Lezione del 15-12-2023

Integrale secondo Riemann

L'integrale secondo Riemann di f nell'intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato è definito come il limite per $n \to \infty$ della somma integrale

$$\sigma_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)$$

Somma di Riemann

Se tale limite esiste, è finito e non dipende dalla scelta dei punti t_k, si ha:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sigma_n$$

L'esistenza di un unico elemento di separazione tra m' e m'' è equivalente a richiedere che

$$s(P) = S(P) = \int_a^b f(x)\,dx$$

La funzione limitata f è integrabile in $[a,b]$ se e solo se

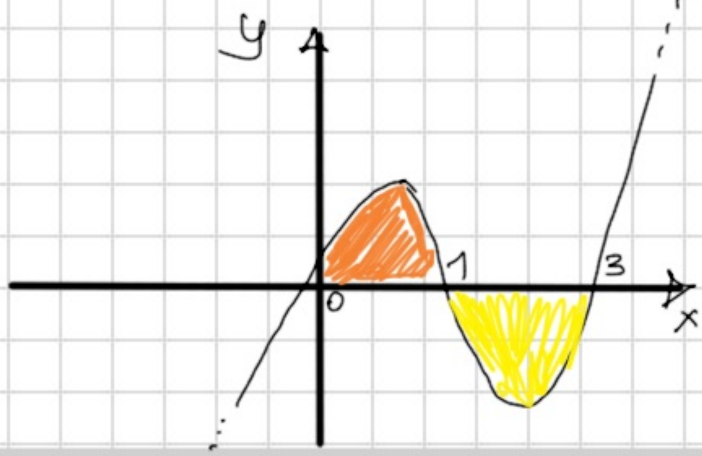
(RETICOLAZIONE)

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \mathcal{R}$ di $[a,b]$ per cui si ha

$$|S(P) - s(P)| < \varepsilon$$

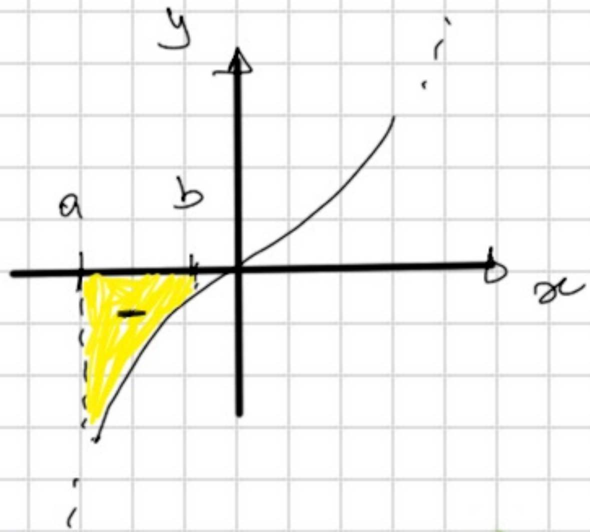
Se la funzione f integrabile è positiva allora l'integrale assume il significato di area della regione di piano sottesa al grafico di f.

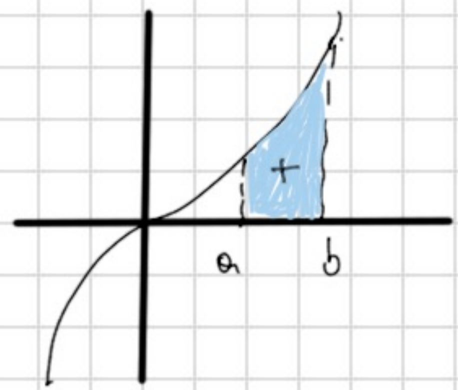
N.B. Se la funzione cambia segno su $[a,b]$ allora l'integrale rappresenta la somma di aree con segno diverso.



