Lezione del 30-11-2023

TEOREMA DI ROLLE

Sia f una funzione reale continua nell'intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato, derivabile in tutti i punti ad esso interni. Se $f(a) = f(b)$, esiste almeno un punto ξ interno ad $[a,b]$ tale che $f'(\xi) = 0$

DIMOSTRAZIONE (Dini, 1878)

Distinguiamo due casi.

- Se f è costante, il teorema è banalmente vero in quanto la derivata di f si annulla ovunque.
- Se f non è costante
  f è continua in $[a,b]$ a norma del teorema di Weierstrass, è ivi dotata di minimo e massimo. Siano x_m e x_M risp. le ascisse di tali punti.
  Di questi due punti almeno uno è interno ad $[a,b]$. Se ciò ~~non~~ fosse dovrebbe essere $f(a) = f(b)$ e dunque ci ritroveremmo nel primo caso di una funzione costante.
  Supponiamo che x_m sia interno ad $[a,b]$. Dobbiamo verificare che $f'(x_m) = 0$

Infatti se f assume su x_m un minimo, si ha che

$$f(x) \geq f(x_m)$$

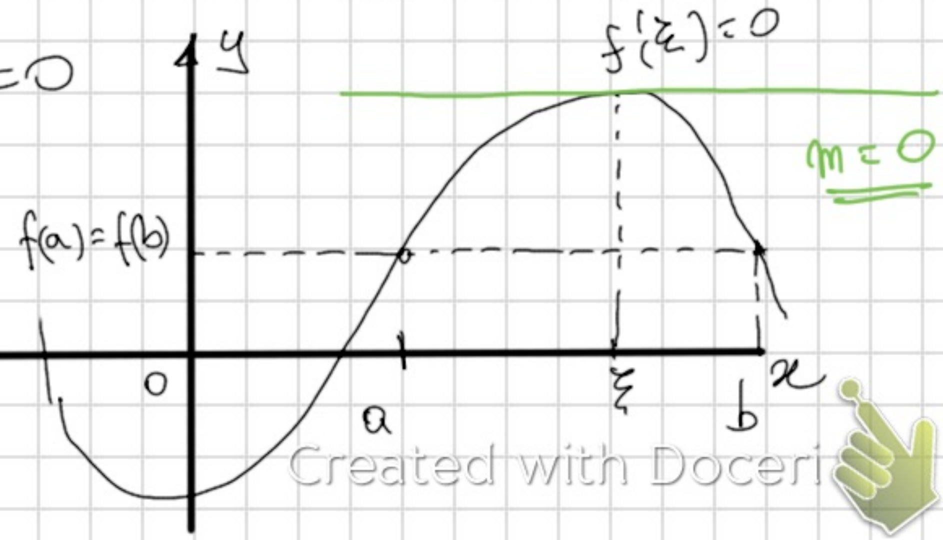
Quindi il rapporto

$$\frac{f(x)-f(x_m)}{x-x_m} \begin{cases} \geq 0 & \forall x > x_m \\ < 0 & \forall x < x_m \end{cases}$$

Conseguentemente, per il teorema di permanenza del segno, il limite per $x \to x_m$ deve essere zero e ciò significa

$$f'(x_m)=0$$

Dal punto di vista geometrico il teorema ci assicura l'esistenza di una retta tangente al grafico di f parallela all'asse x.



TEOREMA DI LAGRANGE O DEL VALOR MEDIO

Sia f una funzione reale continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, derivabile in $]a,b[$, allora esiste un punto $\xi \in [a,b]$ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

DIMOSTRAZIONE

Considero la retta che passa per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}}$$

retta per 2 punti

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x-a}{b-a}$$

In forma esplicita

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \qquad \boxed{y=f(x)}$$

Considero la funzione ausiliaria $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

