è

$$3p \cdot q^2 \approx 0.365$$

Distribuzione binomiale

Generalizzazione

Più in generale, se Leonardo e Silvia hanno n figli. Qual è la probabilità che siano k maschi e n-k femmine?

La probabilità con una specifica sequenza di nascite con n-k femmine e k maschi è

$$p^k \cdot q^{n-k}$$

Tuttavia a noi non interessa l'ordine con cui sono avvenute le nascite ma solo quanti figli sono maschi e quante figlie sono femmine.
Quante sono le sequenze di nascite con esattamente k maschi?
Sono tante quante il numero di modi con cui possiamo scegliere k nascite tra le n totali, indipendentemente dall'ordine e questo numero di modi è dato dal coefficiente binomiale $C_{n,k}$.
Quindi la risposta alla nostra domanda è:

$$\binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

Distribuzione binomiale

Generalizzazione

Supponiamo di stare studiando un fenomeno in cui un certo evento E può verificarsi con probabilità p=p(E) e quindi può non verificarsi con probabilità q=1-p.
Ripetiamo l'esperimento n volte, con ogni ripetizione indipendente da tutte le precedenti e ci chiediamo qual è la probabilità che l'evento E sia esattamente k volte. Otteniamo:

$$p(k\ volte) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

Questa distribuzione di probabilità sullo spazio degli eventi $\{0,1,\dots,n\}$ è detta distribuzione binomiale (o di Bernoulli) e si applica in tutti i casi in cui si studiano esperimenti con risposte dicotomiche del tipo sì/no, successo/fallimento, positivo/negativo,…
Esperimenti dicotomici di questo tipo, il cu esito della ripetizione di un esperimento è indipendente dagli esperimenti, vengono detti fenomeni di Bernoulli.