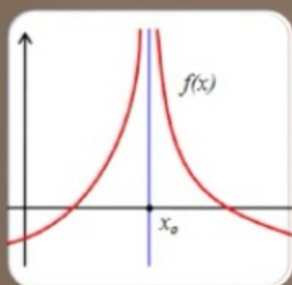
Lezione del 21.11.2023

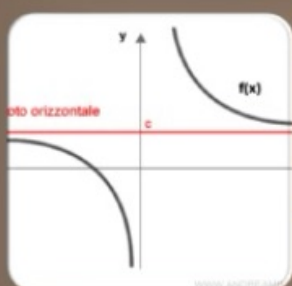
Schema riepilogativo: ASINTOTI

Asintoti verticali



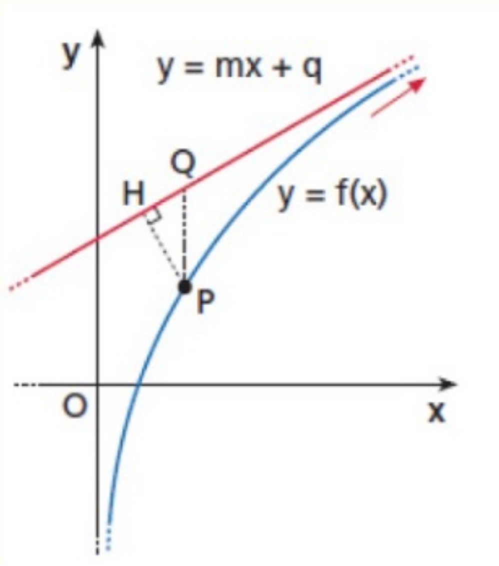
- Se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale sinistro per la funzione.
- Se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale destro per la funzione.
- Se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale completo per la funzione

Asintoti orizzontali



- Se $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ la retta y=l è un asintoto orizzontale sinistro per la funzione.
- Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ la retta y=l è un asintoto orizzontale destro per la funzione.
- Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ la retta y=l è un asintoto orizzontale completo per la funzione

Calcolo dell'eventuale asintoto obliquo.



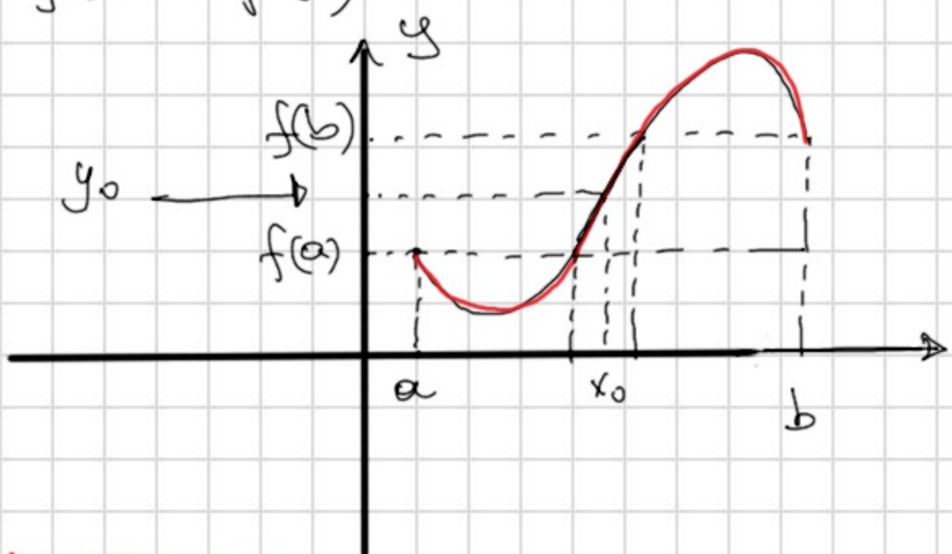
Data la funzione y=f(x), se si verifica che

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(mx+q)]=0$$

si dice che la retta $y=mx+q$ è un asintoto obliquo per il grafico della funzione.
Dimostriamo che la distanza di un generico punto P del grafico di una funzione da un suo asintoto obliquo tende a 0 quando x tende a infinito.
Infatti per la definizione di asintoto,
$\lim_{x\to\infty} PQ = \lim_{x\to\infty}[f(x)-(mx+q)]=0$
Ma poiché PQ ed HP sono rispettivamente ipotenusa e cateto del triangolo QHP, si ha:
PQ>PH>0
Per il teorema del confronto
$\lim_{x\to\infty} PH=0$

