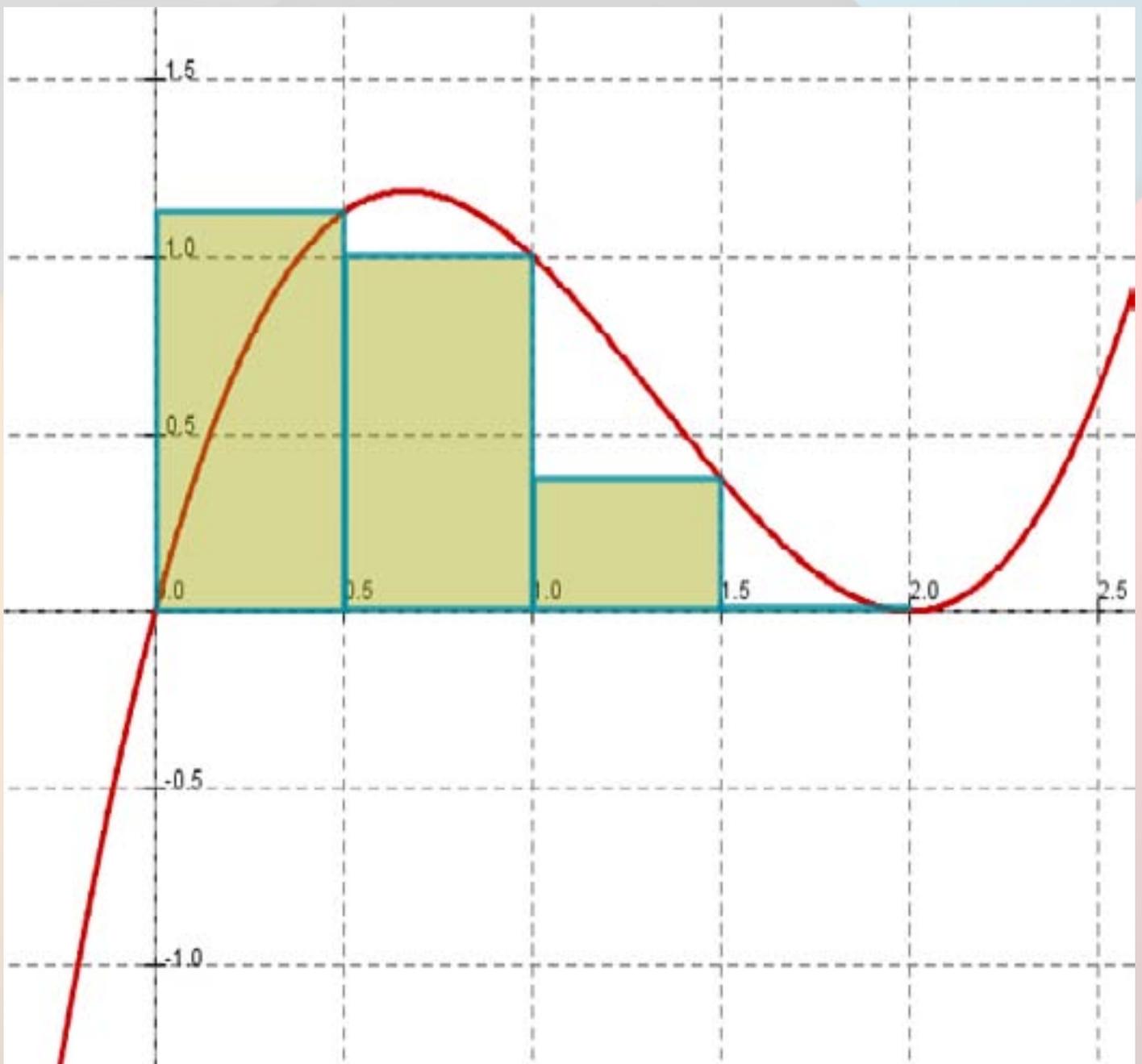
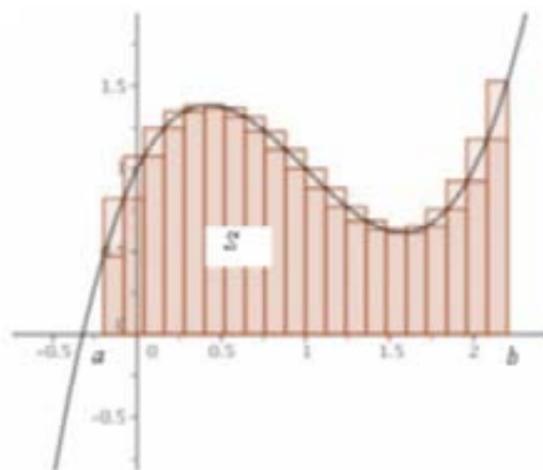


