Prof. Roberto Capone

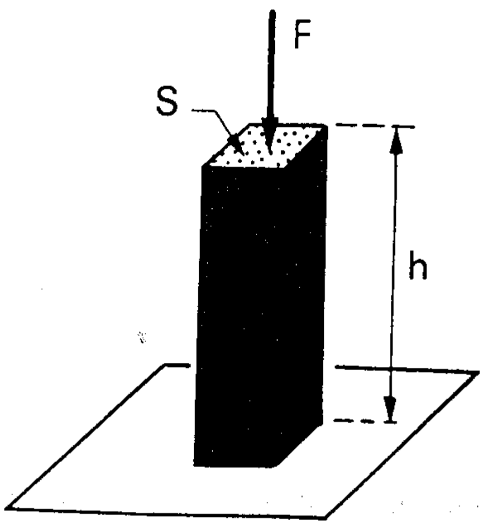
Università degli Studi del Molise

Dinamica del punto materiale

Corso di Complementi di Fisica 2014/2015

Corso di laurea in Ingegneria edile

Le forze elastiche



Molti oggetti solidi appaiono indeformabili (corpi rigidi). Nella realtà anche gli oggetti solidi subiscono delle deformazioni più o meno significative quando su di essi vengono esercitate delle forze.

Sull'oggetto in figura se esercitiamo una forza normale e distribuita sulla base stessa si riscontra sperimentalmente che la sua altezza h si accorcia. Sia Δh la viariazione di h. Una volta deformato, il corpo esercita a sua volta una forza f uguale ed opposta alla forza F che noi imprimimao.

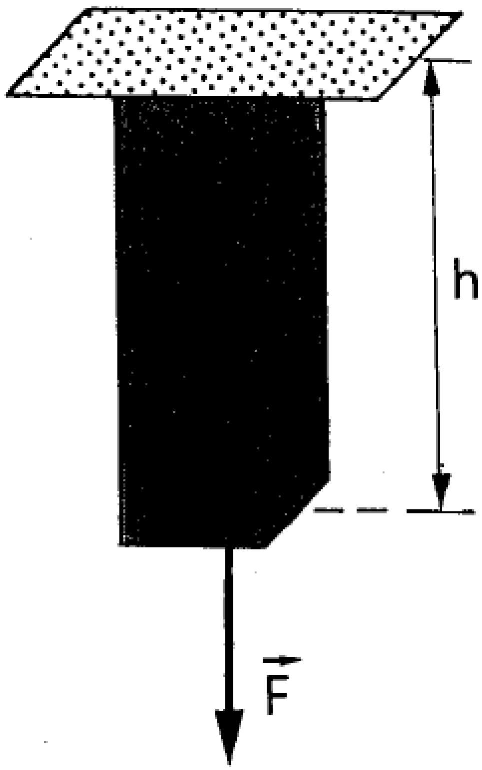
Fino a che l'intensità F della forza è tale che la deformazione Δh sia molto piccola rispetto all'altezza h, la deformazione si dirà reversibile: eliminando la forza, l'oggetto riassume la forma primitiva

La deformazione Δh risulta ben descritta dalla legge:

$$\Delta h = \frac{h}{E}\frac{F}{S}$$

Dove S è la superficie di base del campione e E è una costante caratteristica del materiale detta coefficiente di elasticità o modulo di Young

Le forze elastiche



Se un campione dello stesso materiale viene sollecitato a trazione anziché a compressione, esso si allunga.
Indicando con F_h la proiezione di F nella direzione di h, si può scrivere:

$$\Delta h = \frac{h}{E}\frac{F_h}{S}$$

che rappresenta la relazione che lega Δh alla proiezione della forza F_h esercitata sulla base del campione.
Tenuto conto che la forza f che il materiale esercita verso l'esterno è uguale ed opposta alla forza F che su di esso viene applicata, si ricava:

$$\begin{cases} f_h = -K\Delta h \\ con\ K = \dfrac{ES}{h} \end{cases}$$

La forza f_h longitudinale con cui il campione reagisce a un allungamento Δh è proporzionale e opposta in segno all'allungamento Δh stesso

Legge di Hooke

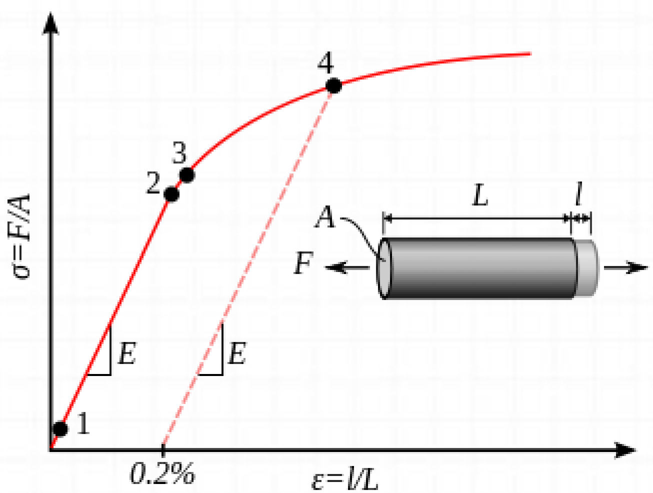
Le forze elastiche

Osservazioni:

- *La legge di Hooke vale fino a che F/S non supera un certo valore massimo L caratteristico del materiale in esame e che prende il nome di limite di elasticità*
- *Aumentando la forza pe runità di superficieF/S oltre il limite di elasticità, si raggiunge un valore per cui l'oggetto si rompe. Tale valore* C_R *prende il nome di carico di rottura e si misura anch'esso in* N/m^2.
- *La legge di Hooke vale solo fino a che la sollecitazione esercitata sul campione non ne modifica la forma geometrica. In particolare, se la superficie di base (sezione) del campione non è sufficientemente estesa, una forza di compressione tende a far piegare il campione: in questo caso la relazione fra F e* Δh *non è ovviamente descritta dalla legge di Hooke*

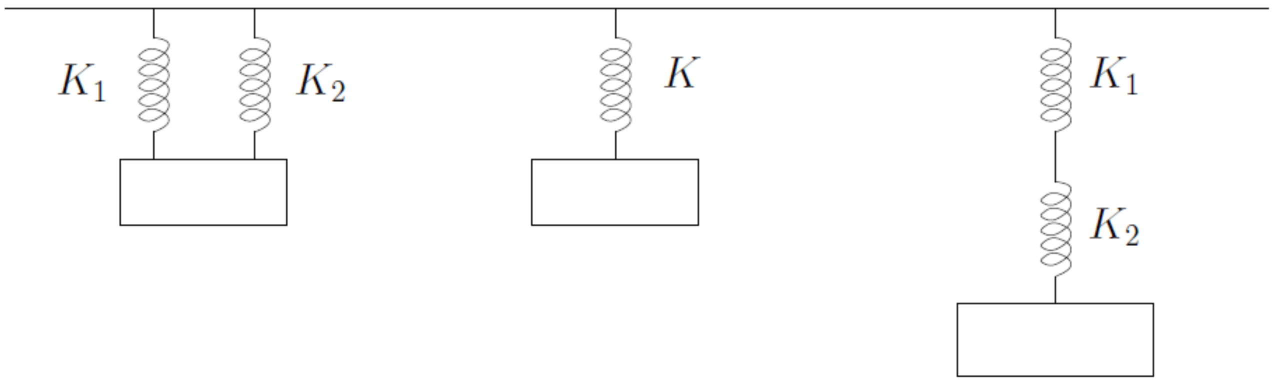
Le forze elastiche

La elasticità trova spiegazioni, a livello microscopico, nelle forze di interazione che agiscono tra le particelle che compongono il materiale. La variazione di tali forze (a causa della sollecitazione esterna) fa variare la distanza reciproca tra le particelle (producendo a livello macroscopico la deformazione del corpo). Per livelli relativamente bassi delle sollecitazioni, il lavoro meccanico necessario viene accumulato come energia meccanica all'interno del materiale, e viene rilasciato interamente al venir meno della causa sollecitante mentre le particelle ritornano alla loro posizione iniziale (il corpo acquista la sua forma originaria).



A partire dalla configurazione naturale di riposo, l'elasticità rappresenta solo la fase iniziale del comportamento di un materiale, per un valore limitato del livello di sollecitazione. Ogni materiale presenta infatti una soglia di sollecitazioni, detta *limite di elasticità*, al di sopra della quale cessa di esibire un comportamento elastico e manifesta fenomeni anelastici (plasticità, rottura, ecc.). Nel caso dei materiali duttili, il limite elastico è associato alla tensione di snervamento, nel caso di materiali fragili, il limite elastico è associato alla rottura del materiale.

Le forze elastiche



Nei sistemi rappresentati in Figura tutte le molle sono di lunghezza a riposo nulla e le masse sono identiche. Per quale valore di K il sistema al centro oscilla alla stessa frequenza di quello a sinistra? E per quale alla stessa frequenza di quello a destra?
Consideriamo prima di tutto il sistema a sinistra. Possiamo scrivere:

$$F_1 = -k_1 x; \quad F_2 = -k_2 x$$

Perché la deformazione delle due molle è la stessa. Da questo segue che:

$$F = F_1 + F_2 = -(k_1 + k_2)x$$

e quindi

$$K = k_1 + k_2$$

Per il sistema di destra:

$$F = -k_1 x_1; \; F = -k_1 x_2$$

Da cui:

$$\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = -(x_1 + x_2) = -x \implies \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Le forze elastiche

La legge del moto di un punto materiale che si muove sottoposto all'azione di una forza elastica unidimensionale può essere ricavata a partire dal secondo principio della dinamica

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Si tratta di una equazione differenziale del secondo ordine. La sua soluzione è del tipo:

$$x = x_0 sin(\omega t + \varphi)$$

con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, mentre x_0 (elongazione massima) e φ (fase iniziale) vanno determinate a partire dalle condizioni iniziali.

Poiché l'oscillatore armonico è un sistema a un sol grado di libertà sottoposto a forze conservative, la sua legge poteva essere ricavata anche a partire dalla legge di conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2$$

Da cui, tenuto conto che $v = \frac{dx}{dt}$, si ha:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(x_0^2 - x^2)}$$

che si risolve separando le variabili e integrando.

