Lezione del 14/11/2023

Introduzione allo studio dei limiti

Antica Grecia
Paradosso di Zenone
Eudosso
Archimede

Cauchy

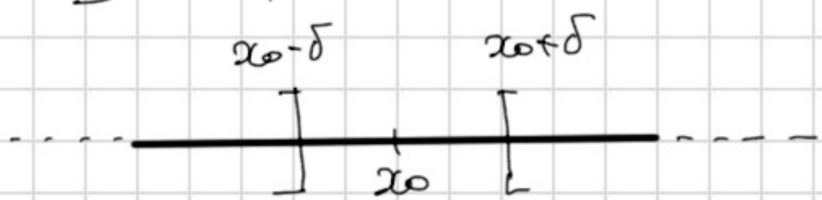
"valori successivi"
avvicinarsi indefinitamente
piccolo quanto si vuole

Weierstrass
1872
$\varepsilon - \delta$

Topologia della retta reale

Intorno di un punto ⟶ zona circostante ad un punto

DEFINIZIONE 1: Sia x_0 un punto della retta numerica reale $\mathbb{R}$, un qualunque intervallo aperto e limitato di centro x_0 del tipo $]x_0-\delta ; x_0+\delta[$ si dice intorno del punto x_0



Il numero reale δ si chiama semiampiezza dell'intorno, x_0 si dice centro.

DEFINIZIONE 2: Siano x_0 un punto di $\mathbb{R}$ e X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Si dice che x_0 è di accumulazione per l'insieme X se per ogni intorno di x_0 appartengono punti di X diversi da x_0

NB. L'ipotesi di limitatezza dell'insieme infinito X è essenziale perché esista almeno un punto di accumulazione. $\mathbb{N}$ pur essendo infinito non è dotato di punti di accumulazione.

$\boxed{\text{PROPOSIZIONE}}$: Un punto x_0 di $\mathbb{R}$ è di accumulazione per l'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ (se e) solo se ad ogni intorno di x_0 appartengono infiniti punti di X.
Conseguentemente, se esiste un punto di accumulazione per $X \subseteq \mathbb{R}$, X è necessariamente infinito.

TEOREMA di BOLZANO - WEIERSTRASS

Ogni sottoinsieme X infinito e limitato della retta numerica $\mathbb{R}$ è dotato di almeno un punto di accumulazione.

DIMOSTRAZIONE

Poiché X è limitato, esiste un intervallo $[a,b]$ che lo contiene.
Sia c il punto medio di $[a,b]$ si possono considerare gli intervalli $[a,c]$ e $[c,b]$.
Poiché X è infinito, in almeno uno di essi cadono infiniti punti di X. Supponiamo che esso sia $[a,c]$.
In $[a,c]$ posso prendere un punto c_1 (punto medio) tale che $[a,c]$ è diviso negli intervalli $[a,c_1]$ e $[c_1,c]$.
In almeno uno di essi cadono infiniti punti di X. E così via.
Si viene a creare una successione $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ di intervalli inclusi in $[a,b]$ tali che

$$a_1 \le \dots \le a_n \dots \le b_n \dots \le b_1 \quad e \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

Posto $x_0 = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$.

x_0 è di accumulazione per X in quanto ogni intorno di x_0 $]x_0-\delta\,;x_0+\delta[$ contiene l'intervallo $[a_n, b_n]$ per n sufficientemente grande e quindi contiene infiniti punti di X.

$\checkmark$

$\boxed{\text{DEFINIZONE 3}}$: Un punto $x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}$ che non sia di accumulazione, si dice ISOLATO per X.
Evidentemente, un punto $x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}$ è isolato se e solo se esiste un intorno I di x_0 tale che $I \cap X$ si riduca al solo punto x_0.

