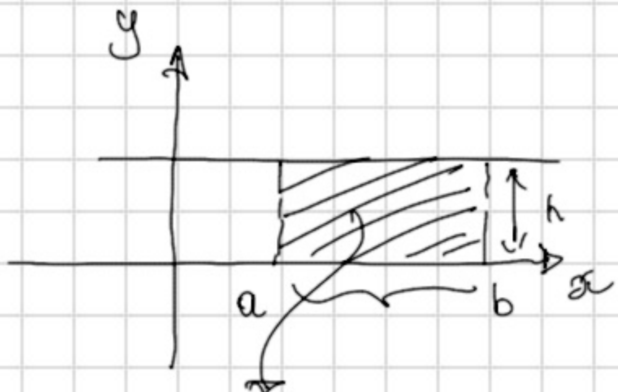
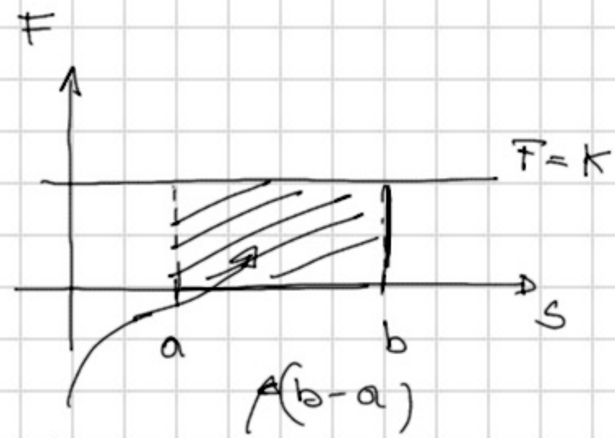
Lezione del 12-12-2023

Il calcolo integrale



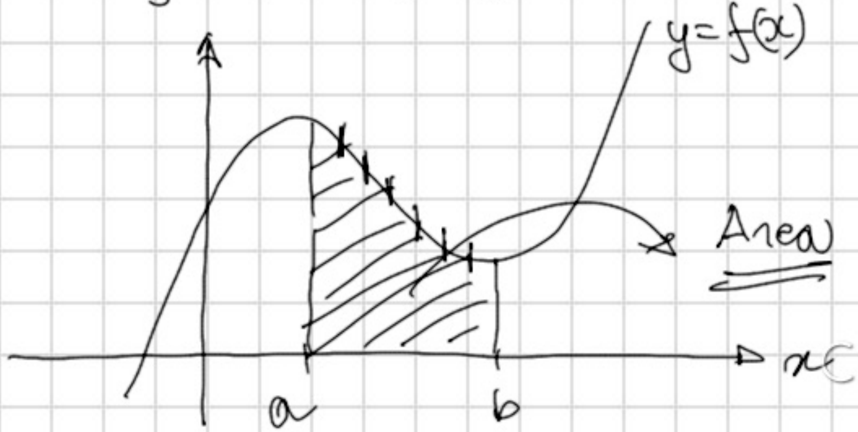
$y = K$

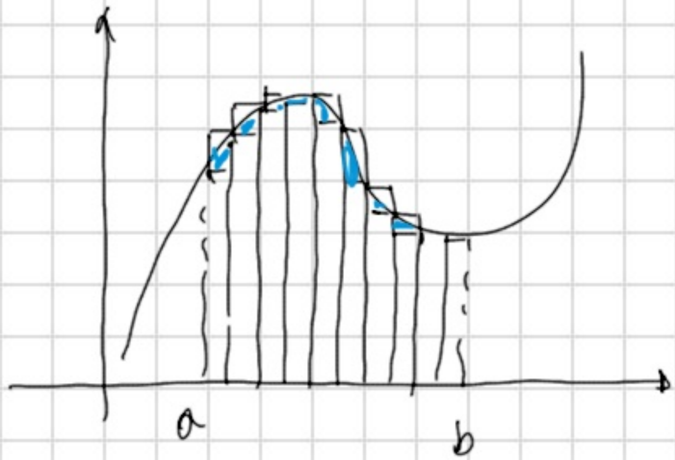


$A = (b-a)K$

$L = F s$

Area sottesa alla retta $F = K$





$[a,b]$ in n intervalli uguali

considero una partizione di $[a,b]$

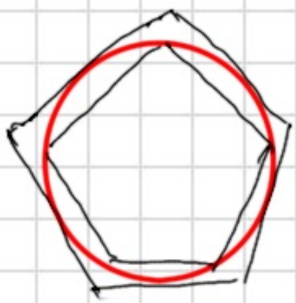
Somma le aree di tutti i rettangoli sottesi alla curva ne ho un'area per difetto

Considero i rettangoli che sottendono la curva ne ho un'area per eccesso.

$$\boxed{L = \int_a^b F \cdot ds}$$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

L'idea di base del concetto di integrale era già nota ad Archimede (287 - 212 a.C.) ed era legata al suo metodo per il calcolo dell'area del cerchio o anche di un segmento di parabola (METODO DI ESAUSTIONE)



l'area del cerchio è determinata costruendo una successione di poligoni che assomigliano sempre di più al cerchio. All'aumentare del numero dei lati la differenza tra l'area del poligono inscritto e circoscritto diventerà sempre più piccola.
Al limite otteniamo con buona approssimazione l'area del cerchio.