# Gli integrali



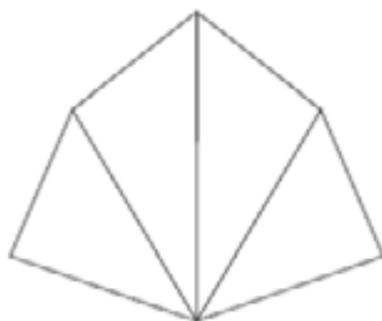
# 1. Introduzione

Le applicazioni del calcolo integrale sono svariate: esistono, infatti, molti campi, dalla fisica alla ingegneria, dalla biologia alla economia, in cui tali nozioni trovano non poche applicazioni. Per fornire l'idea intuitiva del concetto cardine del calcolo differenziale, ossia la derivata, abbiamo introdotto il problema della tangente; allo stesso modo, per presentare l'idea di integrale tratteremo il problema del calcolo dell'area. Si immagini di dover calcolare l'area della regione  $S$  sottostante la curva  $y = f(x)$  da  $a$  a  $b$ , rappresentata in figura.



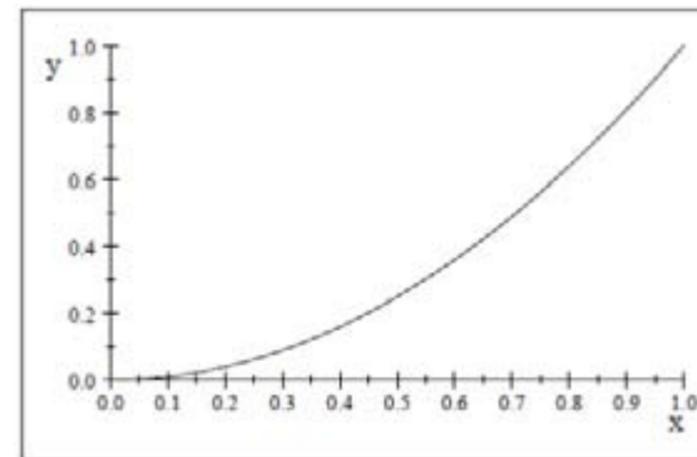
Come si evince dalla precedente figura  $S$  rappresenta la regione compresa tra il grafico della funzione  $f$  e le rette verticali  $x = a$  e  $x = b$ :

Nel tentativo di calcolare l'area della regione  $S$ , ci domandiamo: qual è il significato della parola area? La domanda è semplice per regioni con i lati rettilinei; ad esempio per un rettangolo l'area è semplicemente il prodotto della base per l'altezza. Per un poligono, l'area si trova suddividendolo in triangoli, come in figura, e sommando l'area dei triangoli così ottenuti.

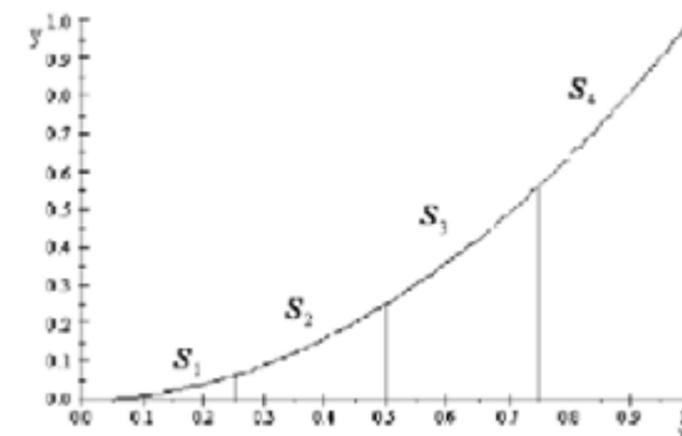


Invece, non è affatto semplice trovare l'area di regioni delimitate da contorni curvilinei.

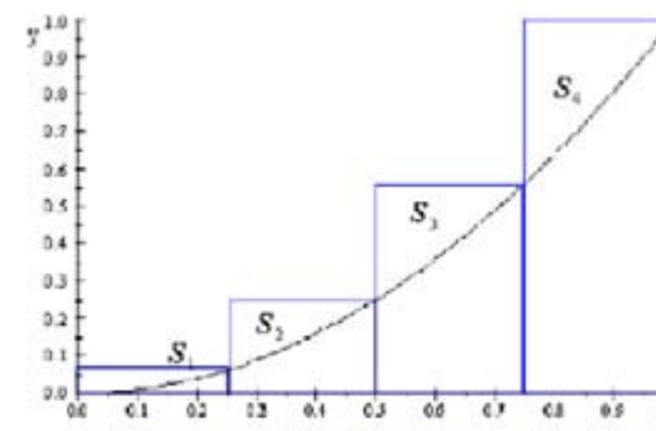
Illustriamo l'idea nell'esempio seguente: sia  $y = x^2$  la parabola rappresentata in Figura; supponiamo di voler calcolare l'area della regione sottostante la curva delimitata dalle rette  $x = 0$  e  $x = 1$ , utilizzando dei rettangoli.