DEFINIZIONE 4 Siano X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ $(X \subseteq \mathbb{R})$ e x_0 un punto di accumulazione di X.
Il punto x_0 si dice interno se esiste un intorno di x_0 incluso in X.
Esso si dice esterno ad X se è interno al complementare di X.
Evidentemente un punto x_0 interno a X è senz'altro un punto di accumulazione per X.

DEFINIZIONE 5 Siano x_0 un punto di $\mathbb{R}$ e X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Il punto x_0 si dice di frontiera per X se non è né interno né esterno a X o, ciò che è lo stesso, se ad ogni intorno di x_0 appartengono sia punti di X sia punti del complementare di X.

DEFINIZIONE 6 Un sottoinsieme della retta numerica chiuso e limitato si dice compatto.

TEOREMA: ogni sottoinsieme compatto X della retta numerica è dotato di minimo e di massimo.

DIMOSTRAZIONE: Per assurdo, detto $e' = \inf X$, se esso non appartenesse a X, dovrebbe essere di accumulazione per X (per una delle proprietà di cui gode l'estremo inferiore); essendo X chiuso, e' dovrebbe appartenere a X, ciò che è una contraddizione.
Allo stesso modo si prova che l'estremo superiore di X appartiene a X e quindi X è dotato di minimo e di massimo.

NOZIONE DI LIMITE

Sia f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di $\mathbb{R}$, sia x_0 un punto di accumulazione al finito per X.
Ci proponiamo di esaminare come varia $f(x)$, ovvero che valori assume $f(x)$, nei punti $x \neq x_0$ presi via via più vicini a x_0.

LIMITE FINITO IN UN PUNTO

Si dice che il numero reale ℓ è il limite della funzione f in x_0 (o anche che $f(x)$ converge a ℓ o che tende a ℓ) e si scrive

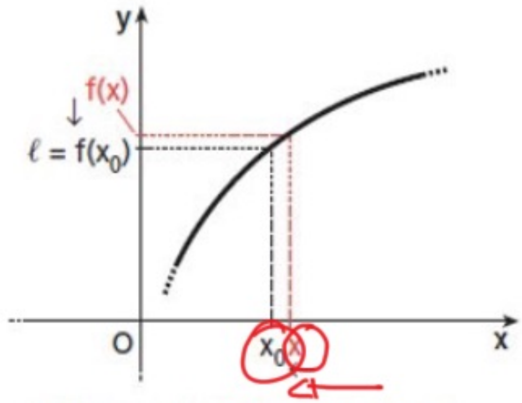
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

quando, comunque si consideri un numero reale $\varepsilon > 0$, esiste un numero reale $\delta > 0$ tale che si abbia

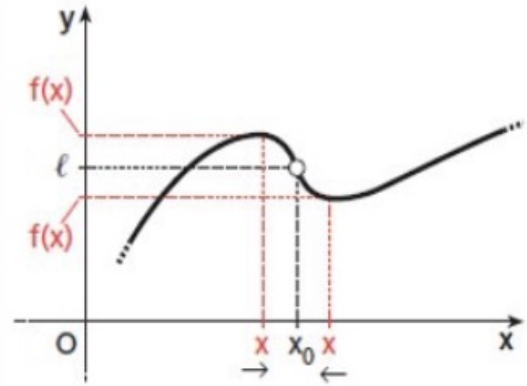
$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

o, ciò che è lo stesso,

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \qquad \forall x \in X \text{ t.c. } |x - x_0| < \delta$$



a. Nel caso di una funzione f come quella disegnata in figura vediamo che, se x si avvicina a x_0, allora $f(x)$ si avvicina a $\ell = f(x_0)$.



b. Possiamo porci la stessa domanda anche nel caso in cui x_0 è punto di accumulazione per D, ma $x_0 \notin D$ e quindi l'espressione $f(x_0)$ non ha significato. A quale valore ℓ si avvicina $f(x)$ quando x si avvicina a x_0?

