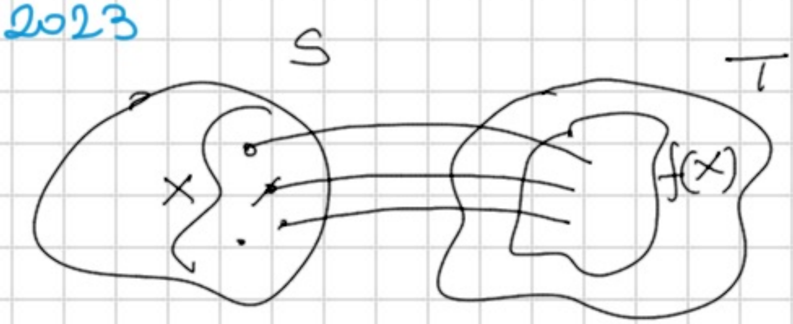
Lezione del 07/11/2023

Funzioni reali di una variabile reale

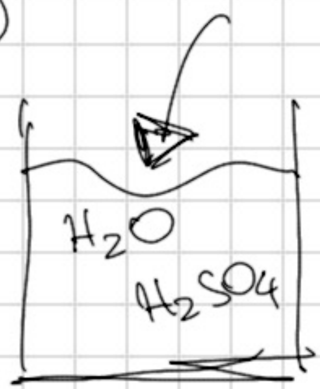
$$f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$y = f(x)$$

$$z = f(x, y)$$



$$f: X \subseteq S \to T$$



$$pH = -\log[H^+]$$

$[H^+]$

10^{-1} —— 10^{-14}

$$[H^+] = 10^{-10} \qquad pH = -\log 10^{-10} = 10$$

Estremi di una funzione

Sia f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di $\mathbb{R}$

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Si dice che f è dotata di minimo (risp. massimo) in X se il suo codominio $f(X)$ è dotato di minimo (risp. massimo)

$$\exists\, \bar{x} \in X \ (\text{risp. } \bar{\bar{x}} \in X) \mid f(\bar{x}) \le f(x) \quad \forall x \in X$$

$$(\text{risp. } f(x) \le f(\bar{\bar{x}}))$$

Se ciò si verifica il minimo si denota con

$$\min f \ , \quad \boxed{\min_{x \in X} f(x)}$$

Nel caso del massimo

$$\max f \ , \quad \max_{x \in X} f(x)$$

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si dice che f è limitata inferiormente (risp. superiormente) in X se il suo codominio $f(X)$ è limitato inferiormente (risp. superiormente). Ovvero, se esiste un numero reale K t.c.

$$K \leq f(x), \forall x \in X \qquad (\text{risp. } f(x) \leq K, \forall x \in X)$$

Tale numero si chiama minorante (risp. maggiorante)

La funzione si dice limitata in X se è ivi limitata inferiormente e superiormente.

Se f è limitata inferiormente in X, l'estremo inferiore si indica con

$$\inf f \quad \text{oppure} \quad \inf_{x \in X} f(x)$$

Se è limitata superiormente, l'estremo superiore si indicherà con

$$\sup f \quad \text{o} \quad \sup_{x \in X} f(x)$$

Classificazione delle funzioni

Funzioni reali di variabile reale $\boxed{y = f(x)}$

Funzioni algebriche

- F. razionali intere o F. polinomio → $\mathbb{R}$
- F. razionali fratte → Denom $\neq 0$

$$y = \frac{x^2 - 2}{2x}$$

- F. irrazionali
  - radice con indice pari → RADICANDO ≥ 0
  - radice con indice dispari → $\mathbb{R}$

Funzioni trascendenti

$\boxed{y = x^2 - 3}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \exists f(x) \in \mathbb{R}$