Si noti subito che essendo  $S$  la regione sottostante il grafico e delimitata dalle rette  $x = 0$  e  $x = 1$ , ammetterà area compresa tra 0 e 1; a tale risultato si poteva anche giungere immaginando di racchiudere  $S$  in un quadrato di lato 1; a partire da tale riflessione, cerchiamo una stima migliore. Supponiamo di dividere  $S$  in quattro strisce  $S_1$ ;  $S_2$ ;  $S_3$ ; ed  $S_4$  disegnando le rette verticali  $x=1/4$ ;  $x=1/2$ ; e  $x=3/4$  come in Figura

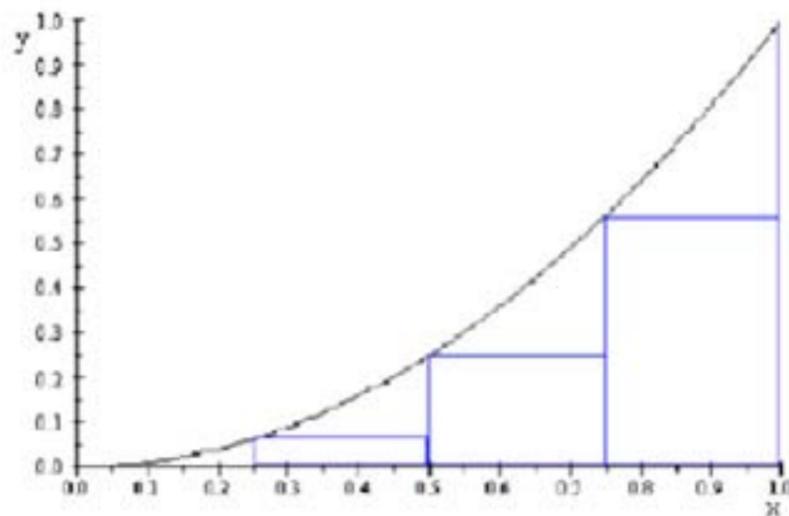


Possiamo approssimare ogni striscia con un rettangolo avente la stessa base della striscia e altezza pari al lato destro della striscia, così come mostrato in Figura.



In altre parole, le altezze di questi rettangoli sono i valori della funzione  $f(x) = x^2$  nell'estremo destro dei sotto intervalli  $[0; 1/4]$ ;  $[1/4; 1/2]$ ;  $[1/2; 3/4]$  e  $[3/4; 1]$ :

Ogni rettangolo ha base  $1/4$  e le altezze sono  $(1/4)^2, (1/2)^2, (3/4)^2$  e  $1$ . Se indichiamo con  $R_4$  la somma delle aree di questi rettangoli approssimati, otteniamo  $R_4=0,46875$ . Ma dalla figura è chiaro che l'area  $A$  di  $S$  è minore di  $R_4$  e dunque  $A < 0,46875$ . Se, invece di usare questo tipo di approssimazione, ne usassimo un'altra caratterizzata da rettangoli le cui altezze sono i valori di  $f$  nell'estremo sinistro dei sotto intervalli, come mostrato in figura

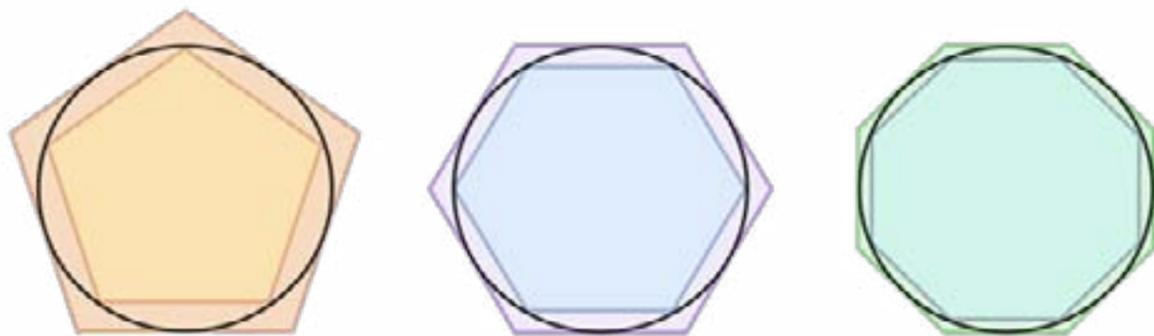


L'area del cerchio è determinata costruendo una successione di poligoni che assomigliano sempre di più al cerchio. Ad esempio, una successione di poligoni regolari con numero crescente di lati: in figura, un pentagono, un esagono e un ottagon. A seconda che si scelgano poligoni iscritti o circoscritti nella circonferenza, l'area di questa risulterà essere approssimata inferiormente o superiormente. Entrambe le scelte portano comunque al limite all'area del cerchio.