Significato geometrico di limite finito in un punto

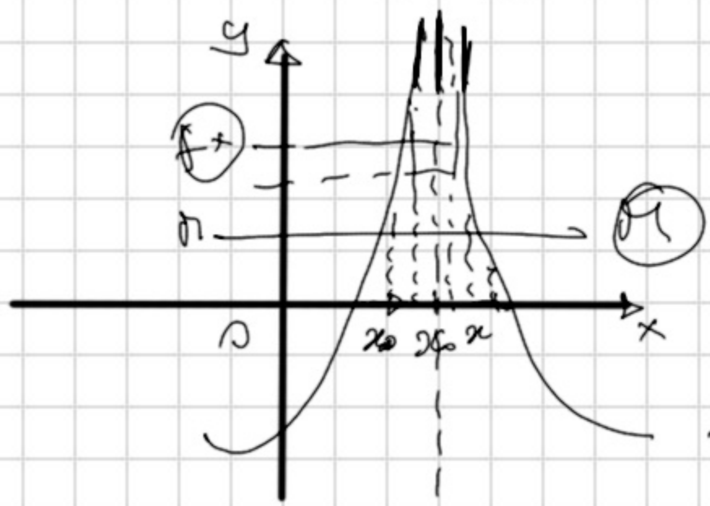
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_{x_0}$ t.c. $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

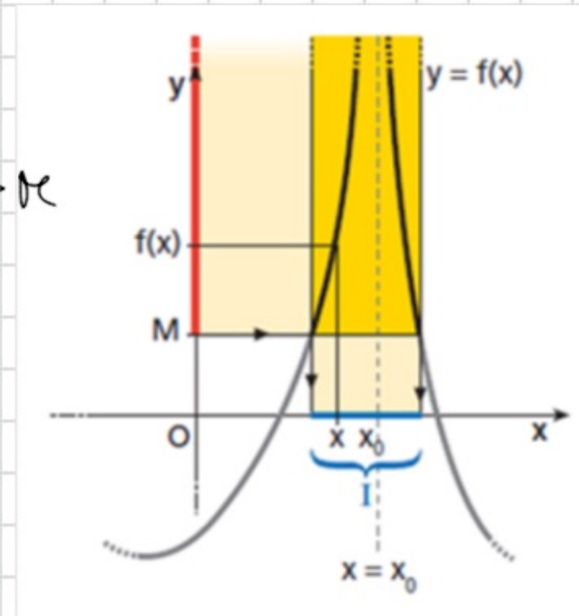
LIMITE INFINITO

Si dice che $+\infty$ è il limite della funzione f in x_0 o anche che f diverge positivamente o che tende a $+\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

se $\forall M > 0 \ \exists \ I_{x_0}$ t.c. $f(x) > M$



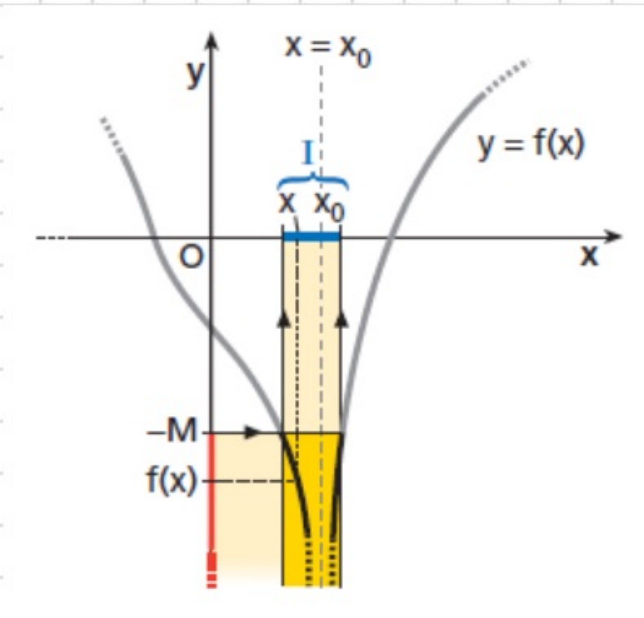


$x = x_0$ rappresenta per la $f(x)$ un asintoto verticale

Si dice che $-\infty$ è il limite della funzione f in x_0
o anche che $f(x)$ diverge negativamente o che tende a $-\infty$
e si scrive