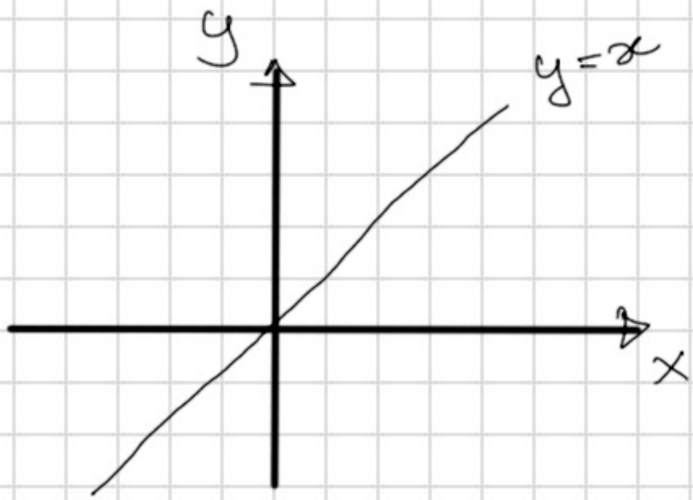
$x \in]-\infty ; +\infty[$

La funzione lineare

$f(x) = ax + b \quad \forall x \in X \; ; \; a, b \in \mathbb{R}$

Se $a = 0$ la funzione si riduce alla funzione costante
$f(x) = b$

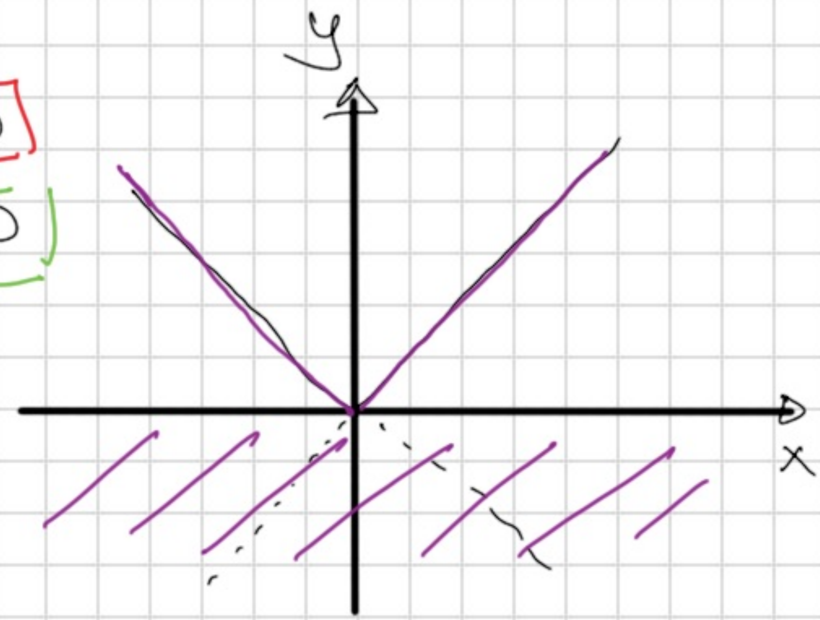
Se $a = 1$, $b = 0$ essa si riduce alla funzione identica



la funzione valore assoluto

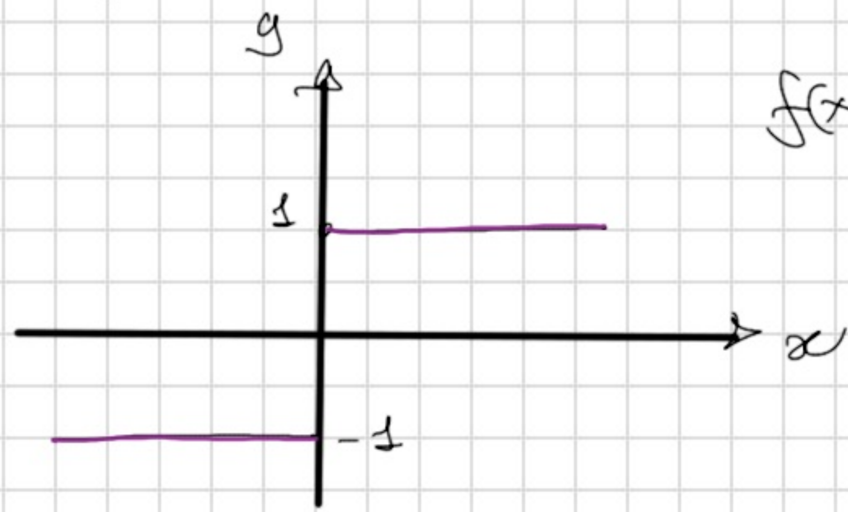
$$f(x) = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } \boxed{x \geq 0} \\ -x & \text{se } \boxed{x < 0} \end{cases}$$



