CAPITOLO 1

LA MATEMATICA PRESSO I GRECI

E' indegno del nome di uomo chi ignora il fatto che la diagonale di un quadrato è incommensurabile con il suo lato.
Platone (429-347 a.C.)

1. La scuola Pitagorica: tutto il mondo è numero (naturale)

Il primo organico tentativo di dare una fondazione alla matematica (ed all'intera conoscenza scientifica) fu probabilmente quello della scuola pitagorica il cui assunto di partenza era che:

<u>alla base di tutto è il numero intero.</u>

La scuola pitagorica era una setta mistico-religiosa che si sviluppò in Grecia e in Italia (Crotone) tra il 570 ed il 500 a.C. attorno ad un mitico personaggio chiamato Pitagora. Le idee di tale scuola sono di fondamentale importanza per la storia della cultura occidentale perché da esse inizierà quel processo che trasformerà la scienza pre-ellenica, che consisteva in una disarticolata raccolta di risultati dettati dall'esperienza, in una scienza razionale.[1] Dei pitagorici parla Aristotele al modo seguente, dove si deve tenere conto che allora per "numero" si intendeva "numero intero positivo".

> *Tra i primi filosofi, ..., furono i cosiddetti Pitagorici, i quali, applicatisi alle scienze matematiche, le fecero per i primi progredire; cresciuti poi nello studio di esse, vennero nell'opinione che i loro principi fossero i principi di tutti gli esseri... Pensarono che gli elementi dei numeri fossero gli elementi di tutte le*

---

[1] Non bisogna avere una immagine dei pitagorici come scienziati campioni di razionalismo. Il carattere mistico di questa scuola era fortissimo, siamo in presenza di una vera e propria setta religiosa (e politica) che credeva, tra le altre cose, che le anime dei morti si reincarnassero negli animali. Anche le "regole" di tale setta ci appaiono notevolmente bizzarre. Ad esempio ecco alcuni comandamenti:

- *non toccare un gallo bianco*
- *non addentare una pagnotta intera*
- *non guardare uno specchio accanto ad un lume.*

Ma queste che ci appaiono come stranezze non tolgono ai pitagorici il merito di costituire il punto di inizio della moderna cultura scientifica.

cose, e che l'universo intero fosse armonia e numero (Aristotele, *Metafisica*).

Si deve tenere conto che in quel periodo era forte il desiderio di trovare i "principi ultimi" e che questi venivano cercati negli elementi naturali come l'aria, l'acqua o il fuoco. Forse però per capire meglio il pensiero dei Pitagorici conviene vedere cosa dice uno di loro, Filolao.

"Nessuna menzogna accolgono in sé la natura del numero e l'armonia: non è cosa loro la menzogna. La menzogna e l'invidia partecipano della natura dell'illimitato, dell'inintelligibile e dell'irrazionale. Nel numero non penetra menzogna, perché la menzogna è avversa e nemica della natura, così come la verità è connaturata e propria alla specie dei numeri . . . "

"... Nulla sarebbe comprensibile, né le cose in sé né le loro relazioni, se non ci fossero il numero e la sua sostanza."

"Tutte le cose che si conoscono hanno numero: senza il numero non sarebbe possibile pensare né conoscere alcunché."