La somma delle aree di questi rettangoli approssimanti è  $L_4=0,21875$ ; inoltre, essendo l'area di  $S$  maggiore di  $L_4$  otteniamo una stima per difetto ed una per eccesso di  $A$ :  $0,21875 < A < 0,46875$ .

Ripetendo questa procedura con un numero maggiore di strisce, si ottiene una stima sempre migliore di  $A$ .

L'idea di base del concetto di integrale era nota ad Archimede di Siracusa, vissuto tra il 287 ed il 212 a.C., ed era contenuta nel metodo da lui usato per il calcolo dell'area del cerchio o del segmento di parabola, detto metodo di esaustione.



Nel XVII secolo alcuni matematici trovarono altri metodi per calcolare l'area sottesa al grafico di semplici funzioni, e tra di essi figurano ad esempio Fermat (1636) e Nicolaus Mercator (1668).

Nel diciassettesimo e diciottesimo secolo Newton, Leibniz, Johann Bernoulli scoprirono indipendentemente il teorema fondamentale del calcolo integrale, che ricondusse tale problema alla ricerca della primitiva di una funzione.

La definizione di integrale per le funzioni continue in tutto un intervallo, introdotta da Pietro Mengoli ed espressa con maggiore rigore da Cauchy, venne posta su base diversa da Riemannin modo da evitare il concetto di limite, e da comprendere classi più estese di funzioni. Nel 1875 Gaston Darboux mostrò che la definizione di Riemann può essere enunciata in maniera del tutto simile a quella di Cauchy, purché si intenda il concetto di limite in modo un po' più generale. Per questo motivo si parla di integrale di Cauchy-Riemann.

Esistono leggere differenze nella notazione dell'integrale nelle letterature di lingue diverse: il simbolo inglese è piegato verso destra, quello tedesco è dritto mentre la variante russa è piegata verso sinistra.

### Primitive e integrazione indefinita

**Definizione:** Si dice che una funzione  $f$  definita in un sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{R}$  è dotata di primitiva, se esiste una funzione  $F$  definita in  $X$ , ivi derivabile, tale che:

$$F'(x) = f(x); \forall x \in X$$

**Proposizione:** Se  $F$  è una primitiva di  $f$ , allora,  $\forall c \in \mathbb{R}$ ,  $F + c$  è anch'essa una primitiva di  $f$

**Dimostrazione.** La dimostrazione di tale asserto è immediata se si tiene presente che una funzione costante in  $X$  ha derivata nulla in ogni punto di  $X$ .

**Proposizione:** Se  $f$  è definita in un intervallo  $X$ , allora due primitive di  $f$  differiscono per una costante.

**Dimostrazione:** Se  $F$  e  $G$ , infatti, sono due primitive di  $f$ , la funzione  $F - G$  è derivabile in  $X$  e risulta:

$$(F - G)'(x) = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in X$$

pertanto  $F - G$  è costante in  $X$  e la tesi è dimostrata.

Il simbolo  $\int$  che rappresenta l'integrale nella notazione matematica fu introdotto da Leibniz alla fine del XVIII secolo. Il simbolo si basa sul carattere  $f$  (esse lunga), lettera che Leibniz utilizzava come iniziale della parola summa, in latino somma, poiché questi considerava l'integrale come una somma infinita di addendi infinitesimali.



Il simbolo di integrale nella letteratura (da sinistra) inglese, tedesca e russa.

La nozione di integrale indefinito è correlata a quella di primitiva di una funzione reale  $f$  di una variabile reale. Siano  $I$  un intervallo di  $\mathbb{R}$  ed  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  una primitiva di  $f$ , con  $F$  derivabile in  $I$ . Ricordiamo che la funzione  $F$  è una primitiva della  $f$  se per ogni  $x$  appartenente a  $I$  risulta

$$F'(x) = f(x); \forall x \in X$$

E' noto che se una funzione ammette una primitiva, allora ha infinite primitive che, come si è visto sopra, differiscono tra di loro per una costante. La totalità delle primitive della funzione  $f$  costituisce, dunque, un insieme che si denota anche con  $F + c$ .

**Definizione**

Sia  $I$  un intervallo di  $\mathbb{R}$  ed  $f$  una funzione definita nell'intervallo  $I$  di  $\mathbb{R}$ ; l'insieme di tutte le primitive della  $f$  in  $I$  si chiama integrale indefinito della  $f$  e si denota con

$$\int f(x)dx$$

**Definizione**

L'integrale indefinito è l'operatore inverso della derivata perché associa alla funzione integranda  $f(x)$  l'insieme di tutte e sole le funzioni primitive di  $f(x)$  stessa.