I teorema dei valori intermedi

Una funzione reale f continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ assume tutti i valori compresi fra $f(a)$ e $f(b)$



Dimostrazione: Consideriamo il caso in cui $f(a) \leq f(b)$
la tesi consiste nel provare che, qualunque sia
$y_0 \in [f(a); f(b)]$ $\exists\, x_0 \in [a, b]$ t.c. $f(x_0) = y_0$

$y_0 = f(a)$ si può porre $x_0 = a$

$y_0 = f(b)$ si può porre $x_0 = b$

$y_0 \in \left] f(a); f(b) \right[$ posso considerare la funzione ausiliaria

$$\boxed{f(x) - y_0 = g(x)} \quad \forall x \in [a,b]$$

Essendo $f(a) < y_0 < f(b)$ si ha

$$g(a) = f(a) - y_0 < 0$$

$$g(b) = f(b) - y_0 > 0$$

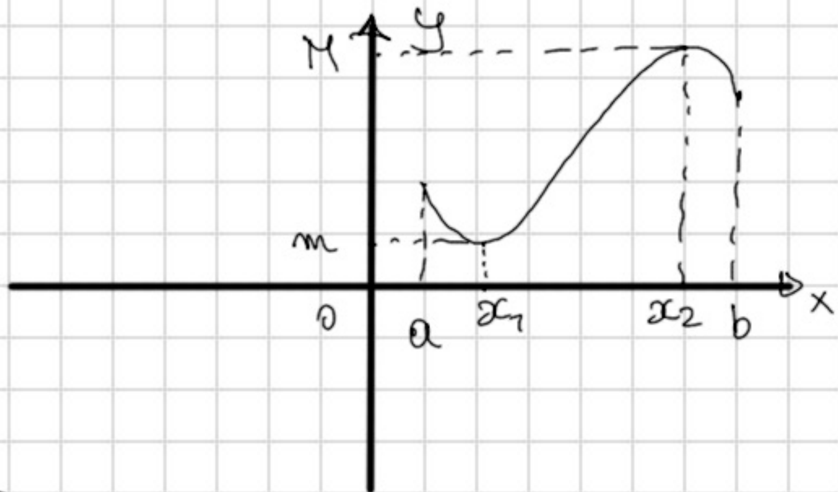
Per il teorema degli zeri $\exists\, x_0 \in (a,b)$ t.c.

$$g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - y_0 = 0$$

$$\Rightarrow f(x_0) = y_0 \qquad \text{c.v.d.}$$

Il teorema dei valori intermedi

Una funzione reale f continua in un intervallo [a, b] chiuso e limitato assume tutti i valori compresi fra il minimo e il massimo



Dimostrazione: Per il teorema di Weierstrass esistono il massimo M e il minimo m.

→ Dobbiamo provare che $\forall y_0 \in (m, M)$, $\exists x_0 \in [a, b]$ t. c. $f(x_0) = y_0$

Indico con x_1 e x_2 le ascisse dei punti di minimo, cioè tali che $f(x_1) = m$ e di massimo cioè tale che $f(x_2) = M$.

Considero la funzione ausiliaria $g(x) = f(x) - y_0$

Essendo

$$f(x_1) = m < y_0 < M = f(x_2)$$

Risulta che

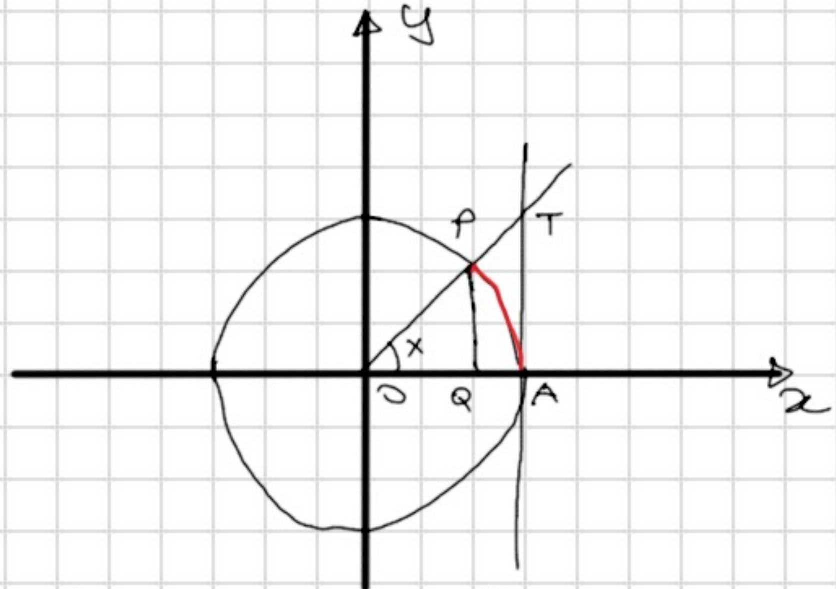
$$g(x_1) = f(x_1) - y_0 < 0$$
$$g(x_2) = f(x_2) - y_0 > 0$$