Un ruolo talmente centrale dato al numero potrebbe anche dipendere dalla scoperta di un forte collegamento tra rapporti numerici ed "armonia" in campo musicale. Infatti viene attribuita ai Pitagorici la scoperta di una scala armonica che viene detta, appunto, *scala pitagorica*. Consideriamo delle corde tese di varia lunghezza ed esaminiamo i suoni che vengono emessi pizzicandone due contemporaneamente. Ci si accorge che a volte si hanno effetti gradevoli ed a volte sgradevoli. E' possibile studiare quale sia il rapporto tra le lunghezze delle due corde ed il fenomeno della "gradevolezza" o, per essere più specifici, della "consonanza". Ora la prima scoperta che viene da fare è che se una corda è il doppio dell'altra si ha una fortissima consonanza. In questo caso noi diciamo che i due suoni differiscono per una ottava. Se indichiamo con A la lunghezza della prima corda e con B quella della seconda allora $B = (1/2)\cdot A$ o, se si vuole, $A : B = 2 : 1$. Un altro suono gradevole si ottiene facendo vibrare, insieme ad A una corda la cui lunghezza C sia i due terzi di A cioè $C = (2/3)\cdot A$. Ne segue che $A : C = 3 : 2$. Infine ci si accorge che un suono gradevole si ottiene dai suoni prodotti dalle corde C e B che risultano essere nel rapporto C:B = 4:3. Abbiamo quindi che le tre consonanze principali, (che prendono il nome di ottava quinta e quarta), corrispondono ai rapporti 2:1; 3:2 e 4:3. E' una sorprendente corrispondenza tra suoni e numeri che suggerisce fortemente l'idea per cui "tutto è numero".

Da quel *"tutte le cose che si conoscono hanno un numero"* scaturiva poi il convincimento circa la struttura granulare e discreta delle figure geometriche e, più in generale, del mondo fisico. Ciò comportava, ad esempio, una concezione del segmento come insieme finito di punti-unità, punti che venivano intesi come veri e propri corpi con una determinata grandezza. Infatti era solo in base a tale ipotesi che i numeri interi potevano essere lo strumento perfettamente adeguato alla descrizione della realtà, anzi, in un certo senso, venivano a coincidere con la realtà stessa. In tale modo la geometria non si considerava distinta dall'aritmetica e, in un certo senso, l'aritmetica assumeva una forma geometrica. Dei numeri infatti si dava una rappresentazione geometrica o, se si vuole, fisica, tramite una opportuna configurazione di punti-sassolino. Ad esempio si chiamavano *triangolari* i numeri che si potevano ottenere disponendo i punti in triangoli.

```
O      O      O         O
      O O    O O       O O
            O O O     O O O
                     O O O O
```

Si chiamavano invece *quadrati* i numeri corrispondenti a gruppi di sassolini disposti in quadrato

```
O    O O    O O O    O O O O
     O O    O O O    O O O O
            O O O    O O O O
                     O O O O
```

I numeri quadrati corrispondono ai numeri che sono quadrati perfetti. Ancora, si chiamavano *rettangolari* i numeri corrispondenti a gruppi di sassolini disposti in un rettangolo (che non si riduca ad una striscia di sassolini). In questo caso sono rettangolari tutti

```
O O    O O O    O O O    O O O O
O O    O O O    O O O    O O O O
                O O O    O O O O
```

e soli i numeri che <u>non</u> sono numeri primi.

L' interpretazione dei numeri come particolari disposizioni di sassolini consente di sviluppare una interessante aritmetica. Ad esempio, è immediato che ogni triangolo si ottiene dal precedente aggiungendo un fila di sassolini. Pertanto se $t(n)$ è il numero dei sassolini dell'ennesimo triangolo abbiamo che la funzione t è definibile tramite le equazioni

$$t(1) = 1 \quad : \ t(n) = t(n\text{-}1)+n.$$

Ne segue che sono triangolari tutti i numeri della serie 1, 3, 6, 10, ... di termine generale n, cioè tutti i numeri del tipo 1+2+3+...+n. Per quanto riguarda i numeri quadrati, è immediato vedere che ogni quadrato si ottiene dal precedente aggiungendo due lati (con un sassolino in comune). Ne segue che, se $q(n)$ è il numero dei sassolini dell'ennesimo quadrato, la funzione q si definisce tramite le equazioni

$$q(1) = 1 \quad : \ q(n) = q(n\text{-}1)+2n\text{-}1.$$

Pertanto i quadrati perfetti si ottengono come elementi della serie 1, 1+3, 1+3+5, ..., 1+3+...+$2n$-1, cioè la serie di termine generale $2n$-1. Si osservi che sia la funzione t che la funzione q sono state definite “per ricorsione”. In proposito si veda nel prossimo capitolo i paragrafi su induzione e ricorsione.