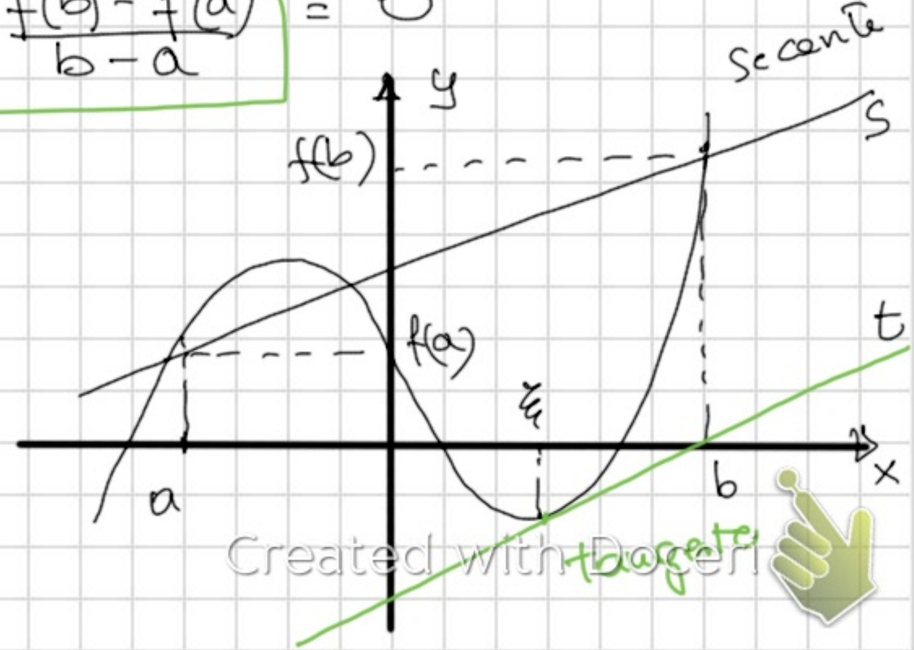
Si tratta di una funzione
continua in $[a,b]$, ivi derivabile, proprio come $f(x)$

Per il teorema di Rolle, esiste un punto $\xi \in [a,b]$ t.c.

$$\varphi'(\xi) = \boxed{f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}} = 0$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

S e t sono
parallele. (Cavalieri)



TEOREMA DI CAUCHY O DEGLI INCREMENTI FINITI

Siano f e g due funzioni reali continue in [a,b] chiuso e limitato e derivabili in]a,b[, allora esiste almeno un punto $\xi \in [a,b]$ per il quale vale l'uguaglianza

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

DIMOSTRAZIONE

Per la funzione f vale il teorema di Lagrange, dunque esiste un punto $\xi \in [a,b]$ t.c.

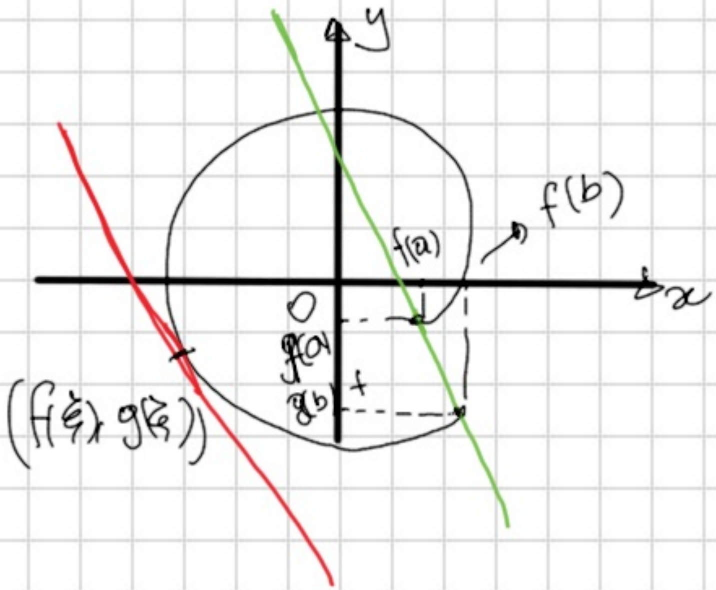
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

Anche per la funzione g vale il teorema di Lagrange, dunque esiste un punto $\xi \in [a,b]$ t.c.

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(\xi)$$

Dividendo le due relazioni ottengo

$$\frac{\dfrac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}}{\dfrac{g(b)-g(a)}{\cancel{b-a}}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$



Una curva piana se è dotata di retta tangente tra due suoi punti a e b, allora almeno una di queste due rette tangenti è parallela alla corda AB.

TEOREMA DI FERMAT (sulle funzioni con derivata nulla)

Una funzione definita in un intervallo $]a,b[$ ivi derivabile e con derivata nulla, in ogni punto di tale intervallo è costante.

DIMOSTRAZIONE

Per il teorema di Lagrange, per ogni coppia di punti x_1 e x_2 di $]a,b[$ si ha

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Essendo $f'(\xi) = 0$ si ha

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$$

$$\forall x \in]a,b[.$$

ES. 1 T. di Rolle.

$$f(x) = \sqrt{x^3 - x} \qquad [-1, 0]$$

f è continua in $[-1,0]$
f è derivabile in $]-1,0[$
$f(-1) = f(0)$

Hp

$f(x)$ è continua perché composta di funzioni continue

$f(x)$ è derivabile ?