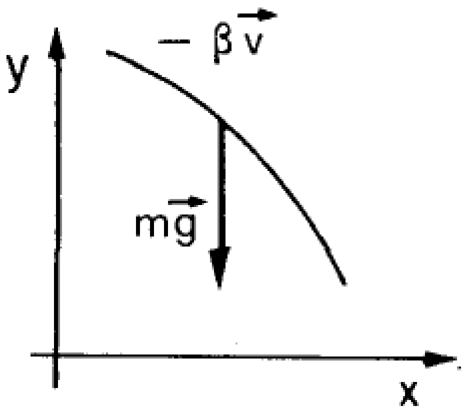
Forze viscose di resistenza del mezzo

Oggetti che si muovono in un fluido (l'aria, l'acqua, ecc) sono sottoposti all'azione frenante esercitata dal fluido stesso. Tale forza prende il nome di resistenza del mezzo.
Questa forza dipende dalle caratteristiche geometriche dell'oggetto, da alcuni parametri caratteristici del fluido (densità, viscosità, ecc.) e dalle condizioni di moto dell'oggetto relativamente al fluido.
Analizziamo il caso molto semplice che si presenta quando la forma dell'oggetto sia sufficientemente regolare e la sua velocità sufficientemente bassa perché gli spostamenti di fluido provocati dal passaggio dell'oggetto in movimento non sono accompagnati da alcun vortice (moto laminare)
Nel caso di moto laminare, la resistenza del mezzo è descritta dalla seguente espressione:

$$\bar{f} = -\beta\bar{v}$$

Si tratta di una forza non conservativa; tale forza ha sempre verso opposto alla velocità e dunque anche allo spostamento elementare; essa compie un lavoro negativo e tende a far diminuire l'energia meccanica del punto materiale in movimento

Forze viscose di resistenza del mezzo



L'equazione del moto $f = ma$, si scrive:

$$mg - \beta v = m\frac{dv}{dt}$$

Questa equazione deve essere proiettata lungo gli assi coordinati:

$$\begin{cases} -\beta v_x = m\dfrac{dv_x}{dt} \\ -mg - \beta v_y = m\dfrac{dv_y}{dt} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} v_x = -\dfrac{m}{\beta}\dfrac{dv_x}{dt} \\ \dfrac{mg}{\beta} + v_y = -\dfrac{m}{\beta}\dfrac{dv_y}{dt} \end{cases}$$

Si tratta di due equazioni differenziali disaccoppiate del tipo

$$a + v = -b\frac{dv}{dt}$$

Quest'ultima è un'equazione differenziale del primo ordine nella incognita v che può essere risolta per separazione di variabili

Forze viscose di resistenza del mezzo

Risolviamo l'equazione differenziale

$$a + v = -b\frac{dv}{dt}$$

Separiamo le variabili

$$\frac{dv}{a+v} = -\frac{dt}{b}$$

Integrando, otteniamo:

$$ln(a+v) = -\frac{t}{b} + cost$$

ovvero:

$$a + v = e^{-\frac{t}{b}+cot} = Ce^{-\frac{t}{b}}$$

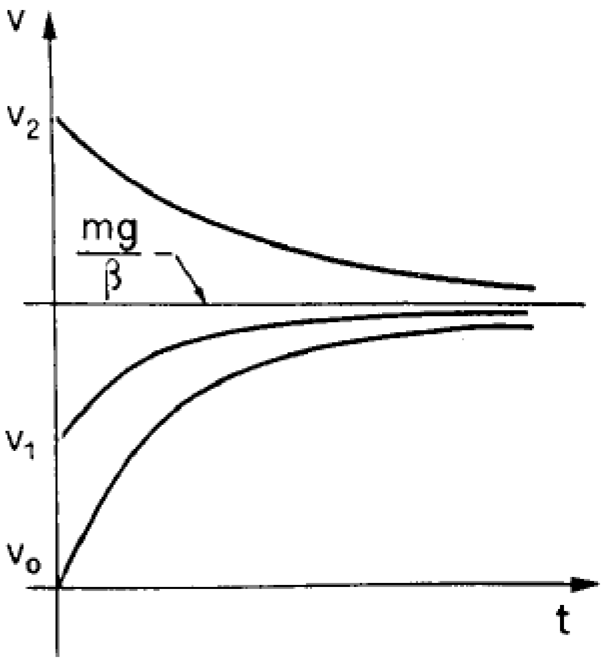
La costante di integrazione C può essere determinata conoscendo le condizioni iniziali, cioè il valore v_0 che la variabile v assume per t=0. Avendosi:

$$v(t) = (a + v_0)e^{-\frac{t}{b}} - a$$

In definitiva:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x}e^{-\frac{\beta}{m}t} \\ v_y = \left(\frac{mg}{\beta} + v_{0y}\right)e^{-\frac{\beta}{m}t} - \frac{mg}{\beta} \end{cases}$$

Forze viscose di resistenza del mezzo



Velocità limite in caduta libera

All'aumentare del tempo t la componente orizzontale della velocità diminuisce con legge esponenziale e tende a zero per t che tende a infinito.

Quanto alla componente verticale della velocità, qualunque sia il valore che la velocità iniziale assume per t=0, per t che tende a infinito essa tende a un valore asintotico $-\frac{mg}{\beta}$.

La velocità limite è negativa e il suo modulo è tanto più piccolo quanto più grande è il rapporto β/m: poiché, fissato il fluido, β dipende solo dalla forma dell'oggetto, la velocità limite di caduta libera di un oggetto di forma stabilita è tanto maggiore quanto più grande è la sua massa.

Fissata invece la massa, la velocità di caduta libera è tanto minore quanto più grande è β.