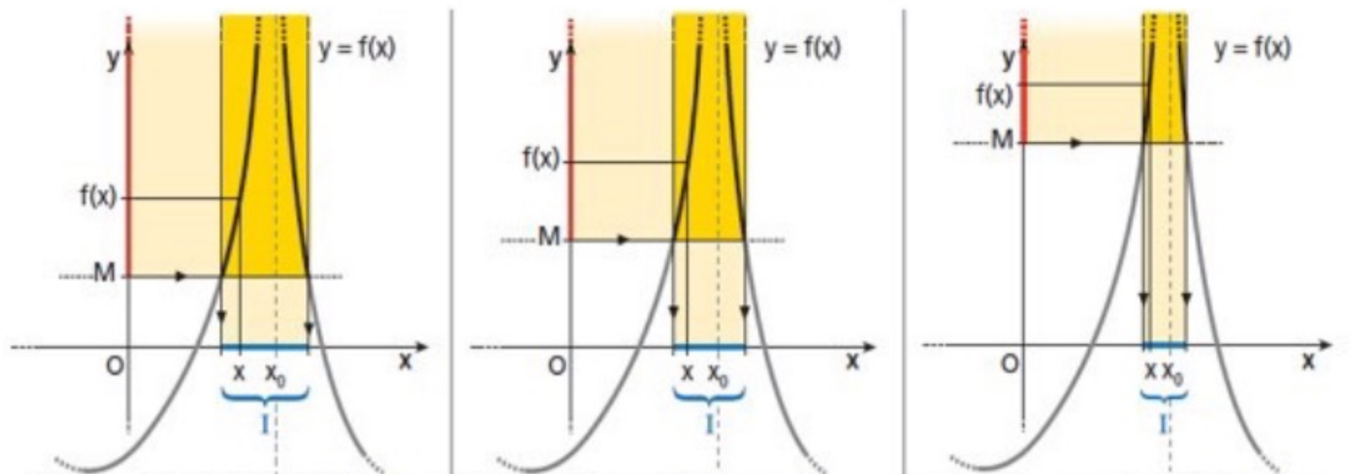
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se $\forall M > 0 \ \exists I_{x_0}$ t.c. $f(x) < -M$



$x = x_0$ asintoto verticale

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \to \begin{cases} l \\ +\infty \\ -\infty \end{cases} \rightsquigarrow x = x_0 \quad \text{ASINTOTO VERTICALE}$$



a. Fissiamo $M \in \mathbb{R}^+$. Individuiamo un intorno di x_0 tale che $f(x) > M$ $\forall x \in \; - \{x_0\}$.

b. Se prendiamo M più grande, esiste ancora e risulta, in genere, più piccolo.

c. Scegliamo un valore di M ancora più grande. Se è abbastanza piccolo, ossia se x è abbastanza vicino a x_0, allora $f(x)$ supera M.

LIMITE FINITO
(quando x tende a $+\infty$ e a $-\infty$)

Si dice che il numero reale ℓ è il limite della funzione f in $+\infty$ (risp. $-\infty$) o anche che x tende a $+\infty$ (risp. $-\infty$) e si scrive