La funzione signum

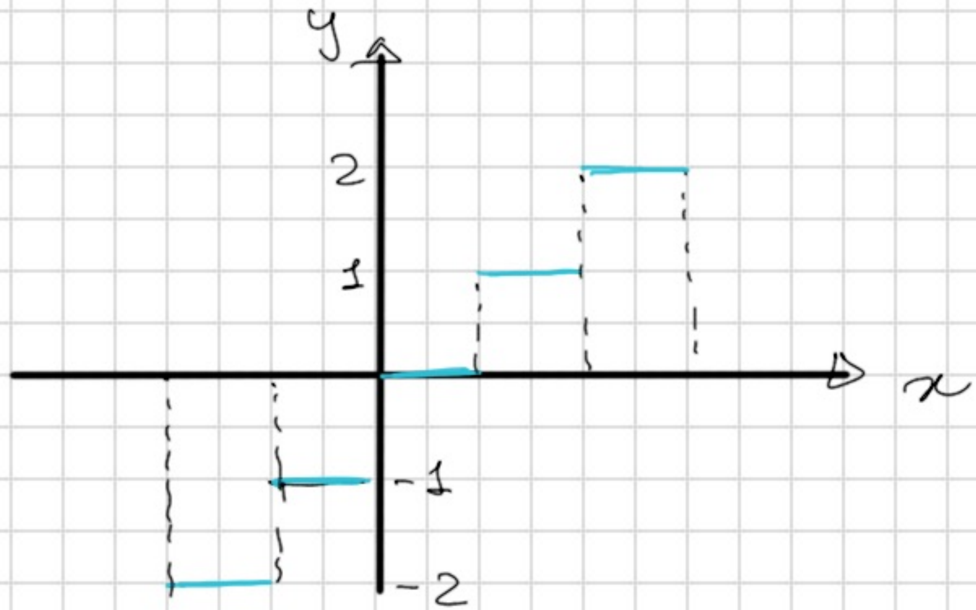
Per ogni numero reale x, si definisce $\mathrm{sgn}(x)$ la funzione così rappresentata



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

La funzione parte intera

Per ogni numero reale x denotiamo con $[x]$ la parte intera di x, cioè il più grande degli interi non negativi $z \leq x$ se $x \geq 0$ e il più piccolo degli interi non positivi $z \geq 0$ se $x < 0$



La funzione potenza

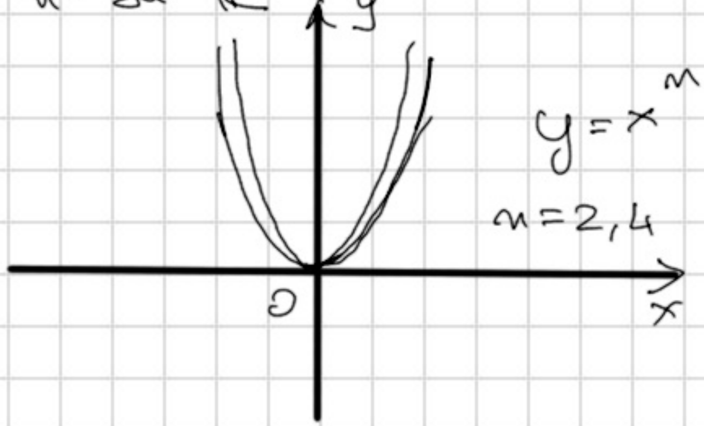
Se n è un intero positivo, si chiama funzione potenza di esponente n, la funzione così definita