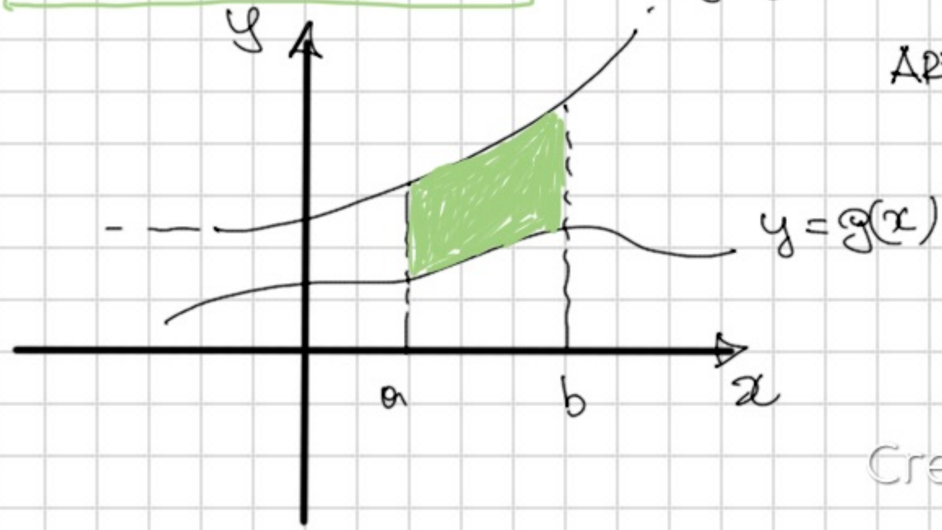
$$y = x^3 - 4x^2 + 3x$$

$$\int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx - \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx$$





Area b/w the curve



$$\text{AREA} = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

TEOREMA DELLA MEDIA

Mette in relazione le nozioni di integrale e di funzione continua per le funzioni di una variabile reale.
Una funzione continua f definita su un intervallo ha come immagine ancora un intervallo. Il teorema della media integrale stabilisce che la media integrale di f è un valore incluso nell'intervallo immagine.

L'idea è quella di calcolare il valor medio assunto dalla funzione su un intervallo $[a,b]$ calcolando la media aritmetica dei valori che la funzione assume su un insieme finito (molto grande) di punti distribuiti uniformemente nell'intervallo.

Suddivido $[a,b]$ in N sottointervalli $[x_K, x_{K+1}]$ tutti di lunghezza $\frac{b-a}{N}$

e si calcola la media

$$\frac{f(x_0) + f(x_1) + \dots f(x_N)}{N} = \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^{N} \frac{b-a}{N} f(x_i)$$

per N molto grande $(N \to \infty)$

$$\frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^{N} \frac{b-a}{N} f(x_i) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

TEOREMA

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua e integrabile allora esiste un punto $z \in [a,b]$ t.c.

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f(z)$$

o equivalentemente

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(z)(b-a)$$

DIMOSTRAZIONE Essendo f continua in $[a,b]$, per il teorema di Weierstrass f è dotata di minimo m e massimo M.

Si avrà

$$m \le f(x) \le M$$

Per la proprietà di monotonia dell'integrale

$$\int_a^b m\, dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\, dx$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\underline{F(b) - F(a)}}$$

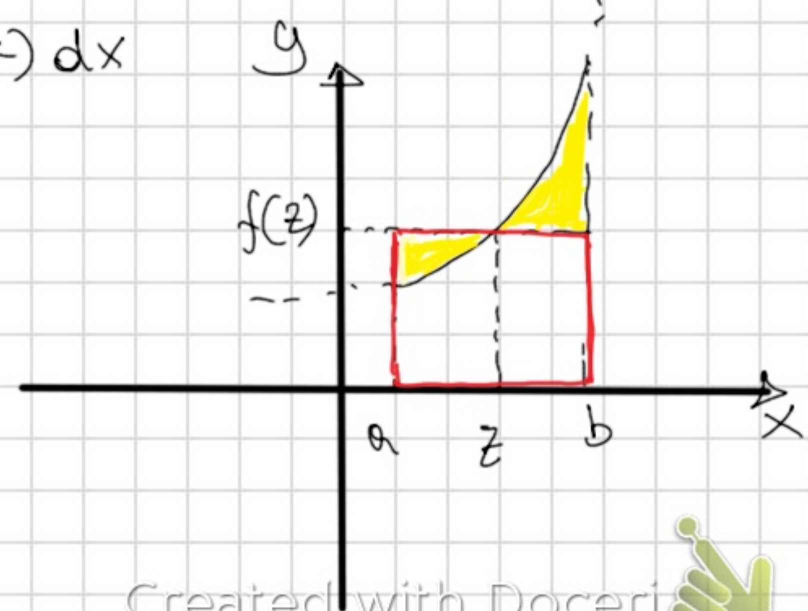
$$m\int_a^b dx = [x]_a^b = (b-a)m$$

Se $b > a$

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M$$

Per il teorema dei valori intermedi, f assume in $[a,b]$ tutti i valori compresi fra il minimo e il massimo. Quindi, in particolare, esisterà un punto $z \in [a,b]$ t.c.