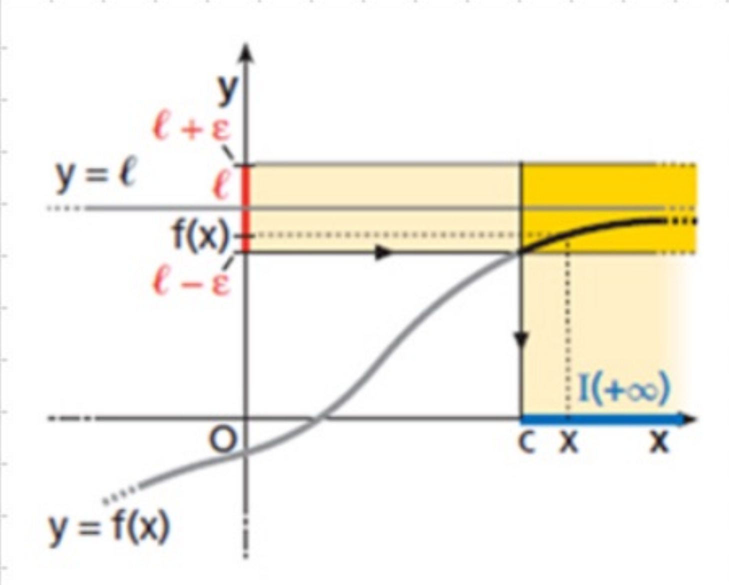
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \qquad \left(\text{risp. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \right)$$

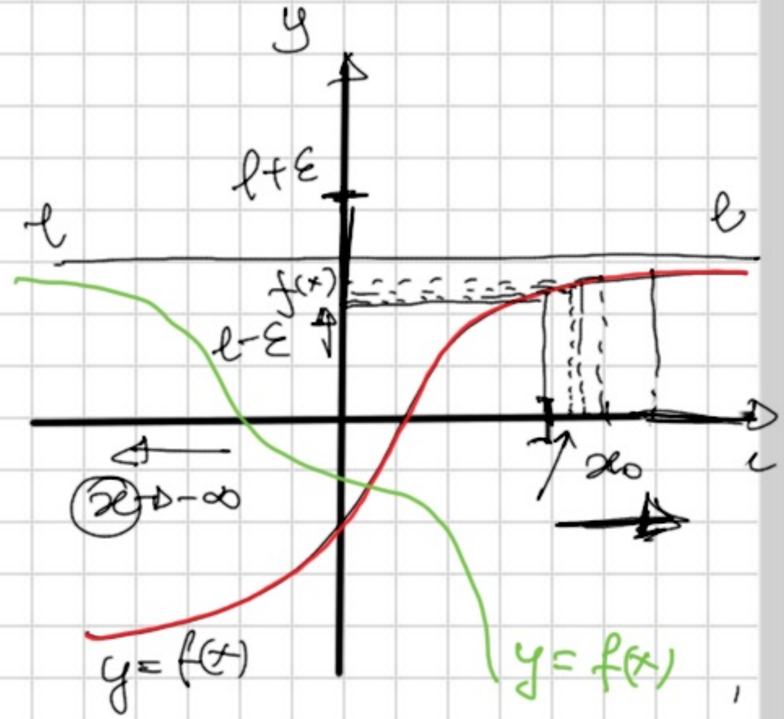
Quando
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \; c > 0$ (risp. $c < 0$) tale che si abbia

