Lezione del 23-11-2023

Criterio di invertibilità

Una funzione continua e strettamente monotona in un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato è invertibile in tale intervallo.

Dimostrazione:

Caso in cui f sia strettamente crescente in $[a,b]$

Risulta che

$$f(a) < f(x) < f(b) \quad \forall x \in \,]a,b[$$

Quindi $f(a)$ è minimo della funzione in $[a,b]$ mentre $f(b)$ è massimo.

Per il teorema dei valori intermedi, f assume tutti i valori tra $f(a)$ e $f(b)$.

Cioè: $\forall y \in [f(a), f(b)]$ esiste un unico $x \in [a,b]$ t.c. $y = f(x)$. Tale x è unico.

Per assurdo, se esistessero due valori x_1 e x_2, $x_1 < x_2$ per cui $y = f(x_1) = f(x_2)$ allora dovrebbe risultare "$f(x_1) < f(x_2)$" dato che f è strett. crescente $\Rightarrow f$ invertibile

Ordine di un infinito

Dati due infiniti $f(x)$ e $g(x)$ per $x \to \alpha$, si dice che $f(x)$ è un infinito di ordine γ (con $\gamma > 0$) rispetto a $g(x)$ quando $f(x)$ è dello stesso ordine di $[g(x)]^\gamma$

cioè se si ha:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{[g(x)]^\gamma} = \ell \neq 0$$

Dati due infiniti $f(x)$ e $g(x)$, per $x \to \alpha$, essi si dicono equivalenti se

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

e si scrive $f \sim g$ e si legge f è asintoticamente equivalente a g.

Si dice che $g(x)$ è preso come infinitesimo campione

$$g(x) = \frac{1}{x - x_0} \quad \text{per } x \to x_0$$

$$g(x) = x \quad \text{per } x \to \pm\infty$$

Analogamente, dai due infinitesimi $f(x)$ e $g(x)$ per $x \to \alpha$ si dice che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine γ (con $\gamma > 0$) rispetto a $g(x)$, quando $f(x)$ è dello stesso ordine di $[g(x)]^\gamma$ cioè se si ha:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{[g(x)]^\gamma} = \ell \neq 0$$

Come infinitesimo campione si sceglie $g(x) = x - x_0$ se $x \to x_0$

$g(x) = \frac{1}{x}$ se $x \to \pm\infty$

$$\sin x \sim x$$

$$\log(1+x) \sim x$$

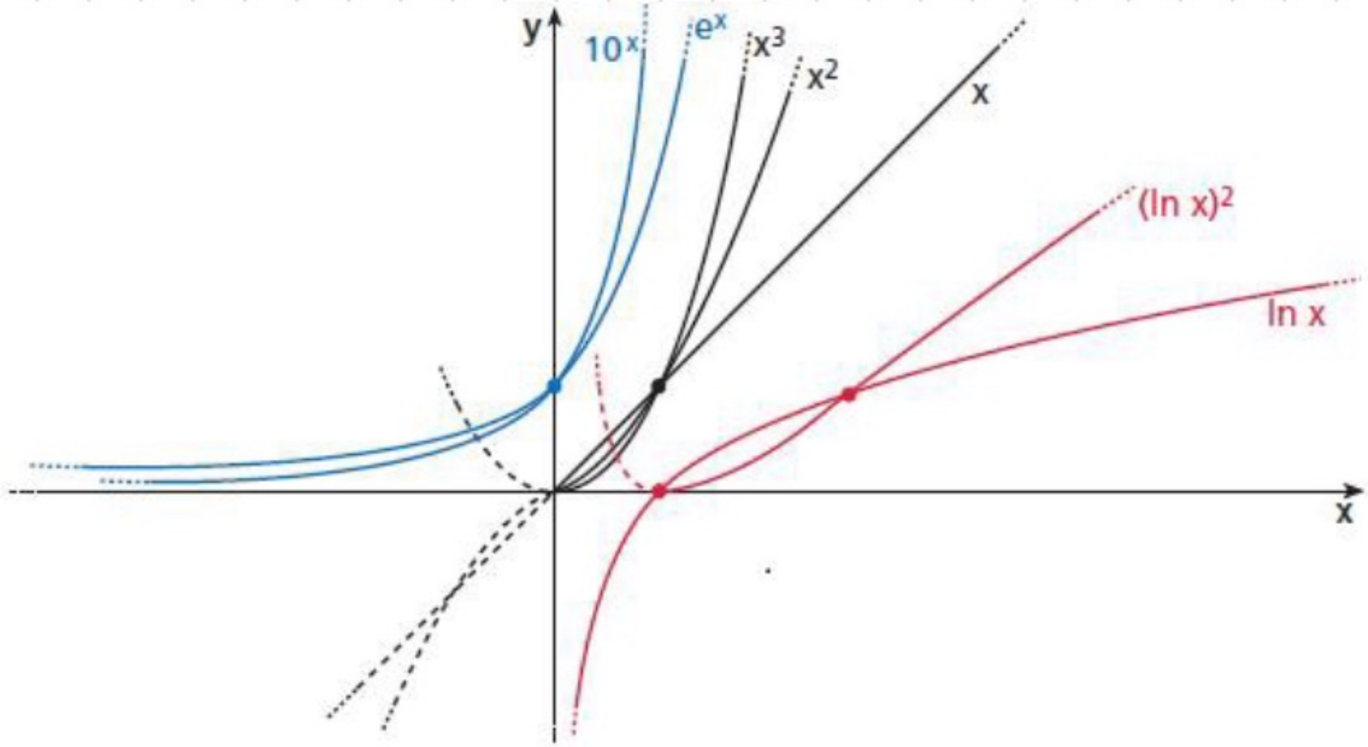
$$e^{x}-1 \sim x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+5x)}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\overset{1}{\frac{\log(1+5x)}{5x}} \cdot 5\cancel{x}}{\underset{1}{\frac{\sin 2x}{2x}} \cdot 2\cancel{x}} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+5x)}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{5\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{5}{2}$$