**Proposizione**

L'integrale indefinito è un operatore lineare. Infatti gode delle seguenti due proprietà:

**Proprietà di linearità.**

Una costante moltiplicativa si può trasportare dentro o fuori del segno di integrale indefinito

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

**Proprietà di additività.**

L'integrale di una somma algebrica di due o più funzioni è uguale alla somma algebrica degli integrali delle singole funzioni

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

Combinando insieme le due proprietà si ha:

$$\int [k_1 \cdot f_1(x) + k_2 \cdot f_2(x)]dx = k_1 \cdot \int f_1(x)dx + k_2 \cdot \int f_2(x)dx$$

**Osservazione.** L'operazione di integrazione indefinita può considerarsi come inversa dell'operazione di derivazione. Non bisogna, tuttavia, dimenticare che l'operazione di integrazione indefinita, quando è possibile, associa ad una funzione una classe di funzioni; mentre l'operazione di derivazione ad ogni funzione associa una sola funzione.

**Integrazione immediata**

La seguente tabella, nella prima colonna, mostra le primitive delle funzioni elementari; mentre nella seconda colonna mostra come l'integrazione di una funzione elementare può essere generalizzata al caso di una funzione  $f(x)$  della stessa natura della corrispondente funzione elementare.

$\int dx = x + c$	
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x)  + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$	$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \arctan(f(x)) + c$
$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$	
$\int \frac{1}{a+bx^2} dx = \frac{\arctan \frac{\sqrt{bx}}{\sqrt{a}}}{\sqrt{ab}} + c$	
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$	
$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c$	
$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int f'(x) \cdot \cos f(x) dx = \sin f(x) + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int f'(x) \sin f(x) dx = -\cos f(x) + c$
$\int \tan x dx = -\ln \cos x  + c$	

Si può facilmente notare che nella tabella non si fa riferimento alcuno alle funzioni irrazionali; questo perché, da ben note proprietà delle radici, esse possono essere facilmente ricondotte a funzioni potenza. Ad esempio, si ricordino le seguenti proprietà:

Integrazione per sostituzione

Il metodo di integrazione per sostituzione si basa sul teorema di derivazione delle funzioni composte. Si ha:

$$\sqrt{x} = x^{1/2}$$

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$$

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = \frac{1}{x^{m/n}}$$

$$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

Dove g(t) è una funzione derivabile con derivata continua e invertibile. In pratica, quando non sappiamo calcolare l'integrale della funzione f(x) operiamo una sostituzione introducendo una funzione ausiliaria x=g(t)

per cui sappiamo calcolare  $\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$  e poi tornare alla variabile x sostituendo g-1(x) al posto di t nelle primitive trovate.

Si procede attraverso i seguenti step:

1. Si pone x=g(t) e si calcola dx=g'(t)dt;
2. Si riscrive l'integrale in termini di t, sostituendo g(t) al posto di x e g'(t)dt al posto di dx e si calcola l'integrale nella variabile t così ottenuto;
3. Si ritorna, infine, alla variabile x, eseguendo sul risultato la sostituzione inversa t=g-1(x)

**Tavola delle principali sostituzioni**

$\int r(a^x)dx$	$a^x = t$	$x = \log_a t$	$dx = \frac{1}{t} \log_a e$
$\int r(e^x)dx$	$e^x = t$	$x = \ln t$	$dx = \frac{1}{t}$
$\int r(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$	$\sqrt[n]{ax+b} = t$	$x = \frac{t^n - b}{a}$	$dx = \frac{n}{a} t^{n-1} dt$
$\int r(x, \sqrt{px^2+qx+r})dx$ con a>0	$\sqrt{px^2+qx+r} = t - \sqrt{px}$	Si eleva al quadrato per ricavare x	si deriva il rapporto per ricavare dx
$\int r(x, \sqrt{px^2+qx+r})dx$ con a<0	$\sqrt{px^2+qx+r} = t(x-\alpha)$ dove $\alpha$ è una delle due radici del polinomio sotto radice	Si eleva al quadrato per ricavare x	Si deriva il rapporto per ricavare dx
$\int r(\sin x, \cos x)dx$	$tg \frac{x}{2} = t$	$x = 2arctgt$	$dx = \frac{2}{1+t^2}$
$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$		$x = a \sin t$	$dx = a \cos t$

Integrazione di funzioni fratte

Per calcolare l'integrale  $\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$

di una funzione in cui il grado del denominatore sia maggiore del numeratore si scompone D(x) nel prodotto di fattori irriducibili;

si riscrive la funzione integranda come somma di frazioni semplici aventi come denominatore i fattori di D(x); si applicano le regole di integrazione immediata.