L'importanza della svolta impressa dalla scuola pitagorica non si limita alla sola matematica poiché la fede nella potenza regolarizzatrice del numero intero, il procedimento di astrazione, l'uso delle dimostrazioni nel procedere scientifico, rappresentano il nascere dell'aspetto fondamentale della cultura occidentale: il convincimento che il mondo sia comprensibile non attraverso l'ascesi mistica, la contemplazione, come viene ritenuto dalle culture orientali, ma attraverso l'attività raziocinante. Con Pitagora ha inizio un processo di idealizzazione e razionalizzazione di tutte le forme di conoscenza che dominerà perfino la nostra cultura religiosa. Afferma ad esempio Bertrand Russell in *"Storia della filosofia occidentale"* :

> *“La religione razionalistica, al contrario di quella apocalittica, è stata da Pitagora in poi (ed in particolare da Platone in poi) completamente dominata dalla matematica e dal metodo matematico. La combinazione di matematica e di teologia, che cominciò con Pitagora, caratterizzò la filosofia religiosa in Grecia, nel Medioevo e nell'era moderna fino a Kant. L'orfismo precedente a Pitagora era analogo alle misteriose religioni asiatiche. Ma, in Platone, Sant'Agostino, Tommaso d'Aquino,*

Cartesio, Spinosa e Leibniz, vi è un intimo intrecciarsi di religione e di ragionamento, di aspirazione morale e di ammirazione logica per ciò che è eterno, il quale viene da Pitagora e distingue la teologia intellettualizzata dell'Europa dal più diretto misticismo asiatico."

2. I numeri non sono sufficienti: grandezze incommensurabili
Abbiamo visto che per la scuola pitagorica ogni figura è costituita da un certo numero di sassolini-punto disposti opportunamente. Se si accetta questo punto di vista ogni figura geometrica, in un certo senso, può essere misurata da un numero naturale. Infatti basta contare il numero dei sassolini-punto che ne fanno parte. Purtroppo vedremo che questo non è sempre possibile. Per prima cosa vediamo che cosa significa misurare un segmento.

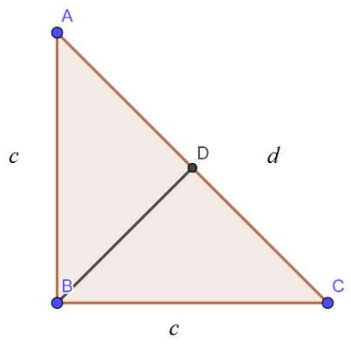
In altre parole, dovendo misurare un segmento a e l'unità di misura è un segmento u, allora dico che la misura di a è n se "riportando" *n volte u* lungo il segmento a riesco a raggiungere esattamente la fine del segmento a.

Definizione 2.1. Diciamo che un segmento a è un *n-multiplo* di un segmento u se a si può dividere in n segmenti *congrui* a b. Se assumiamo u come segmento unitario, allora diciamo che la *misura di a* rispetto all'unità di misura u è n.

In altre parole, dovendo misurare un segmento a e l'unità di misura è un segmento u, allora dico che la misura di a è n se "riportanto" u lungo *a n volte* riesco a raggiungere esattamente la fine del segmento a.

Definizione 2.2. Diciamo che i segmenti $a_1,\dots,a_n$ sono *commensurabili* se esiste un segmento u tale che ogni a_i ha una misura intera rispetto all'unità di misura u. Altrimenti diciamo che sono *incommensurabili.*

Teorema 2.3. Dato un triangolo rettangolo isoscele, qualunque sia l'unita di misura scelta, cateto e diagonale non possono avere entrambi misura intera.