Per il teorema degli zeri, esiste un valore $x_0 \in]a, b[$ t.c. $g(x_0) = 0$ cioè tale $f(x_0) = y_0$ c.v.d.

LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Si consideri una circonferenza goniometrica



Poiché l'arco PA assume lo stesso valore dell'angolo al centro che lo sottende

$PQ = \sin x$

$TA = \operatorname{tg} x$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

$$\cancel{\frac{\sin x}{\sin x}}^{\,1} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$$

Divido tutti i membri per $\sin x$ e passando al reciproco ottengo

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\cancel{\sin x}}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cancel{\sin x}}$$

Passando al limite per x che tende a zero

$$\lim_{x \to 0} \cos x < \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$1 < \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\longrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{(1-\cos x)}{x^2} \cdot \frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2 (1+\cos x)}$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{x^2 (1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} =$$

$$= \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x}$$

Passando al limite

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{1} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

$\longrightarrow$ $$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$\longrightarrow$ $$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$\longrightarrow$ $$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$\lim_{f(x)\to 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$$

ES. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} 4\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right) = 4 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\text{PATATE})}{\text{PATATE}} = 1$$

ES. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{x^2} \; 1}{\frac{1-\cos x}{x^2} \; \frac{1}{2}} = 2$$

ES. $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+5x)}{e^{4x}-1}$ $\longrightarrow$ $\frac{\log(1+x)}{x} = 1$ $\longrightarrow$ $\frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\underbrace{\frac{\log(1+5x)}{5x}}_{1} \cdot 5\cancel{x}}{\underbrace{\frac{e^{4x}-1}{4x}}_{1} \cdot 4\cancel{x}} = \frac{5}{4}$$

ES. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin[\log(1+x)]}{x\,[\log(1+x)]} \cdot \log(1+x) = 1$ $\longrightarrow$ $\frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$

$$\underbrace{\frac{\sin[\log(1+x)]}{[\log(1+x)]}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\log(1+x)}{x}}_{1}$$

Created with Doceri

ES. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{2^x - 4^x}{\frac{\log(1+x)}{x^2}\, tg x \cdot x^2}$

$\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{2^x - 4^x - 1 + 1}{\underbrace{\frac{\log(1+x)}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{tg x}{x}}_{1} \cdot x^2}$ $\qquad \displaystyle \frac{a^x - 1}{x} = \log a$

$\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1 - (4^x - 1)}{x} \cdot \frac{1}{x}$

$\displaystyle \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{2^x - 1}{x}}_{\log 2} - \underbrace{\frac{(4^x - 1)}{x}}_{\log 4} \cdot \frac{1}{x} = \infty$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+\operatorname{tg}(3\sin x)}-1}{\operatorname{tg}[\log(1+x)]}$$

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\frac{[1+\operatorname{tg}(3\sin x)]^{1/4}-1}{\operatorname{tg}(3\sin x)}}^{\frac{1}{4}} \cdot \overbrace{\frac{\operatorname{tg}(3\sin x)}{3\sin x}}^{1} \; 3\sin x}{\underbrace{\frac{\operatorname{tg}[\log(1+x)]}{\log(1+x)}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\log(1+x)}{x}}_{1} \; x}$$

$$\sqrt[4]{1+\operatorname{tg}(3\sin x)}-1$$

$$[1+\operatorname{tg}(3\sin x)]^{1/4}-1$$

$$= \frac{3}{4}$$

PUNTI DI DISCONTINUITÀ

Siano f una funzione reale di una variabile reale definita nel sottoinsieme X di $\mathbb{R}$, x_0 un punto di X per esso di accumulazione.