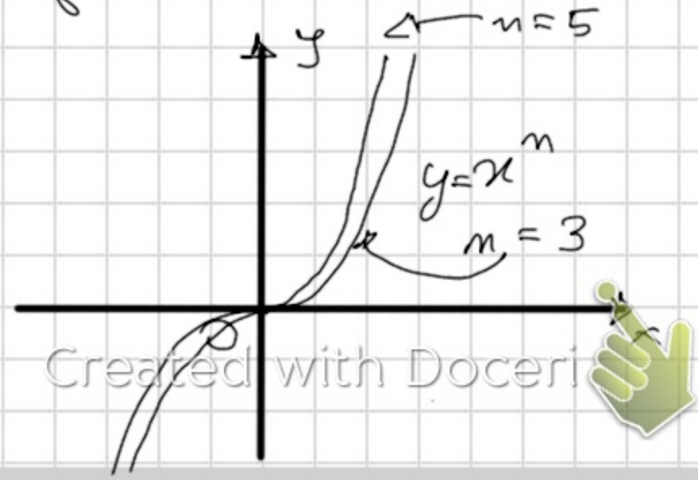
$$f(x) = x^n \, , \; \forall x \in \mathbb{R}$$

Se n è pari essa è una funzione di $\mathbb{R}$ su $[0;+\infty[$

le cui restrizioni negli intervalli $]-\infty;0]$ e $[0;+\infty[$ sono rispettivamente decrescente e crescente

Se n è dispari si tratta di una funzione strettamente crescente di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}$



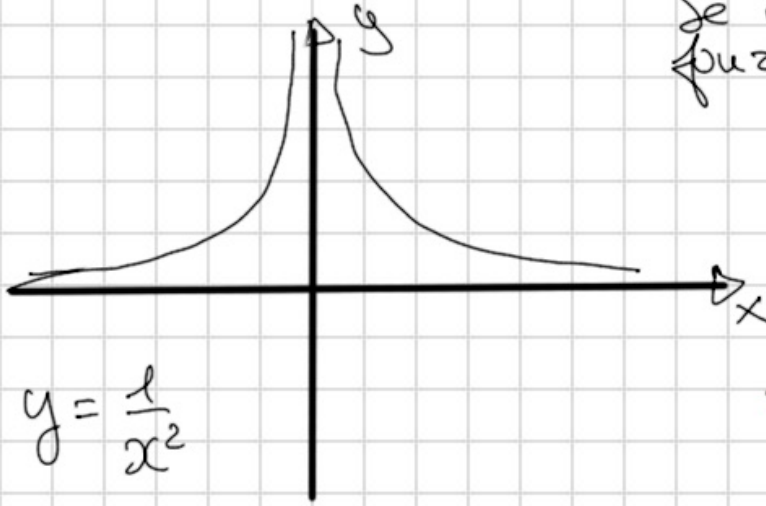


Se l'esponente è un intero negativo

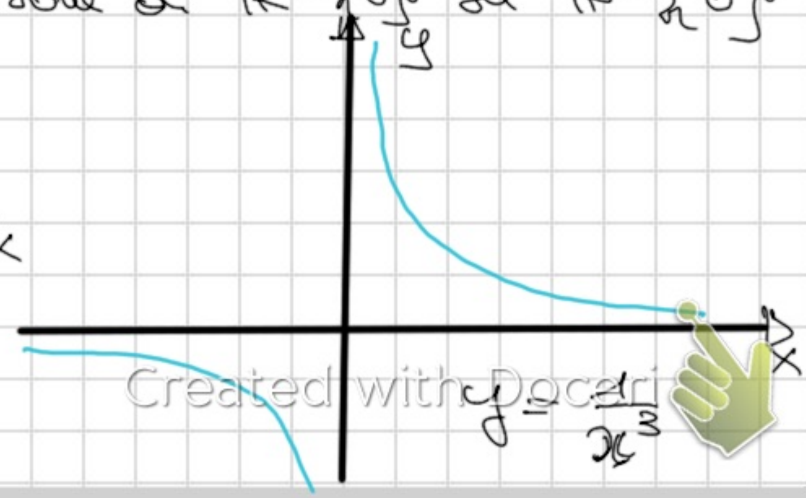
$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Se n è pari si tratta di una funzione di $\mathbb{R} - \{0\}$ su $]-\infty;0[$ e $[0;+\infty[$

le cui restrizioni a questi intervalli sono rispettivamente crescente e decrescente