Dim. Fissata un'unità di misura u, supponiamo per assurdo che esistano triangoli rettangoli isosceli con cateto ed ipotenusa di misura intere. Sia d la lunghezza più piccola tra le lunghezze di tali triangoli ed indichiamo con ABC un triangolo la cui ipotenusa misuri d mentre supponiamo che i suoi cateti misurino c. Indichiamo con D il punto medio dell'ipotenusa AC. E' evidente che l'area del triangolo ABC è il doppio dell'area del triangolo BDC e quindi che $c^2/2 = 2\cdot(d^2/2)$. Da tale equazione segue che $d^2 = 2\cdot c^2$ e quindi che d è un numero pari. Poiché BD è uguale a DC, questo comporta che il triangolo BDC ha lati interi. Questo è assurdo in quanto BCD ha una ipotenusa c minore di quella d di ABC.

Poiché cateto e diagonale di un triangolo rettangolo isoscele possono essere anche visti come lato e diagonale di un quadrato, possiamo anche enunciare il teorema ora dimostrato al modo seguente.

Teorema 2.4. Il lato e la diagonale di un quadrato sono incommensurabili.

Possiamo anche riformulare quanto detto fino ad ora come un tipo di paradosso.

Paradosso 2.5. (Paradosso dell'esistenza di una figura con lati incommensurabili)[2] Dato un quadrato, per quanto piccola si sia

[2] Letteralmente "paradosso" significa "contro l'opinione comune" e tale espressione non andrebbe confusa con "antinomia" o "contraddizione" che invece significano che si è riusciti a dimostrare una affermazione ed anche la negata di tale affermazione. Tuttavia spesso si confondono le due cose anche perché, se si esprime l'opinione comune come assioma, allora il paradosso diviene una contraddizione. Anche l'espressione "opinione comune" può significare cose diverse e dipende molto dall'epoca o dal gruppo sociale cui si riferisce. Nel nostro caso il paradosso deve essere inteso come contro l'opinione comune ai tempi della

scelta l'unità di misura (centimetro, millimetro, decimillimetro ...) se si riesce a misurare con precisione il lato non è possibile misurare con precisione la diagonale.

Abbiamo visto quindi che il tentativo di fondare la geometria a partire dai numeri interi non regge. Si potrebbe pensare che estendendo la nozione di misura in modo da accettare i numeri razionali tale tentativo possa avere successo.

Definizione 2.6. Diremo che *u'* è la *m-sima parte di u* se *u* è un *m*-multiplo di *u'*. Diremo che la misura di un segmento *a* rispetto ad *u* è il numero razionale p/q se *u* è un *p*-multiplo di segmenti che sono congrui all'*q*-sima parte di *u*.

Teorema 2.7. Dato un quadrato, *ABCD* qualunque sia l'unità di misura scelta *u*, lato e diagonale non possono avere entrambi misura razionale.

Dim. Assumiamo per assurdo che lato e diagonale si possano rappresentare con due razionali e rappresentiamo questi due razionali con lo stesso denominatore e quindi con le frazioni n/t ed m/t. Ingrandiamo allora *ABCD* di *t*. Otteniamo allora un *A'B'C'D'* con lato e diagonale di lunghezza *n* ed *m*, rispettivamente in contraddizione col Teorema 2.4.

3. Il teorema di Pitagora

Lo sapevate? Il quadrato costruito sull'ipotenusa è il doppio di quello sui cateti . . . ma la qualità è scadente e dopo un anno lo butti! È così! È capitato a mia sorella! Fidatevi!
-Vulvia (Corrado Guzzanti, Il caso Scrafoglia, 2002).