Il parametro β aumenta all'aumentare dell'area della sezione che l'oggetto in moto ha normalmente alla direzione del moto; questo è il motivo per cui un paracadute ha l'effetto di far diminuire notevolmente la velocità con cui un oggetto pesante cade liberamente

Moto oscillatorio smorzato

Consideriamo un oscillatore armonico lungo l'asse x. Per la presenza di una forza viscosa di resistenza del mezzo, si ha:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt}$$

ovvero:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Si tratta di una equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti. Essa ammette soluzione generale del tipo:

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}$$

dove A e B sono due costanti di integrazione determinabili attraverso le condizioni iniziali mentre α_1 e α_2 sono le soluzioni dell'equazione algebrica associata:

$$\alpha^2 + \frac{\beta}{m}\alpha + \frac{k}{m} = 0$$

.

per cui

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\Delta}$$

con

$$\gamma = \frac{\beta}{2m};\ \Delta = \frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}$$

Moto oscillatorio smorzato

Le caratteristiche del moto risultano diverse a seconda del segno di Δ

$\Delta < 0$ ovvero

$$\frac{k}{m} > \frac{\beta^2}{4m^2}$$

Ponendo

$$\omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}$$

Si ha:

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$$

Ottenendo:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}e^{i\omega t} + Be^{-\gamma t}e^{-i\omega t}$$

ricordando che

$$e^{\pm i\omega t} = cos\omega t \pm isin\omega t$$

si può scrivere: .

$$x(t) = e^{-\gamma t}[(A+B)cos\omega t + i(A-B)sin\omega t]$$

Ponendo

$$A + B = x_0 sin\varphi; i(A-B) = x_0 cos\varphi$$

si ha

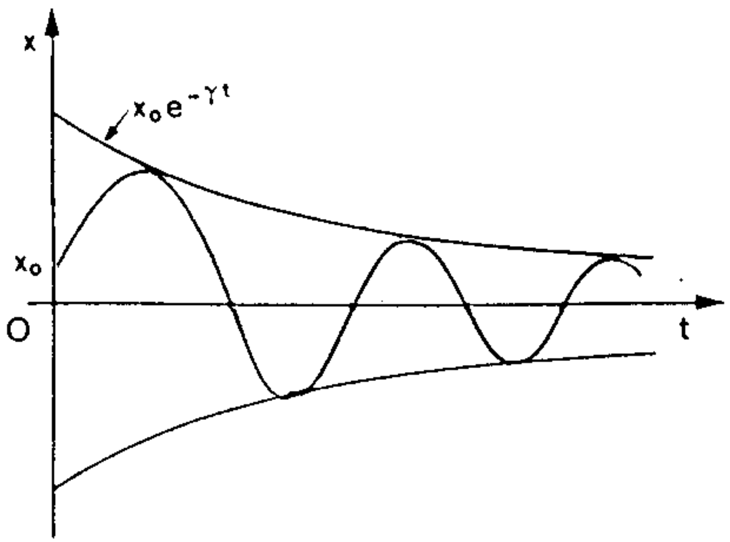
$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t}[cos\omega t sin\varphi + sin\omega t cos\varphi] = x_0 e^{-\gamma t} sin(\omega t + \varphi)$$

Moto oscillatorio smorzato

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} sin(\omega t + \varphi)$$

.con

$$\gamma = \frac{\beta}{2m};\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4km}}$$



Si vede che l'attrito riduce la pulsazione rispetto al caso di oscillatore libero. L'equazione scritta rappresenta una sinusoide di ampiezza $x_0 e^{-\gamma t}$ cioè di ampiezza che decresce esponenzialmente col tempo.

Nel caso di piccolo smorzamento, cioè per

$$\frac{\beta^2}{4km} \ll 1$$

si può scrivere

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Moto oscillatorio smorzato

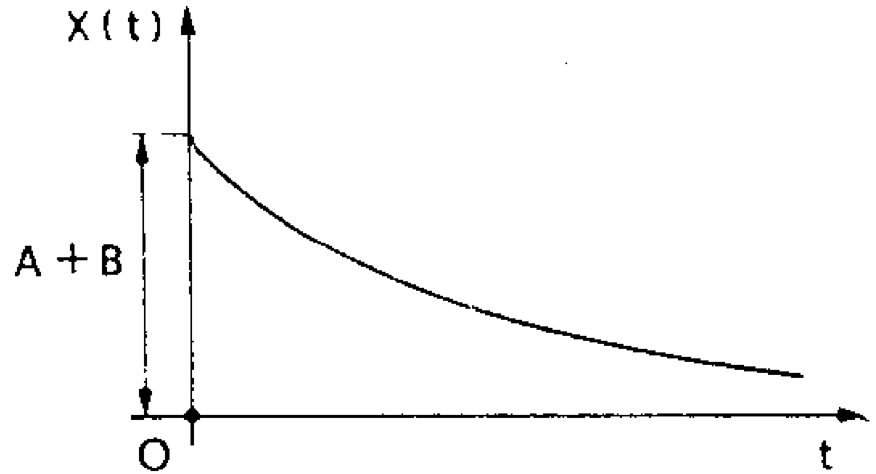
Caso di $\Delta > 0$

$$\frac{k}{m} < \frac{\beta^2}{4m^2}$$

In questo caso le due radici sono reali e negative e si avrà:

$$x(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t}$$

La forza di resistenza viscosa domina completamente il moto portandolo a smorzarsi prima che abbia modo di avvenire anche una sola oscillazione