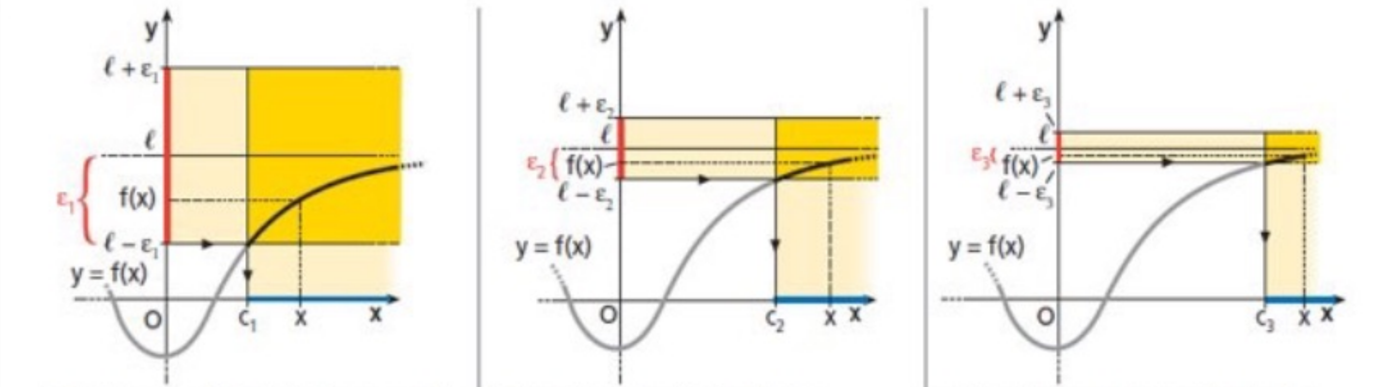
$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

ovvero $\quad \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

non appena $x \in X$ e $x > c$ (risp. $x < c$)


y
ℓ + ε
y = ℓ
ℓ
f(x)
ℓ − ε
I(+∞)
O
c x x
y = f(x)


y
ℓ+ε
ℓ
ℓ
f(x)
ℓ−ε
x₀
x→−∞
y=f(x)
y=f(x)



a. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Individuiamo $c_1 > 0$ tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ per ogni $x > c_1$, ossia per ogni punto dell'intorno di $+\infty$: $]c_1; +\infty[$.

b. Se ε diventa più piccolo, la disuguaglianza $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ è ancora vera, purché scegliamo valori di x più grandi di $c_2 > c_1$.

c. Scegliamo ε ancora più piccolo. In genere, perché $f(x)$ sia distante da ℓ meno di ε, dovremo prendere c_3 ancora più grande.

$y = \ell$ ASINTOTO ORIZZONTALE

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ DESTRO

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ SINISTRO

Se $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

$y = \ell$

AS. ORIZZ. COMPLETO

DEFINIZIONE

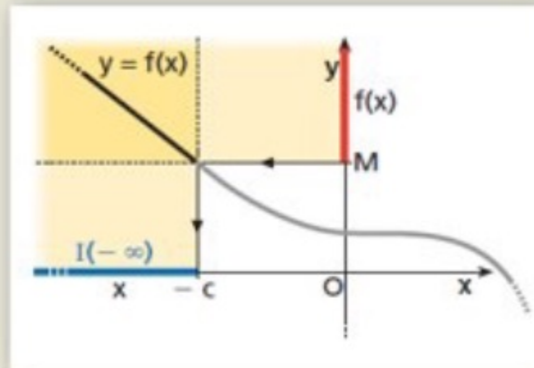
Limite $+\infty$ di una funzione per x che tende a $-\infty$

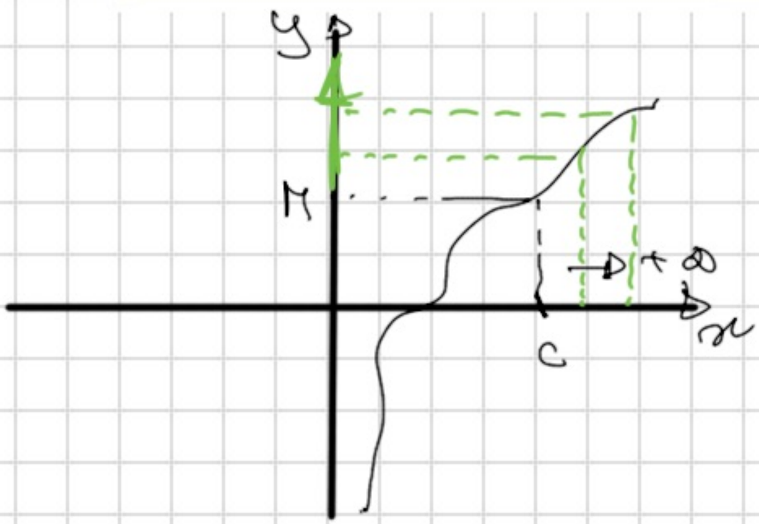
Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $+\infty$ per x che tende a $-\infty$ e si scrive