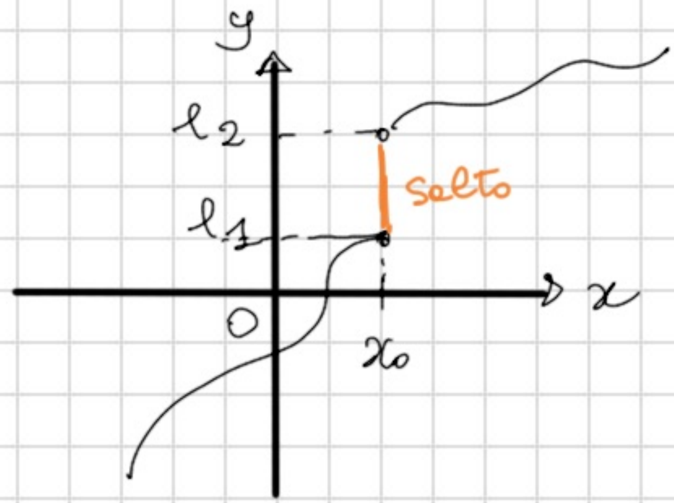
Se f non è continua in x_0, si dice DISCONTINUA nel punto x_0 oppure che presenta una discontinuità in x_0 e tale punto si dice di discontinuità per f.

DISCONTINUITÀ DI I SPECIE (a salto)

Si ha una discontinuità di I specie se, essendo x_0 di accumulazione per X a sinistra e a destra, esistono e sono entrambi finiti

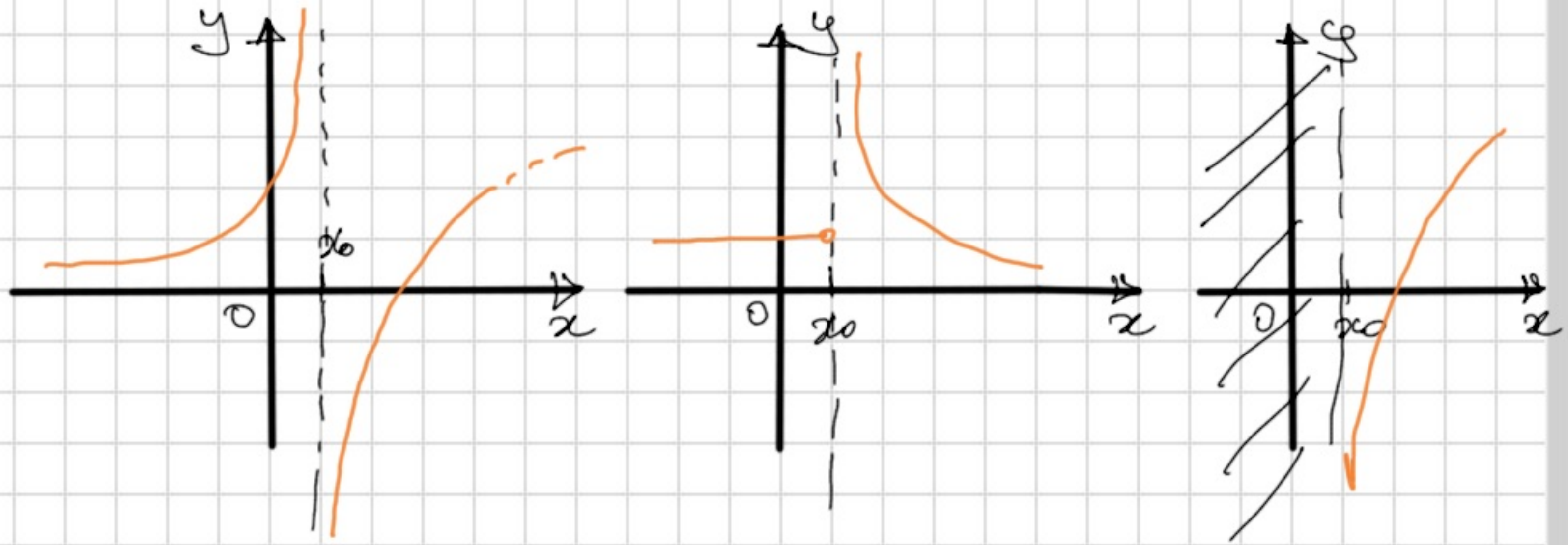
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2$$

con $\ell_1 \neq \ell_2$ la differenza $|\ell_1 - \ell_2|$ si chiama SALTO


y
l_2
salto
l_1
x
O
x_0

Discontinuità di II specie

Si ha quando almeno uno dei due limiti o non esiste oppure è infinito



Discontinuità di III specie

Si ha se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$