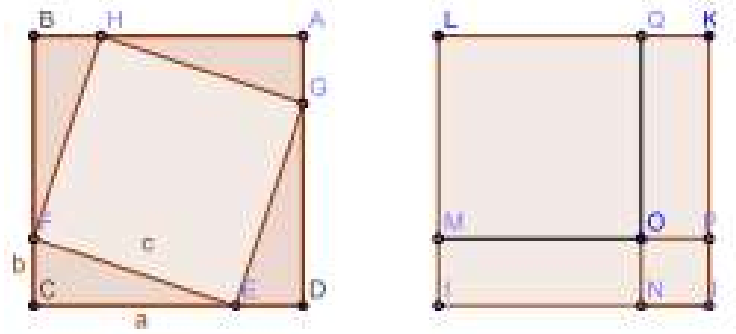
Dimostrazioni di esistenza di figure con lati non commensurabili sono rese più facili se si utilizza il teorema di Pitagora.

---

scuola Pitagorica oppure contro l'opinione comune della comunità delle persone non acculturate..

Teorema 3.1. (Teorema di Pitagora) Dato un triangolo rettangolo, se si considera l'unione dei due quadrati costruiti sui cateti otteniamo una figura che ha la stessa estensione del quadrato costruito sull'ipotenusa.[3]

Dim.[4] Indichiamo con T il triangolo rettangolo, supponiamo che i cateti misurino a e b e l'ipotenusa c. Costruiamo un quadrato Q con lati uguali ad $a+b$.



Detti A, B , C, D i vertici di Q, tracciamo sui lati i quattro punti H, F, E, G in modo che $CE = DC = AH = BF = a$ mentre $ED = GA = HB = FC = b$. In tale modo si individuano quattro triangoli rettangoli uguali (avendo cateti uguali per costruzione). Inoltre tali punti individuano un quadrilatero *FEGH*. Tale quadrilatero

[3] Attualmente tale teorema si enuncia dicendo che: "la somma dei quadrati delle misure dei cateti è uguale al quadrato della misura dell'ipotenusa". Tuttavia si deve tenere presente che per i greci non esisteva una "misura" di una figura geometrica in quanto misurare significa assegnare un numero reale a qualche cosa e nella matematica greca non esisteva la nozione di numero reale. Come vedremo, essi avevano invece la nozione di uguaglianza dell'estensione di due figure, quella di equiscomponibilità e quella di proporzionalità di grandezze omogenee con cui riuscivano ad esprimere molti teoremi sulle misure.

[4] In realtà quella che segue non è una dimostrazione nel senso moderno e rigoroso del termine e non lo può essere visto che non abbiamo ancora elencato gli assiomi della geometria di Euclide. Piuttosto si prova una proprietà non molto evidente "il teorema di Pitagora" a partire da altre proprietà che ci appaiono più evidenti. Ad esempio il primo passo della dimostrazione consiste nella costruzione di un quadrato di un dato lato. E' possibile sempre costruire un tale quadrato? La questione non è tanto semplice ed ha a che fare con l'assioma delle parallele. Nel corso di questo capitolo considereremo spesso "dimostrazioni" di questo tipo.

ha lati uguali in quanto coincidenti con le ipotenuse dei triangoli. Inoltre gli angoli sono retti. Ad esempio, l'angolo in *E* è retto in quanto è uguale ad un angolo piatto meno la somma dei due angoli non retti di *T*. D'altra parte la somma dei due angoli non retti di un triangolo rettangolo è un angolo retto. Pertanto *FEGH* è un quadrato, precisamente il quadrato costruito sull'ipotenusa..

Osserviamo ora che l'area di *Q* può essere calcolata come il quadrato del lato cioè come $(a+b)^2$ e quindi, per la formula del quadrato di un binomio, come a^2+b^2+2ab. D'altra parte l'area di *Q* è anche uguale a quella del quadrato piccolo *FEGH* più quella dei quattro triangoli, cioè è uguale a $c^2+(4ab)/2$. Dall'uguaglianza

$$a^2+b^2+2ab = c^2+2ab$$

si ricava che $a^2+b^2=c^2$.