Se n è dispari si tratta di una funzione di $\mathbb{R} - \{0\}$ su $\mathbb{R} - \{0\}$

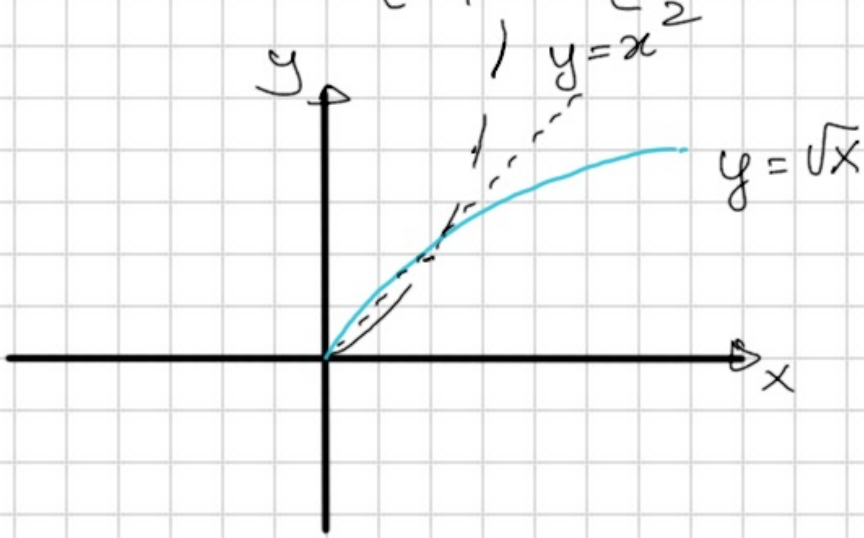


La funzione radice n-esima

Se n è pari, la restrizione di x^n all'intervallo $[0;+\infty[$ è strettamente crescente, quindi è invertibile.

La sua inversa è la funzione $f(x)=\sqrt[n]{x}$ t.c.