Moto oscillatorio smorzato

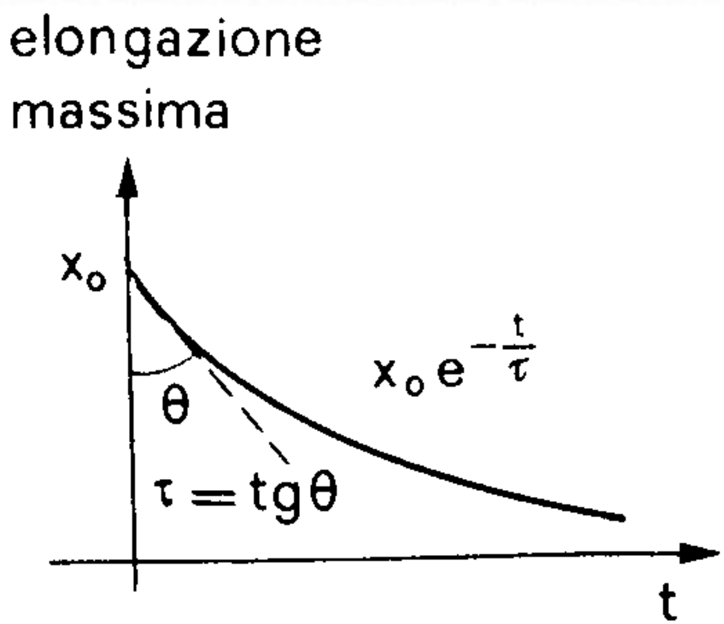
Caso di $\Delta = 0$

$$\frac{k}{m} = \frac{\beta^2}{4m^2}$$

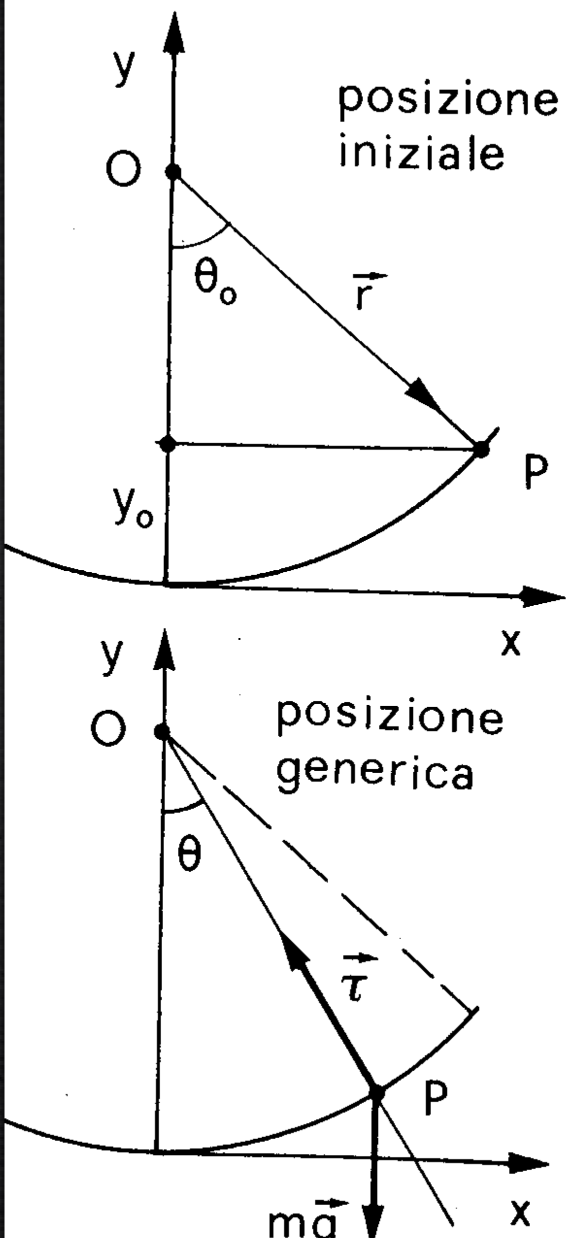
In questo caso le due radici sono reali e coincidenti ed entrambe negative; si avrà:

$$\alpha_{1,2} = -\gamma$$

$$x(t) = (a + bt)e^{-\gamma t}$$



Il moto di un pendolo



Un pendolo semplice di lunghezza r viene abbandonato da fermo in posizione formante un angolo θ_0 con la verticale. Determinare la reazione vincolare in funzione della posizione del pendolo

Il pendolo compie un moto piano per cui l'equazione del moto è:

$$\bar{\tau} + m\bar{g} = m\bar{a}$$

Proiettata sugli assi si riduce a due sole equazioni scalari:

$$\begin{cases} \tau_x = ma_x \\ \tau_y - mg = ma_y \end{cases}$$

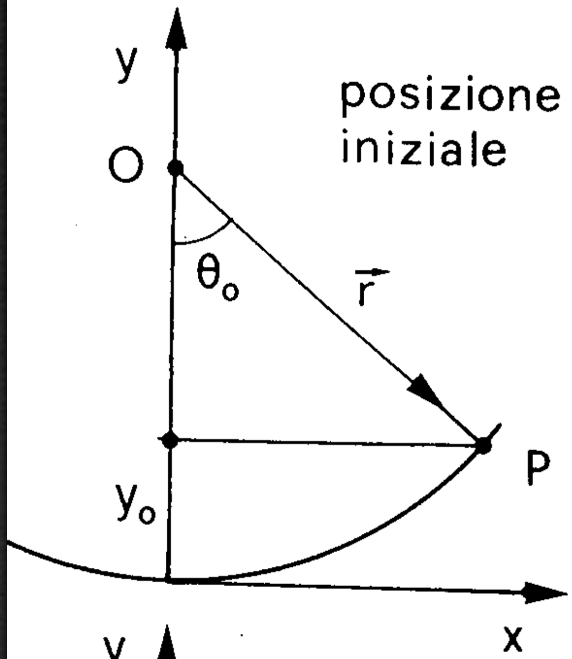
Il vincolo che costringe il punto a compiere una traiettoria circolare si può esprimere in funzione dell'unico parametro θ:

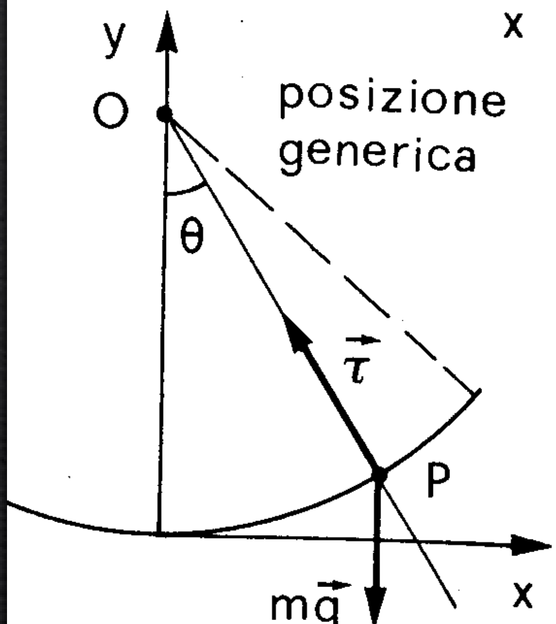
$$\begin{cases} x = rsin\theta \\ y = r - rcos\theta = r(1 - cos\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = rcos\theta \\ v_y = rsin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = -rsin\theta \\ a_y = rcos\theta \end{cases}$$

Il moto di un pendolo





Lo stesso problema può essere risolto ricorrendo alla conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = E = mgy_0$$

Da cui:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(y_0 - y) = mgr(cos\theta - cos\theta_0)$$

Proiettando sul raggio r, si ha:

$$-\tau + mgcos\theta = ma_r$$

dove $a_r = -v^2/r$ è l'accelerazione radiale:

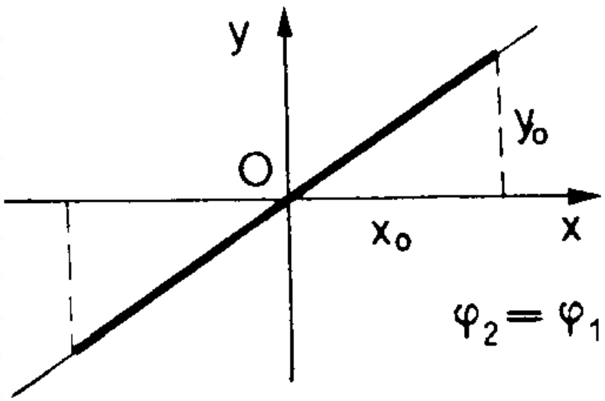
$$ma_r = 2mg(cos\theta - cos\theta_0)$$

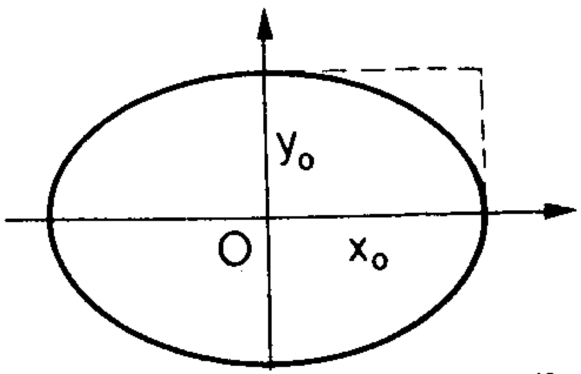
$$-\tau + mgcos\theta = -2mg(cos\theta - cos\theta_0)$$

Da cui, infine:

$$\tau = mg(3cos\theta - 2cos\theta_0)$$

Oscillatore in due dimensioni





Consideriamo un punto materiale mobile su un piano sotto l'azione di una forza elastica $\bar{f} = -k\bar{r}$.
L'equazione

$$\bar{f} = -k\bar{r} = \mathrm{m}\bar{a} = m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

che proiettata sugli assi, diviene:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

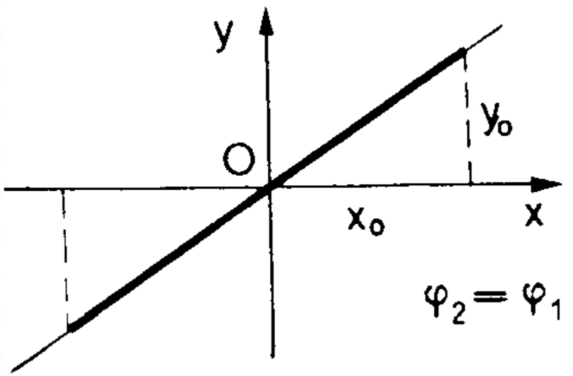
$$\begin{cases} x = x_0 sin(\omega t + \varphi_1) \\ y = y_0 sin(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