$ax+b$	$\frac{A}{ax+b}$	$\frac{1}{x(x-1)(x-2)}$	$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$
$(ax+b)^n$	$\frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} + \dots + \frac{N}{(ax+b)^n}$	$\frac{x^2+1}{(x-1)^3}$	$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$
$ax^2+bx+c; \Delta < 0$	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$	$\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+2)}$	$\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$

Se il grado del Denominatore è minore o uguale al grado del Numeratore si procede alla divisione dei due polinomi

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int Q(x)dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx$$

dove R(x) e Q(x) sono rispettivamente il resto e il quoziente della divisione

**Nozione di integrale per una funzione reale continua in un intervallo chiuso e limitato**

Si consideri la partizione P di un intervallo chiuso [a;b] in n sottointervalli  $[x_{k-1};x_k]$  di uguale ampiezza, e si consideri una funzione continua f(x) definita su [a;b].

Per ogni intervallo della partizione si possono definire due punti:

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad \text{e} \quad M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

che corrispondono all'ordinata minore  $m_k$  nell'intervallo e all'ordinata maggiore  $M_k$  dell'intervallo. Si definisce somma integrale inferiore relativa alla partizione P il numero:

$$s(P) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$$

Ammettendo che f assuma valori positivi nell'intervallo, la somma integrale inferiore è la somma dei rettangoli inscritti alla regione del piano. Analogamente, si definisce somma integrale superiore relativa alla partizione P il numero:

$$S(P) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$$

La somma integrale superiore è quindi la somma delle aree dei rettangoli circoscritti alla regione. Si ponga:

$$m < f(x) < M, \forall x \in [a; b]$$

si dimostra che per ogni coppia di partizioni P e Q di [a;b] si ha:

$$m(b-a) < s(P) < S(Q) < M(b-a)$$

Per ogni possibile partizione P di [a;b] si definiscono:

$$\delta = s(P) \quad \Sigma = S(P)$$

Dal lemma precedente si può dedurre che gli insiemi  $\delta$  e  $\Sigma$  sono separati cioè:

$$s < S$$

L'assioma di completezza di R afferma che allora esiste almeno un numero reale  $\xi$  appartenente a R tale che:

$$s \leq \xi \leq S$$

Se vi è un unico elemento di separazione tra  $\delta$  e  $\Sigma$  allora si dice che f(x) è integrabile in [a;b] secondo Riemann. L'elemento  $\xi$  si indica con:

$$\xi := \int_a^b f(x) dx$$

e si chiama integrale definito di f in [a;b]. I numeri a e b sono detti estremi di integrazione ed f è detta funzione integranda. La variabile di integrazione è una variabile muta, e dx è detto differenziale della variabile di integrazione.

**Definizione:** L'integrale secondo Riemann di f nell'intervallo chiuso e limitato [a;b] è definito come il limite per n che tende ad infinito della somma integrale:

$$\sigma_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k)$$

detta somma integrale di Riemann. Se tale limite esiste, è finito e non dipende dalla scelta dei punti  $t_k$ , si ha:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \frac{b-a}{n} \sum_{s=1}^n f(t_s)$$

L'esistenza di un unico elemento separatore tra  $\delta$  e  $\Sigma$  nella definizione è equivalente a richiedere che:

$$s(P) = S(P) = \int_a^b f(x) dx$$

La funzione limitata f è integrabile in [a;b] se e solo se per ogni  $\epsilon > 0$  esiste una partizione P di [a;b] per cui si ha:

$$|S(P) - s(P)| < \epsilon$$

Se la funzione integrabile f(x) è positiva allora l'integrale assume il significato di area della regione, mentre se la funzione f cambia segno su [a;b] allora l'integrale rappresenta una somma di aree con segno diverso

**Teorema della media**

Il teorema della media integrale è un teorema che mette in relazione le nozioni di integrale e di funzione continua per le funzioni di una variabile reale. Una funzione continua f definita su un intervallo ha come immagine ancora un intervallo: il teorema della media integrale stabilisce che la media integrale di f è un valore incluso nell'intervallo immagine.

Il concetto di media integrale è una generalizzazione dell'idea di media aritmetica. L'idea è quella di calcolare il valore medio assunto da una funzione su un intervallo [a;b] calcolando la media aritmetica dei valori che la funzione assume su un insieme finito (molto grande) di punti distribuiti uniformemente nell'intervallo, cioè si suddivide l'intervallo in N sottointervalli

$[x_k, x_{k+1}]$  tutti di lunghezza  $(b-a)/N$  e si calcola la media:

$$\frac{f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_N)}{N}$$

questa può essere scritta anche come

$$\frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^N \frac{b-a}{N} f(x_i)$$

Dalla definizione di integrale di Riemann segue che considerando quantità  $N$  sempre maggiori di punti, questa espressione convergerà al valore

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

che viene chiamato media integrale di  $f$ .