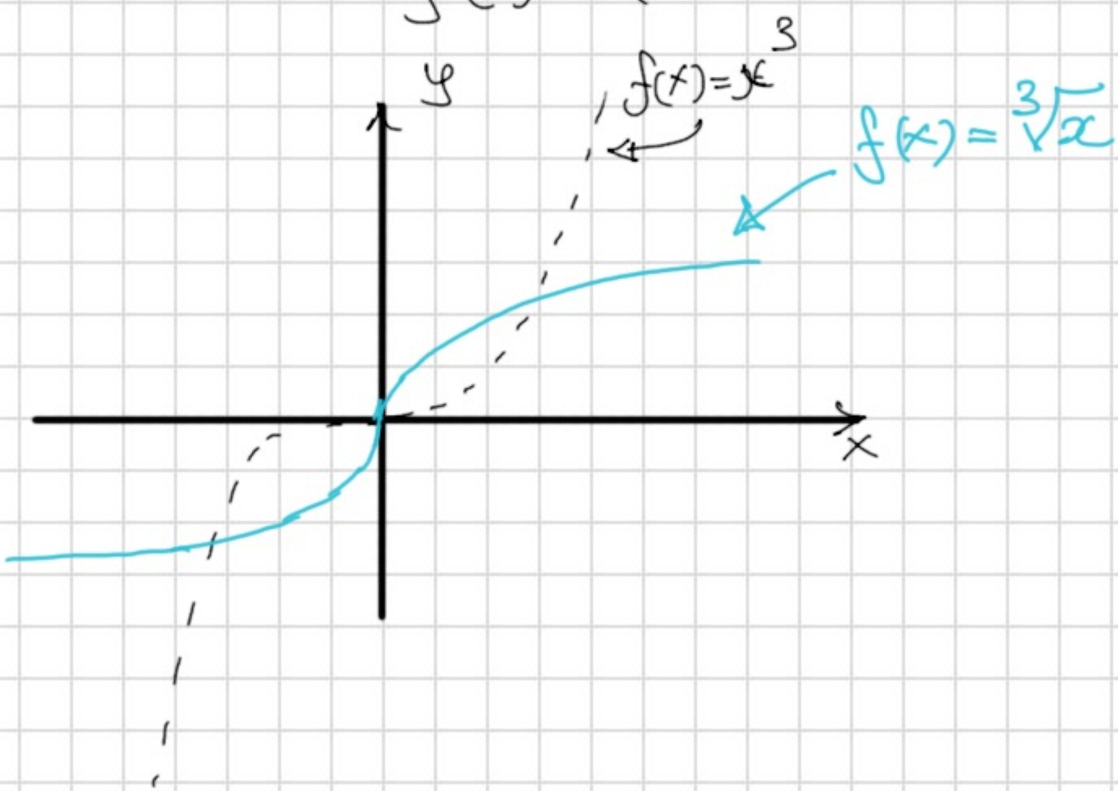
$x \in [0;+\infty[$



I due grafici sono simmetrici rispetto alla bisettrice del I e III quadrante

Se n è dispari, la funzione $y = x^n$ è una funzione invertibile e la sua inversa è

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$



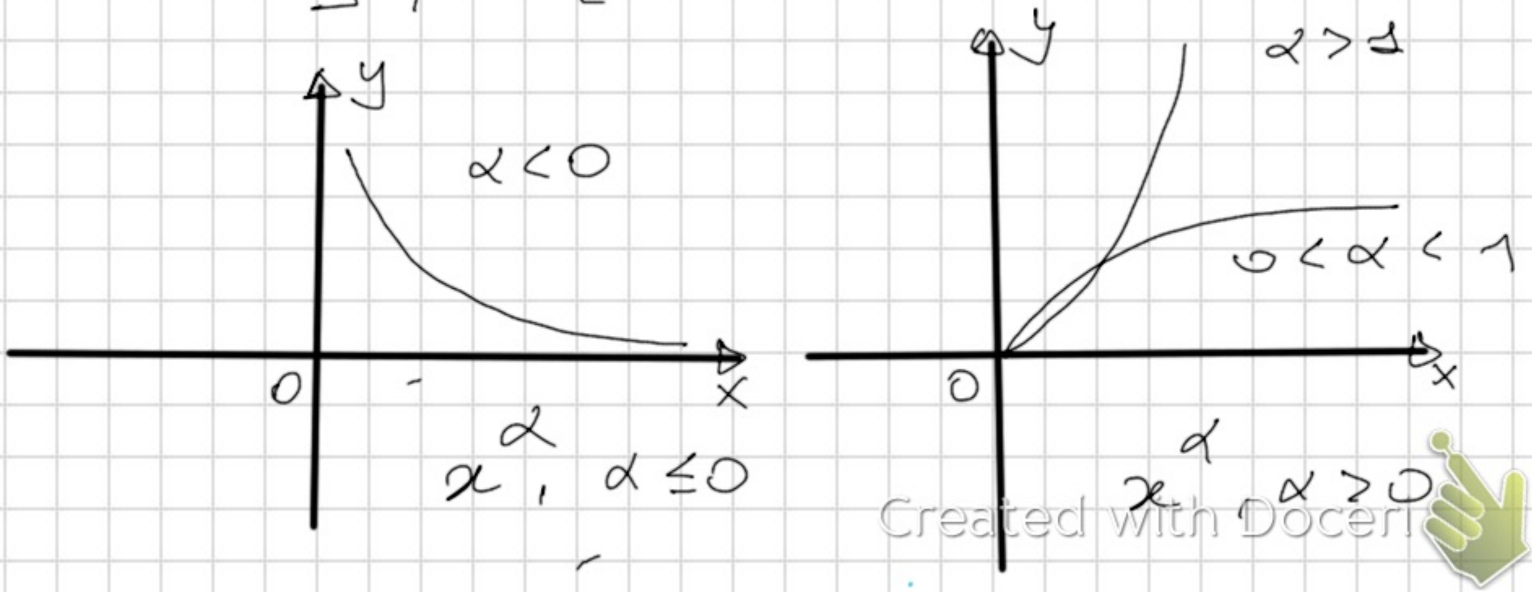
Funzione potenza con esponente un numero reale