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x}}$$

$$D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D\sqrt{f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$$

$$\sqrt{x^3 - x} = 0 \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1$$

f è derivabile in $]-1,0[$

$$f(-1) = 0 = f(0)$$

$$\Longrightarrow \exists\, \xi \in [-1,0] \text{ t.c. } f'(\xi)=0$$

$$f'(x) = \frac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}} \qquad f'(\xi) = \frac{3\xi^2-1}{\cancel{2\sqrt{\xi^3-\xi}}} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 3\xi^2 - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \xi = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

$$-\sqrt{\tfrac{1}{3}} \in [-1,0]$$

Es. 2 $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \sin x$ in $[-\pi, \pi]$

f è continua perché è composta di funzioni continue

f è derivabile ?

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \sin x + \sqrt[3]{x} \cos x$$

$x^2 \neq 0 \iff x \neq 0$ Il punto ~~di~~ ascissa $x_0 = 0$ è di non derivabilità.

Es. 3

$$f(x) = \frac{ax^2+1}{x^2+bx+1}$$

Determinare a e b in modo che $y=2$ sia asintoto orizzontale e $x=-2$ sia asintoto verticale

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+1}{1x^2+bx+1} = 2 \Rightarrow a = 2$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{ax^2+1}{\boxed{x^2+bx+1}} = \infty$$

$\Rightarrow = 0$

$x^2+bx+1 = 0$

$4-2b+1=0$

$b = 5/2$

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+\frac{5}{2}x+1}$$

ES. 4

Determinare a, b, c in modo tale che $y = 2x - 1$ sia un asintoto obliquo e $x = 1$ sia asintoto verticale

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + 1}{x^2 + c}$$

$$y = mx + q \qquad \boxed{m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}}$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^3 + bx^2 + 1}{x^3 + cx} = 2 \implies \boxed{a = 2}$$

$$q = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 + bx^2 + 1}{x^2 + c} - 2x =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{2x^3} + bx^2 + 1 - \cancel{2x^3} - 2cx}{x^2 + c} = \boxed{b = -1}$$

$$\lim_{x \to 1} x^2 + c = 0 \iff 1 + c = 0 \iff \boxed{c = -1}$$

Created with Doceri

STUDIO DI UNA FUNZIONE

1. Insieme di esistenza
2. Studio del segno
3. Inters. con assi
4. Comportamento di f agli estremi del I.E.
5. Proprietà di monotonia

$$f(x) = \frac{x-3}{2x^2+x-1}$$

I.e. $2x^2+x-1 \neq 0 \iff x \neq -1 \; , \; x \neq \frac{1}{2}$

$x \in \left]-\infty ; -1\right[\cup \left]-1 ; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

Proprietà di monotonia

$$f'(x) = \frac{2x^2+x-1 - (x-3)(4x+1)}{(2x^2+x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2+\cancel{x}-1-(4x^2+\cancel{x}-12x-3)}{(2x^2+x-1)^2}$$

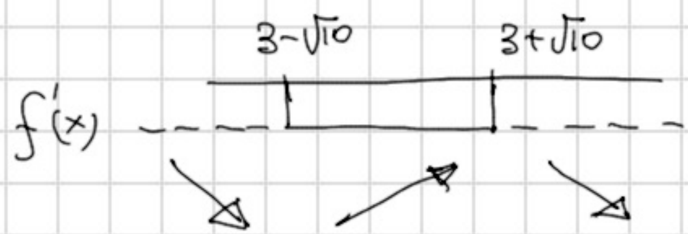
$$f'(x) = \frac{-2x^2+12x+2}{(2x^2+x-1)^2}$$

$f'(x) > 0$

$$f'(x) = \frac{-2x^2+12x+2}{(2x^2+x-1)^2}$$

$$\begin{cases} -2x^2+12x+2 > 0 \\ (2x^2+x-1)^2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-6x-1 < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} - \left\{-1 ; \frac{1}{2}\right\} \end{cases}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{9+1} = 3 \pm \sqrt{10} \qquad 3-\sqrt{10} < x < 3+\sqrt{10}$$



$x_m = 3-\sqrt{10}$ minimo relativo $\qquad y_m = \dots$

$x_M = 3+\sqrt{10}$ massimo relativo $\qquad y_M = \dots$

punto di minimo

$m \equiv (x_m, y_m)$

$M \equiv (x_M, y_M)$

punto di massimo