Avendo utilizzato la formula del quadrato del binomio una tale dimostrazione è di carattere algebrico. Tuttavia tale formula ammette una semplice dimostrazione geometrica che è completamente illustrata dalla figura tracciata sopra a destra in cui si mostra come l'area del quadrato si possa calcolare in due modi. Uno è considerare il quadrato del lato $a+b$, l'altro è effettuare la somma dei quadrati di estensione a^2 e b^2 più due rettangoli di estensione *ab*. □

E' naturale anche porsi il seguente problema:

"un triangolo che verifica il teorema di Pitagora è necessariamente rettangolo ?

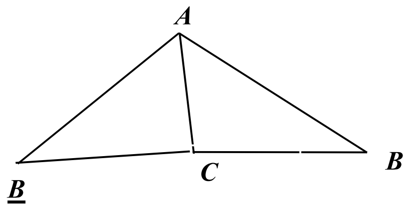
Ad esempio, possiamo avere tre asticelle di lunghezza 3, 4, 5 e chiederci se il triangolo costruito con tali asticelle sia rettangolo. Il seguente teorema mostra che la risposta è positiva.

Teorema 3.2. (Teorema inverso di Pitagora) Ogni triangolo i cui lati verificano il teorema di Pitagora è rettangolo. [5]

---

[5] Questo teorema è utilizzato per costruire un angolo retto con una semplice corda. Basta individuare sulla corda quattro punti consecutivi *A*, *B*, *C*, *A'* in modo che i segmenti *AB*, *BC* e *CA'* siano di lunghezza 5, 4, 3, rispettivamente. Poi, congiungendo *A* con *A'* si costruisce il triangolo *ABC*. Tenendo conto del fatto che $3^2+4^2 = 5^2$ siamo sicuri che il triangolo è rettangolo in *C*.

Dim. Sia ABC un triangolo tale che $AB^2 = AC^2+BC^2$ e costruiamo un segmento $\underline{B}C$ perpendicolare ad AC e di lunghezza uguale a CB. Allora i due triangoli $AC\underline{B}$ e ACB hanno il lato AC in comune ed i lati $\underline{B}C$ e CB uguali per costruzione. Inoltre, essendo $AC\underline{B}$ rettangolo in C, $A\underline{B}^2 = AC^2+\underline{B}C^2 = AC^2+CB^2 = AB^2$.



Pertanto i due triangoli, avendo i tre lati uguali, sono uguali. Da ciò segue che l'angolo ACB è uguale all'angolo retto $AC\underline{B}$ ed è quindi retto. □

4. Ancora grandezze incommensurabili: la prima crisi

Il teorema di Pitagora è un valido strumento per trovare infiniti esempi di grandezze incommensurabili. Per poterlo fare si serviremo dei due seguenti lemmi.

Lemma 4.1. Se c è un quadrato perfetto, allora ogni numero primo presente nella fattorizzazione di c ha un esponente pari.

Dim. . Supponiamo che $c = n^2$ e che n abbia la scomposizione $n = p_1^{n(1)},\ldots,p_s^{n(s)}$ con $p_1,\ldots,p_s$ primi allora $c = n^2 = p_1^{2\cdot n(1)}\cdot\ldots\cdot p_s^{2\cdot n(s)}$.

Supponiamo ad esempio che $c = 12^2 = 144$ allora essendo $12 = 2^2\cdot 3$, la fattorizzazione di 144 sarà $12^2 = 2^4\cdot 3^2$.

Lemma 4.2. Sia p un numero primo, allora un quadrato perfetto non può essere p volte un altro quadrato perfetto, cioè l'equazione

$$p\cdot n^2 = m^2$$

non ammette soluzioni intere.

Dim. Supponiamo per assurdo che esistano due interi n ed m tali che $p\cdot n^2 = m^2$, e poniamo $c = p\cdot n^2 = m^2$, allora
- m^2 e quindi m è divisibile per p,
- dall'equazione $c = m^2$ si deduce che il fattore p compare in c un numero pari di volte