Se α un numero reale non nullo, si chiama funzione potenza con esponente α la funzione reale

$$f(x) = x^{\alpha}$$

definita $[0; +\infty[$ se $\alpha > 0$

$]0; +\infty[$ se $\alpha < 0$



Funzioni trascendenti

funzione esponenziale

funzione logaritmica

funzioni trigonometriche

$y = a^{f(x)}$ $\boxed{\mathbb{R}}$

$y = (g(x))^{f(x)}$ $\boxed{\text{BASE} > 0}$

$y = \log_a f(x)$ $\boxed{\text{ARGOMENTO} > 0}$

$y = \log_{g(x)} f(x)$ $\begin{cases} \text{ARGOMENTO} > 0 \\ \text{BASE} > 0 \\ \text{BASE} \neq 1 \end{cases}$

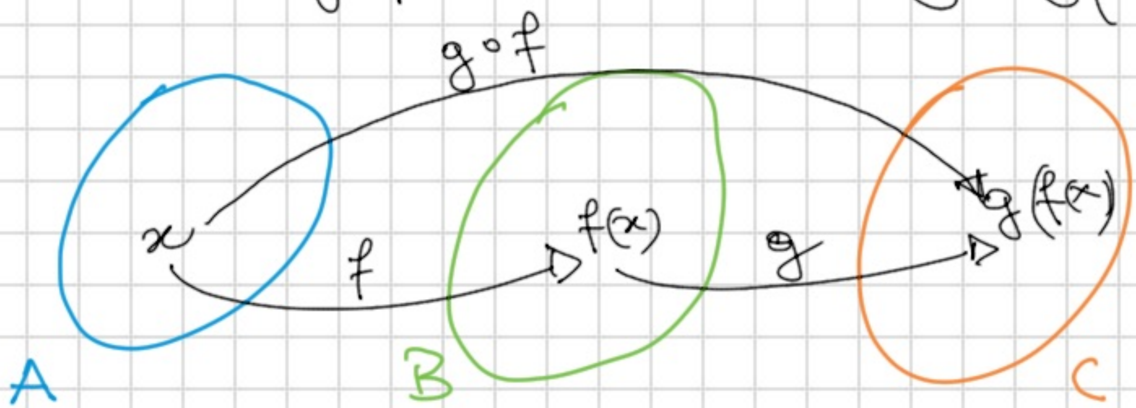
$y = (2x-1)^x$ $\quad 2x - 1 > 0$

$y = \log_x (x-3)$ $\quad \begin{cases} x - 3 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

FUNZIONI COMPOSTE

Date una funzione $f: A \to B$ e $g: B \to C$

Indico con $g \circ f$ la funzione $y = g(f(x))$



$f(x) = x^2 \qquad g(x) = x+1$

$g \circ f = g(f(x)) = x^2 + 1 \qquad \underline{g \circ f \neq f \circ g}$

$f \circ g = f(g(x)) = (x+1)^2$

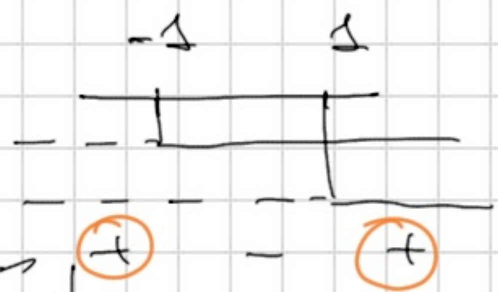
$$f(x) = e^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

I.D.