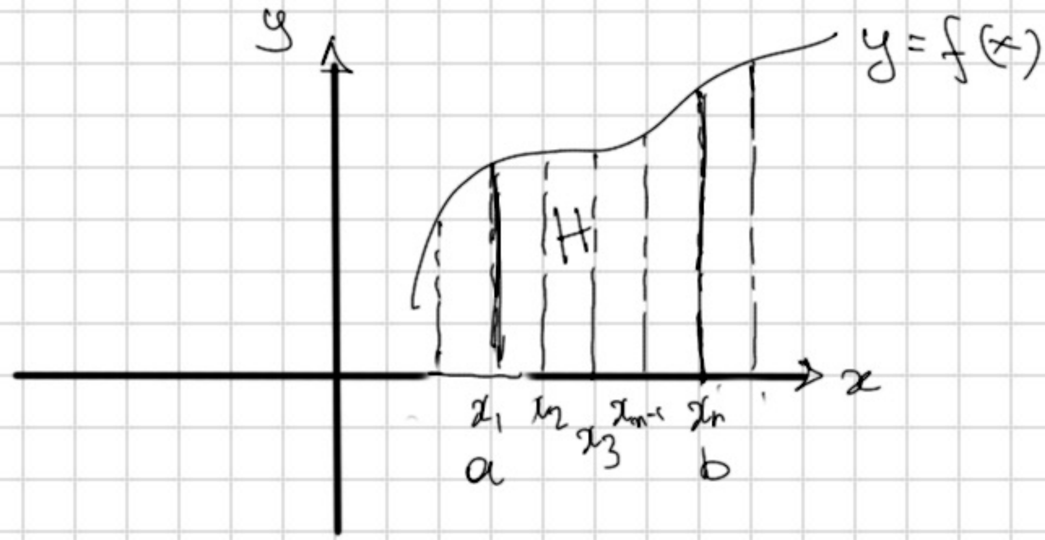
IDEA di INTEGRALE → PROBLEMA DEL CALCOLO DELLE AREE

XVII	Fermat Mercator	Utilizzano dei metodi per il calcolo dell'area sottesa ad alcune semplici funzioni
XVIII	Newton Leibnitz Bernoulli	Scoprono indipendentemente l'uno dall'altro il teorema fondamentale del calcolo integrale
	Cauchy Riemann	Definiscono l'integrale in modo più rigoroso

$\int$ è stato introdotto da Leibniz **Summa**

Esse allungata

Summa infinita di addendi infinitesimali



Sia $f(x)$ una funzione reale non negativa definita e continua nell'intervallo $[a,b]$. Sia H il rettangoloide di base $[a,b]$ relativo alla funzione $f(x)$.
Per il teorema di Weierstrass f è limitata in $[a,b]$, quindi H è limitato

H è misurabile? Quanto vale la sua misura ovvero la sua area?

Consideriamo una partizione P di $[a,b]$ costituita da un numero finito di intervalli chiusi $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $[x_{n-1}, x_n]$

$x_1 = a \quad x_n = b$

$[x_i, x_{i+1}]$ m_i' minimo m_i'' massimo

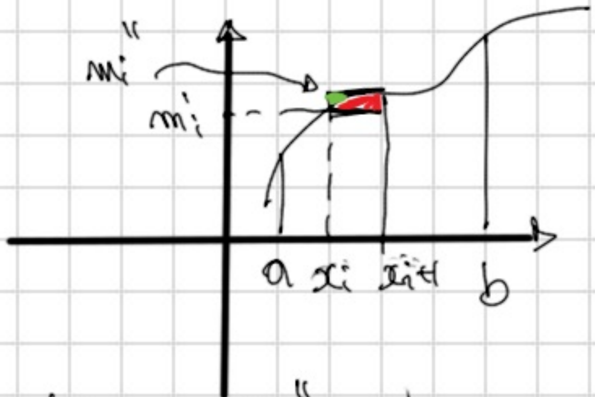
$$S' = \sum_{i=1}^{n} m_i' (x_{i+1} - x_i)$$

$m_i'(x_{i+1} - x_i)$ area del rettangolo di base $x_{i+1} - x_i$

$$S'' = \sum_{i=1}^{n} m_i'' (x_{i+1} - x_i)$$

S' e S'' descrivono due insiemi numerici al variare della reticolazione R. S' ed S'' sono separati perché l'area di di ogni plurirettangolo chiuso in H è minore-uguale di ogni plurirettangolo chiuso includente H e sono anche contigui

Conseguentemente, il rettangoloide H di base $[a,b]$ relativo ad f è misurabile e la sua misura è l'elemento di separazione tra S' e S''.



La differenza $S''-S'$ e quindi la differenza $S''-m(H)$ e $m(H)-S'$ sono via via sempre più piccole quanto più piccoli sono gli intervalli della reticolazione

$$m(H) = \lim_{\delta \to 0} S' - \lim_{\delta \to 0} S''$$

Se f è una funzione continua e non negativa in $[a,b]$ chiuso e limitato, i due insiemi numerici S' ed S'' sono contigui. Il rettangoloide H di base $[a,b]$ relativo a f è misurabile e

$$m(H) = \sup S' = \inf S''$$

e se S è la somma

$$m(H) = \lim_{\delta \to 0} S$$

S' e S'' si chiamano somme di Riemann e l'elemento di separazione tra i due insiemi numerici S' e S'' si chiama integrale di Riemann della funzione f relativo ad $[a,b]$ e si indica

$$\int_a^b f(x)\,dx \longrightarrow \text{funzione integranda}$$

a e b estremi di integrazione

Proprietà dell'integrale di una funzione continua

Proprietà di linearità

Se f e g sono due funzioni reali continue in [a,b] qualunque siano le costanti C_1 e C_2 si ha che

$$\int_a^b [C_1 f(x) + C_2 g(x)]\,dx = C_1 \int_a^b f(x)\,dx + C_2 \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx$$

Proprietà di additività

Se f è una funzione reale continua nell'intervallo [a,b], detto c un qualunque punto interno ad [a,b] si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$