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di $-\infty$ tale che risulti:

$$f(x) > M \text{ per ogni } x \in I.$$





$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$\forall M > 0 \ \exists I$ t.c. $f(x) > M$
$\forall x \in I$

Verifica che

$$\lim_{x \to 2} \frac{x}{x-1} = 2$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_{x_0}$ t.c. $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ o $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

$$\left| \frac{x}{x-1} - 2 \right| < \varepsilon$$

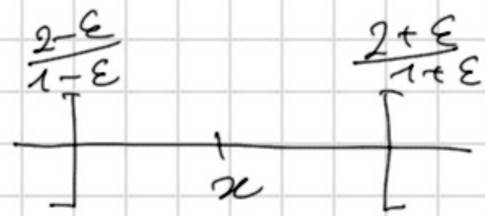
ovvero

$$2 - \varepsilon < \frac{x}{x-1} < 2 + \varepsilon \iff \begin{cases} \frac{x}{x-1} - 2 < \varepsilon \\ \frac{x}{x-1} - 2 > -\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2(x-1) < \varepsilon(x-1) \\ x - 2(x-1) > -\varepsilon(x-1) \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2x + 2 < \varepsilon x - \varepsilon \\ x - 2x + 2 > -\varepsilon x + \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - \varepsilon x < -\varepsilon - 2 \\ -x + \varepsilon x > \varepsilon - 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x(1+\varepsilon) > \varepsilon + 2 \\ x(1-\varepsilon) < 2 - \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x < \dfrac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon} \\ x > \dfrac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon} \end{cases}$$



$$2 - \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} < x < 2 - \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}$$

- $\lim_{x \to 1} x-3 = -2$

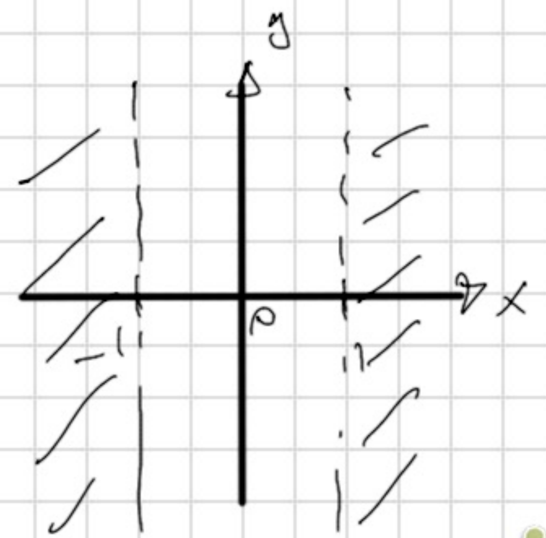
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_{x_0}$ t.c. $\left| f(x) - \ell \right| < \varepsilon$

$\boxed{\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon}$

$\underline{-2-\varepsilon} < x - 3 < \underline{-2+\varepsilon}$

$\underline{1-\varepsilon} < \underline{x} < \underline{1+\varepsilon}$

- $\lim_{x \to 1^-} \ln\left(1 - x^2\right) = -\infty$



DOMINIO $1 - x^2 > 0$

$-1 < x < 1$

$\forall M > 0 \quad \exists I_{x_0}$ t.c. $\boxed{f(x) < -M}$

$\ln(1-x^2) < -M$

$$\begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ 1-x^2 < e^{-M} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x < -\sqrt{1-e^{-M}} \ \cup \ x > \sqrt{1-e^{-M}} \end{cases}$$

$x = \pm\sqrt{1-e^{-M}}$