**TEOREMA:** Se  $f: [a, b] \rightarrow R$

è continua e integrabile allora esiste un punto  $c$  appartenente ad  $[a, b]$  tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

o equivalentemente

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(c)$$

**Dimostrazione**

Essendo  $f$  continua in  $[a, b]$ , per il teorema di Weierstrass essa è dotata di massimo  $M$  e di minimo  $m$  su  $[a, b]$ , quindi si avrà

$$m \leq f(x) \leq M$$

Dalla proprietà di monotonia dell'integrale risulta

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

Nei membri a destra e a sinistra della disuguaglianza stiamo integrando una funzione costante, quindi abbiamo

$$\int_a^b m dx = m \int_a^b dx = m(b-a)$$

e analogamente

$$M dx = M \int_a^b dx = M(b-a)$$

Si ottiene quindi

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

ovvero, se  $b > a$ ,

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Per il Teorema dei valori intermedi  $f$  deve assumere in  $[a, b]$  tutti i valori compresi tra

$$\sup_{[a, b]} f(x) = M \quad \text{e} \quad \inf_{[a, b]} f(x) = m$$

quindi in particolare esisterà un punto  $c$  appartenente ad  $[a, b]$  tale che

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

**Teorema fondamentale del calcolo integrale**

Il teorema fondamentale del calcolo stabilisce un'importante connessione tra i concetti di integrale e derivata per funzioni a valori reali di variabile reale.

La prima parte del teorema è detta primo teorema fondamentale del calcolo, e garantisce l'esistenza della primitiva per funzioni continue. La seconda parte del teorema è detta secondo teorema fondamentale del calcolo, e consente di calcolare l'integrale definito di una funzione attraverso una delle sue primitive.

Una prima versione del teorema è dovuta a James Gregory, mentre Isaac Barrow ne fornì una versione più generale. Isaac Newton, studente di Barrow, e Gottfried Leibniz completarono successivamente lo sviluppo della teoria matematica in cui è ambientato il teorema.

**Teorema di Torricelli-Barrow o primo teorema fondamentale del calcolo integrale**

Sia  $f(x)$  un funzione integranda, continua in un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ , allora la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

con

$$a \leq x \leq b$$

è derivabile in  $[a,b]$  e la derivata della funzione integrale coincide con la funzione integranda; si ha cioè:

$$F'(x) = f(x)$$

Dimostrazione:

Ipotesi	Tesi
$f(x)$ è continua in $[a,b]$ $F(x) = \int_a^x f(t)dt$	$F'(x) = f(x)$

rapporto incrementale al tendere a 0 dell'incremento  $\Delta x$  della variabile indipendente.

Determiniamo il rapporto incrementale

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

e osserviamo che

$$F(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Si ha allora

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x}$$

Per la proprietà additiva dell'integrale:

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} = \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}$$

Per il teorema della media esiste un  $\bar{x}$  appartenente a  $[x, x+\Delta x]$  tale che

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \Delta x \cdot f(\bar{x}) = \frac{\Delta x \cdot f(\bar{x})}{\Delta x} = f(\bar{x})$$

Calcoliamo il limite del rapporto incrementale per  $\Delta x$  che tende a zero e si ha, per l'ipotesi di continuità,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\bar{x}) = f(x)$$

Concludiamo che

$$F'(x) = f(x)$$

### Formula di Newton-Leibnitz o secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia

$$f : [a,b] \rightarrow R$$

una funzione che ammette una primitiva  $F$  su  $[a,b]$ . Se  $f$  è integrabile si ha:

$$\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$$

Tale relazione è detta formula fondamentale del calcolo integrale.

A differenza del corollario alla prima parte del teorema, non si assume la continuità di  $f$ .

**Dimostrazione:**

Posto

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Ovvero la funzione integrale associata alla funzione assegnata,  $F(x)$  e  $G(x)$  siano due primitive di  $f(x)$ . Sappiamo che esse differiscono per una costante. Possiamo scrivere allora

$$G(x) = F(x) + c = \int_a^x f(t)dt + c$$

Per  $x=a$  otteniamo

$$G(a) = \int_a^a f(t)dt + c$$

ma

$$\int_a^a f(t)dt = 0$$

pertanto  $G(a)=c$

Dunque potrò scrivere:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + G(a)$$

Analogamente se  $x=b$  si ha:

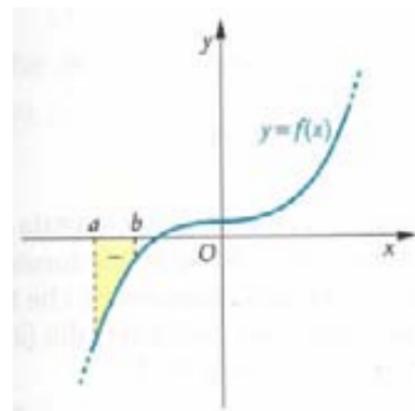
$$G(b) = \int_a^b f(t)dt + G(a)$$

e dunque

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

C.v.d.