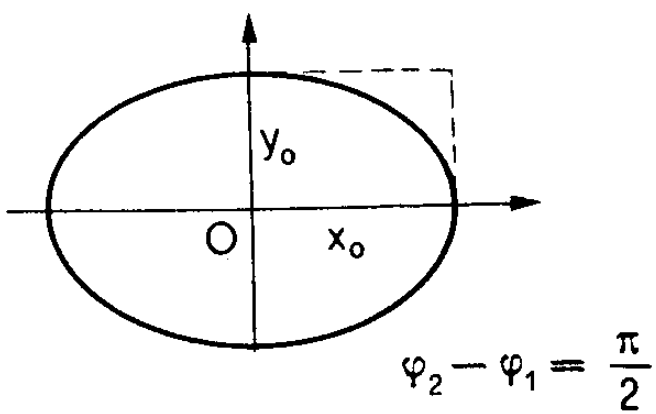
Nel caso in cui $\varphi_1 = \varphi_2$ facendo il rapporto membro a membro, si ha:

$$\frac{x}{y} = \frac{x_0}{y_0}$$

In questo caso la traiettoria compiuta è rettilinea e su di esso il punto si muove con ampiezza L_0 e pulsazione ω

Oscillatore in due dimensioni





Se $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$ allora si ottiene una equazione del tipo

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1$$

Questa rappresenta l'equazione di una ellisse che viene percorsa dal punto con pulsazione ω. L'ellisse si riduce ad un cerchio nel caso particolare in cui $x_0 = y_0$

Oscillatore forzato

L'oscillator forzato è costituito da un punto materiale di massa m sottoposto ad una forza elastica – kx e a una forza di smorzamento viscoso $-\beta\dot{x}$ sollecitato in più da una forza di tipo sinusoidale del tip $f = Fsin\omega_0 t$ parallela all'asse x su cui il moto avviene; cosicchè l'equazione del moto diviene:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = Fsin\omega_0 t$$

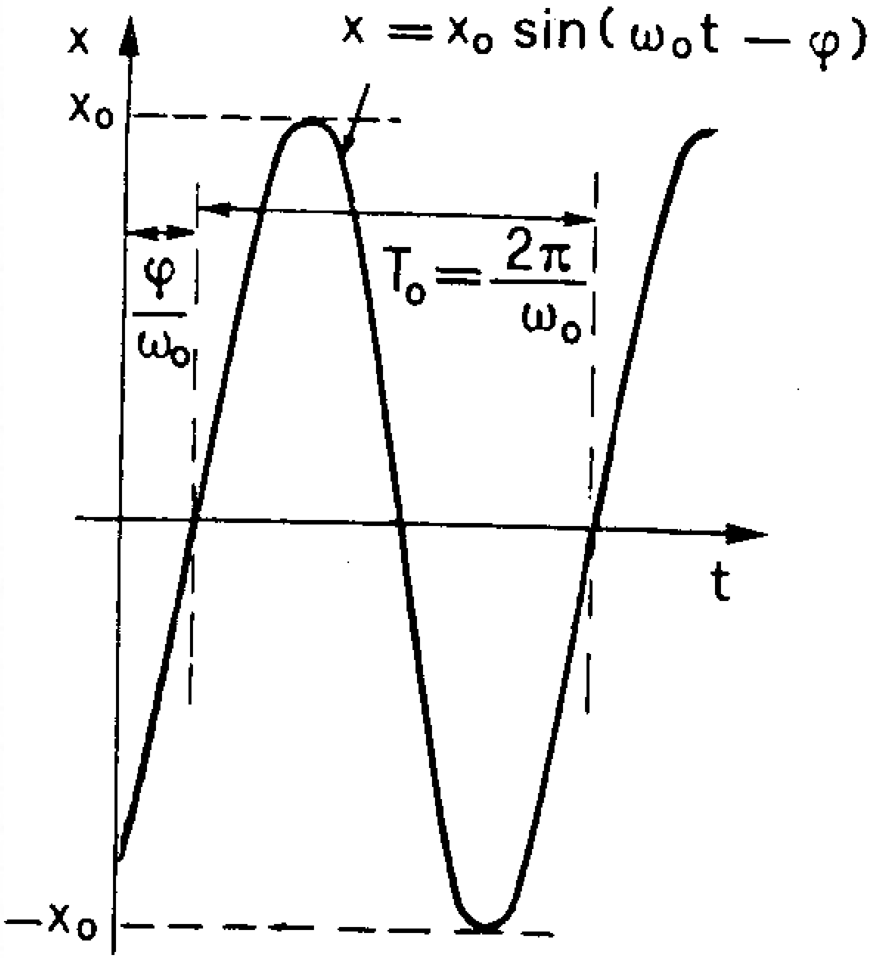
Si tratta di una equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea (per la presenza del termine noto).
La soluzione è data dalla somma di due termini rappresentati rispettivamente dalla soluzione generale della equazione lineare omogenea associata e da una soluzione particolare della equazione non omogenea.
Tale soluzione è del tipo:

.