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$



TEOREMA DI TORRICELLI - BARROW
(I teorema fondamentale del calcolo integrale)

Se f una funzione integranda, continua in un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato con

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$F(x)$ è derivabile in $[a,b]$ e la derivata della primitiva coincide con la funzione integranda. Cioè:

$$F'(x) = f(x)$$ (a meno di una costante arbitraria)

DIMOSTRAZIONE

Una funzione è derivabile se esiste ed è finito il limite del rapporto incrementale

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Osserviamo che

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

Si ha allora:

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\cancel{\int_a^{x} f(t)\,dt} + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^{x} f(t)\,dt}}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x}$$

Per il teorema della media $\exists\, \bar{x} \in [x; x+\Delta x]$ t.c.

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \Delta x \cdot f(\bar{x})$$

Facendo il limite del rapporto incrementale per $\Delta x \to 0$ e per l'ipotesi di continuità si ha $\left(\lim_{\Delta x \to 0} f(\bar{x}) = f(x)\right) \Rightarrow F'(x) = f(x)$

c.v.d.

Formula di Newton-Leibnitz
(II teorema fondamentale del calcolo integrale)

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione che ammette una primitiva F su $[a,b]$. Se f è integrabile si ha:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

DIMOSTRAZIONE

Per il I teorema fond., la funzione $F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \forall x \in [a,b]$

primitiva di f (la primitiva nulla in a)

Se prendo

$$\varphi(x) = F(x) + c$$ anche $\varphi(x)$ è una primitiva di f

Ma essendo $F(a) = 0$ si ottiene $\varphi(a) = c$ e dunque

$$\varphi(x) - \varphi(a) = F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Ponendo $x = b$ si ha la tesi.

Esercizi

(1) $$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c$$

(2) $$\int \frac{dx}{\underline{x^2}+\underline{2x}+3+1-1}$$

$\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$

→ riconduco all'integrale dell'arcotangente

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\underbrace{(x^2+2x+1)}+2} =$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} \, dx = \operatorname{arctg} f(x) + c$$

$$= \int \frac{dx}{2+(x+1)^2} = \int \frac{dx}{2\left[1+\frac{(x+1)^2}{2}\right]} = \frac{1}{2} \boxed{\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$f'(t)$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} =$$

$$=\int \frac{dx}{x^2+2x+1+5-1}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+5}$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$$

$$x^2+3x+\frac{9}{4}+5-\frac{9}{4}$$

$$= \int \frac{dx}{x^2+2x+1+5-1} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \int \frac{dx}{4\left[1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2 \int \frac{\frac{1}{2}dx}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

GRADO di N è maggiore del grado di D (o uguale)

$$\int \frac{5x^2+x+1}{x-2}\,dx$$

$$\int \frac{\overset{R}{23}}{\underset{D}{x-2}}\,dx + \int \overset{Q}{(5x+11)}\,dx$$

$$\boxed{23\ln|x-2| + \frac{5}{2}x^2 + 11x + C}$$

$$\begin{array}{l|l} \overset{N}{5x^2+x+1} & \overset{D}{x-2} \\ \hline -(5x^2-10x) & 5x+11 \quad Q \\ \quad\ \ 11x+1 & \\ \quad -(11x-22) & \\ \hline \qquad\quad 23 \quad R & \end{array}$$

$$\boxed{\frac{N}{D} = \frac{R}{D} + Q}$$

NB

Per Sostituzione

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-2e^x-3}\,dx$$

Pongo $e^x = t$

$x = \ln t$

$dx = \frac{1}{t}\,dt$

$$= \int \frac{t}{t^2-2t-3} \cdot$$

$$= \int \frac{\cancel{t}}{t^2-2t-3} \cdot \frac{1}{\cancel{t}}\,dt = \int \frac{dt}{t^2-2t-3}$$

$\Delta = 4 + 12 = 16$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)(t-3)} = \int \frac{A\,dt}{t+1} + \int \frac{B\,dt}{t-3}$$

$t = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 \; \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$

.... to be continued.

$$\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-3}=\frac{1}{(t+1)(t-3)}$$

$$At-3A+Bt+B=1 \implies \begin{cases} A+B=0 \\ -3A+B=1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} A=-B \\ 3B+B=1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} A=-1/4 \\ B=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{4}\ln|t+1|+\frac{1}{4}\ln|t-3|+C$$

$$t \to e^x$$

$$-\frac{1}{4}\ln|e^x+1|+\frac{1}{4}\ln|e^x-3|+C$$