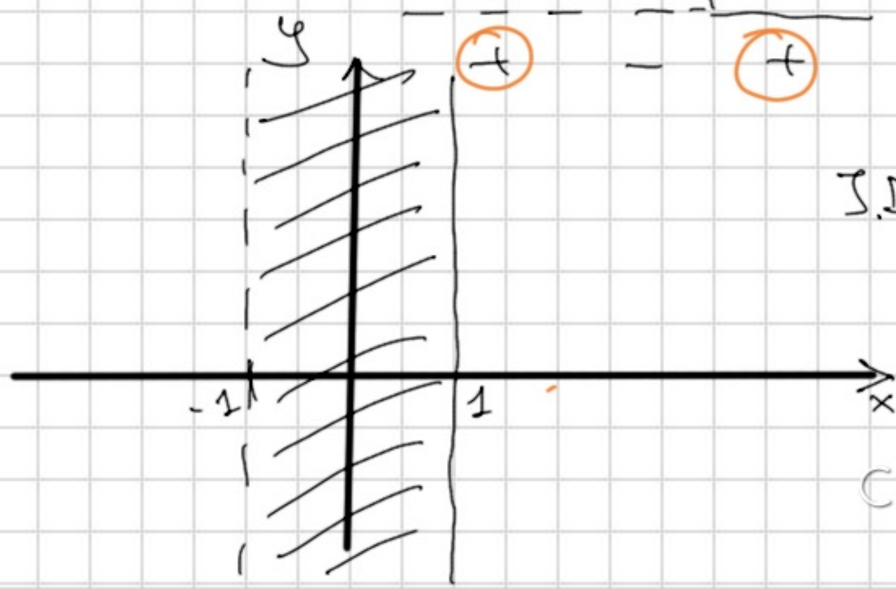
$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1} \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{array}\right.$$

pleonastica

$$\left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x > -1 \end{array}\right.$$



$$\boxed{x < -1 \cup x \geq 1}$$



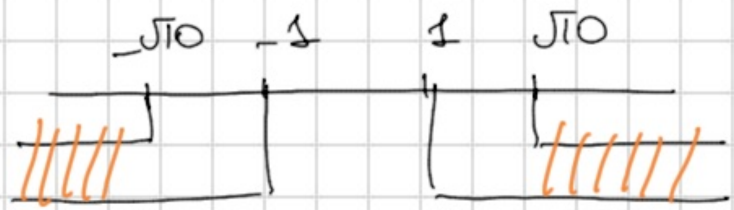
$$\text{I.D}: \forall x \in \left]-\infty ; -1\right[\cup \left[1 ; +\infty\right[$$

$$f(x) = \log_3\left(\sqrt{x^2-1} - 3\right)$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-1} - 3 > 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-1} > 3 \\ x \leq -1 \cup x \geq 1 \end{cases} \qquad x^2 - 1 > 9$$

$$x = \pm\sqrt{10}$$

$$\begin{cases} x < -\sqrt{10} \cup x > \sqrt{10} \\ x \leq -1 \cup x \geq 1 \end{cases}$$



I.D: $x \in \left]-\infty; -\sqrt{10}\right[\cup \left]\sqrt{10}; +\infty\right[$

$$f(x) = \sqrt{\log_3\left(\sqrt{x^2-1} - 3x + 4\right) + \log_{1/9}\left(x^2 + 2x + 1\right)}$$

Da fare a casa

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad g(x) = e^{2\log x}$

$f(g(x))$

$g(f(x))$ e calcolarne l'I.D.

$$f(g(x)) = \sqrt{e^{2\log x}} \longrightarrow \begin{cases} e^{2\log x} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \end{cases} \quad \boxed{x > 0}$$

$$g(f(x)) = e^{2\log\sqrt{x}} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \boxed{x > 0} \end{array}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt[6]{1+12x^8}}{\log(1+x^8)}$$

$$\begin{cases} 1+12x^8 \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ 1+x^8 > 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ \log(1+x^8) \neq 0 \iff \cancel{1}+x^8 \neq \cancel{1} \iff x^8 \neq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x \neq 0}$$

I.D. $x \in \left]-\infty; 0\right[\cup \left]0; +\infty\right[$