$$\log(1+5x) \sim 5x$$

$$\sin 2x \sim 2x$$



$$(\log_a x)^\alpha < x^\beta < b^x$$

Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x + \cancel{\sin^3 x} + \cancel{1 - \cos x}}{\cancel{\log(1+x^2)} + 3\sin x}$$

$2x$, $\sin^3 x$, $1-\cos x$ 3 infinitesimi

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x}{3\sin x} = \frac{2}{3}$$

Altre forme indeterminate

Se f e g sono due funzioni reali definite nel sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ con $f(x)$ positiva in tutto X entrambe dotate di limite nel punto x_0 di $\mathbb{R}$ si ha che

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{g(x) \log[f(x)]}$$

Tale limite esiste se e solo se esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \cdot \log[f(x)]$$

$$0^0 \qquad (+\infty)^0 \qquad 1^{\pm\infty}$$

$$\lim_{x \to x_0} \overset{0}{f(x)} \cdot \overset{\infty}{g(x)} \left(= 0 \cdot \infty \right) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \left(= \frac{0}{0} \right)$$

oppure

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \left(= \frac{\infty}{\infty} \right)$$

- $$\lim_{x\to 0}\left(1+\sin^3 x\right)^{\frac{1}{x^3}} \left(= 1^{\infty}\right) = e^{\lim\limits_{x\to 0} \overset{1}{\frac{\log\left(1+\overset{\sin^3 x}{\sin^3 x}\right)}{x^3}}} = e^{1}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^3}\log\left(1+\sin^3 x\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin^3 x)}{x^3}}$$

$$\lim_{x\to 0} \overset{1}{\frac{\log\left(1+\sin^3 x\right)}{x^3\cdot\sin^3 x}}\cdot\sin^3 x = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 = 1$$

- $$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\sqrt[5]{x}\right)^{\sin 4x} \left(= 0^{0}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} e^{\sin 4x \log\left(\operatorname{tg}\sqrt[5]{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} \overset{0}{\sin 4x}\,\overset{\infty}{\log\left(\operatorname{tg}\sqrt[5]{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} \overset{0}{\sin 4x}\,\log\big(\overset{\infty}{tg\sqrt[5]{x}}\big) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\overset{1}{\sin 4x}}{4x}\cdot 4x}{\log\left[\frac{tg\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x}}\,\sqrt[5]{x}\right]} \left(= \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4x}{\frac{1}{\log\sqrt[5]{x}}} = 0$$

Ris.: $e^{0} = 1$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x} \quad \left(= 1^{\infty} \right)$$

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x} = e}$$

N D

$$\begin{array}{r|l} x+3 & x-1 \\ \hline -(x-1) & 1 \; Q \\ = \; 4 & \\ R & \end{array}$$

N.B

$$\frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D}$$

$$\frac{x+3}{x-1} = 1 + \frac{4}{x-1}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1} \right)^{x}$$

$$x - 1 = 4t$$

$$\lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}t} \right)^{4t+1} = \lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{4t+1}$$

$$\lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{4t+1} = \lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{4t} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{1}}_{1}$$

$$\lim_{t \to \infty} \Bigg[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t}}_{e}\Bigg]^{4} = e^{4}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+4}{x-1}\right)^{x}$$