NOTA 1.
Cantor, l'infinito e la dottrina Cristiana

E' da notare che le motivazioni filosofiche di Cantor erano strettamente intrecciate a quelle religiose. La cosa non deve sorprendere poiché sono tali motivazioni alla base dei primi esempi di accettazione dell'infinito attuale nella cultura occidentale. Era infatti convincimento comune nel medioevo che Dio fosse infinito.

> *Appunto perché è uno, Egli non rientra né in una misura né in un numero. Così Egli non incontra il confine né in altrui né in se stesso, che, in tal caso, Egli cadrebbe già nella dualità.* (Plotino, Enneadi).

Era semmai oggetto di discussione se Dio potesse concepire entità infinite poiché in tale caso si dovrebbero accettare entità infinite diverse da Dio. A tale proposito ad esempio l'opinione di San Tommaso era che l'unico infinito fosse Dio.

> *Quindi, come Dio, nonostante abbia potenza infinita, tuttavia non può creare qualcosa di increato (il che sarebbe far coesistere cose contraddittorie), così non può creare cosa alcuna che sia assolutamente infinita.* (S. Tommaso, Summa Teologica).

In altre parole, se si vede che il concetto di infinito attuale è contraddittorio allora Dio non può pensarlo perché Dio, in un certo senso, rispetta la logica.

Invece l'opinione di Sant'Agostino era non solo che Dio fosse infinito ma anche che potesse avere come oggetto del suo pensiero un altro infinito, ad esempio "il tutto del numero" cioè l'intera totalità degli interi.

> *Riguardo poi all'altra loro teoria che neanche con la scienza di Dio può essere rappresentato l'infinito, rimane loro che osino affermare, immergendosi nell'abisso profondo della irreligiosità, che Dio non conosce il tutto del numero . . . Non lo potrebbe dire neanche il più insensato . . . Che razza di omucci siamo noi che pretendiamo di porre limiti alla sua scienza?* (Agostino, La città di Dio)

Tornando a Cantor ed alle sue motivazioni religiose, ad esempio in una lettera del 1890 a padre Thomas Esser egli scrive:

> *Viene da me offerta alla filosofia cristiana per la prima volta la vera dottrina dell'infinito nei suoi principi. So con piena sicurezza e determinazione che essa accoglierà questa dottrina: è soltanto da vedere se ciò accadrà già adesso o soltanto dopo la mia morte.*

Da notare che Cantor distingue tre tipi di infinito. Il primo, legato all'idea di Dio, il secondo di natura fisica (il tempo, lo spazio), il terzo di natura matematica.

> *L'infinito attuale si presenta in tre contesti: il primo è quello in cui si presenta nella forma più completa, in un essere completamente indipendente trascendente questo mondo, "in Deo", ed è questo che io chiamo l'Infinito Assoluto o semplicemente l'Assoluto; il secondo quando si presenta nel mondo contigente, nel creato; il terzo è quando la mente lo afferra "in abstracto", come grandezza matematica, numero o tipo d'ordine. Voglio sottolineare chiaramente la differenza tra l'Assoluto e quello che io chiamo il Transfinito, cioè l'infinito attuale degli ultimi due tipi, perché si tratta di oggetti evidentemente limitati, suscettibili di accrescimento, e quindi collegati al finito.*

NOTA 2.
La definizione di Emily di infinito

Ecco un'implicita definizione di infinito data nel 1893 dalla poetessa Emilly Dickinson (traduzione di Margherita Guidacci nel volume edito da Mondadori).

Come se il mare separandosi
svelasse un altro mare,
questo un altro, ed i tre
solo il presagio fossero

d'un infinito di mari
non visitati da riva –
il mare stesso al mare fosse riva-
questo è l'eternità.

Emily Dickinson

L'originale è

As if the Sea should part
And show a further Sea –
And that – a further – and the Three
But a Presumption be –

Of Periods of Seas –
Unvisited of Shores –
Themselves the Verge of Seas to be –
Eternity – is Those –

NOTA 3.
Un modo diverso di quozientare una struttura

Nel paragrafo 1 abbiamo visto che i numeri relativi ed i numeri razionali si possono ottenere sostituendo alle classi le forme normali che le rappresentano. Questo modo di procedere è molto generale ed in un certo senso può sostituire l'usuale definizione di quoziente di una struttura algebrica A modulo una data congruenza $\equiv$. Il modo di procedere è il seguente. Si considera una *funzione di scelta* $f : A/\equiv \to A$ cioè una funzione f tale che $f([x])\in[x]$ per ogni classe di equivalenza $[x]$. In un certo senso $f([x])$ è l'elemento scelto per rappresentare la classe $[x]$. Gli elementi scelti si dicono in *forma normale* ed indichiamo con $A^{\equiv}$ la classe degli elementi in forma normale. Se $x \in A$ poniamo $f^*(x) = f([x])$ e diciamo che $f^*(x)$ è la *forma normale* di x e che il calcolo di $f^*(x)$ è una *riduzione a forma normale di x*.[25]

[25] L'assioma della scelta ci assicura che questo modo di procedere è generale. Tuttavia, se vogliamo che le operazioni siano effettivamente cal-