$$x = x_0 sin(\omega_0 t - \varphi)$$

dove l'ampiezza x_0 e φ non sono costanti arbitratie ma possono essere ricavate con relativa semplicità

Oscillatore forzato

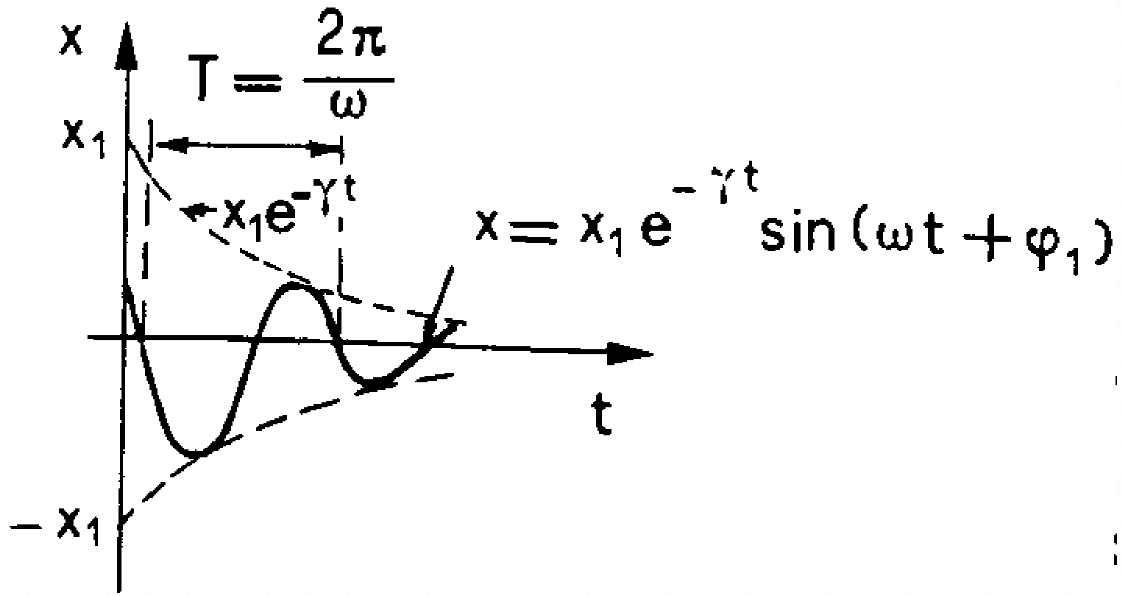


$$
\begin{cases}
x_0 = \dfrac{F/m}{\sqrt{\left(\dfrac{k}{m} - \omega_0^2\right)^2 + \dfrac{\beta^2\omega_0^2}{m^2}}} \\
\varphi = arctg\left(\dfrac{\dfrac{\beta}{m}\omega_0}{\dfrac{k}{m} - \omega_0^2}\right)
\end{cases}
$$

In deinitiva, la soluzione generale ha la forma:

$$x(t) = x_1 e^{-\gamma t} sin(\omega t + \varphi_1) + x_0 sin(\omega_0 t - \varphi)$$

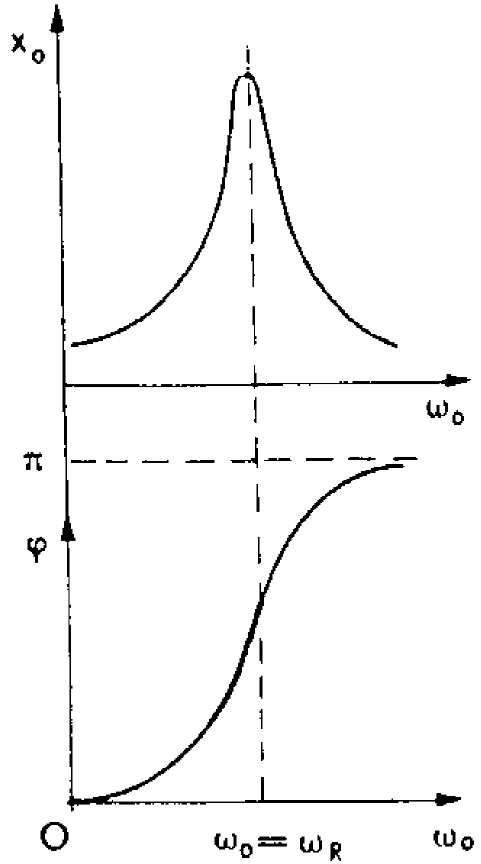
Oscillatore forzato



Poiché il primo termine ha ampiezza che decade esponenzialmente nel tempo, il suo contributo è presente solo durante un lasso di tempo transitorio iniziale: quando col passare del tempo, l'esponente supera alcune unità, la soluzione si riduce al solo termine forzato.

L'ampiezza e la fase della oscillazione forzata dipendono dalle caratteristiche dell'oscillatore libero, dalle caratteristiche della forza sinusoidale applicata e in particolare dalla sua pulsazione ω_0.

Oscillatore forzato



Condizioni di risonanza

Al variare di ω_0 l'ampiezza della oscillazione e la sua fase variano così come mostrato in figura.

Derivando ed uguagliando a zero, si verifica che il massimo della ampiezza si realizza quando la pulsazione ω_0 della forza assume il valore:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{2m^2}}$$

Si dice allora che ci si trova in condizioni di risonanza e la pulsazione corrispondente è detta pulsazione di risonanza