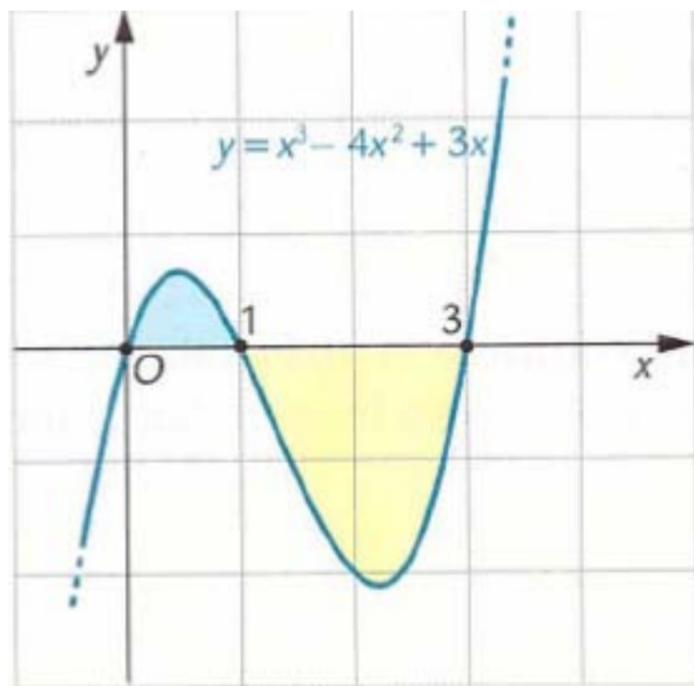
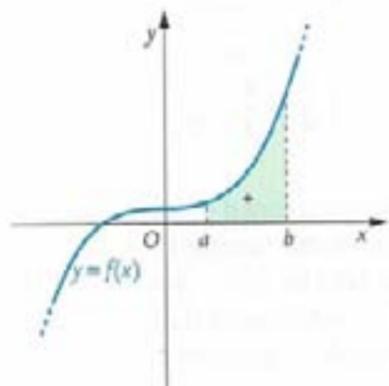
### Il calcolo delle aree



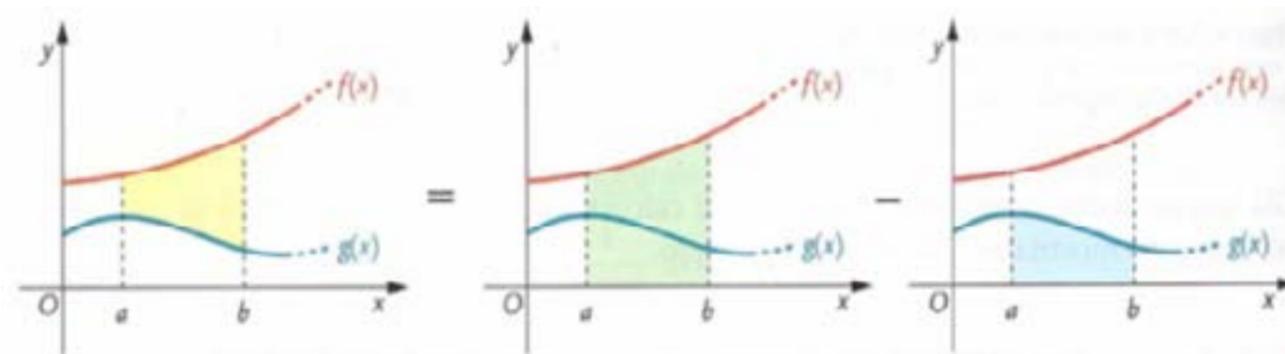
L'integrale definito rappresenta geometricamente l'area della regione di piano limitata dal grafico della funzione  $y=f(x)$  e dall'asse  $x$  nell'intervallo  $[a,b]$ . Dai due grafici si può vedere che il segno dell'area è negativo se la parte di piano si trova al di sotto dell'asse  $x$  mentre è positivo se la parte di piano è al di sopra dell'asse  $x$ .

Ad esempio che vogliamo calcolare l'area della regione di piano raffigurata, compresa tra l'asse  $x$  e la curva di equazione  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$  dobbiamo considerare l'intervallo  $[0,3]$ . Questo intervallo deve essere diviso in due intervalli: nell'intervallo  $[0,1]$  la parte di piano si trova al di sopra dell'asse  $x$  e quindi ha segno positivo, mentre nell'intervallo  $[1,3]$  la parte di piano è al di sotto dell'asse  $x$  quindi assume segno negativo. Pertanto dobbiamo risolvere due integrali:

$$\int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)dx - \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)dx = \frac{37}{12}$$



Ci poniamo ora il problema di determinare l'area della regione di piano limitata dai grafici di due funzioni  $y=f(x)$  e  $y=g(x)$  nell'intervallo  $[a,b]$



Come si vede dai grafici l'area si ottiene come differenza tra l'area del trapezoide individuato da  $f$  nell'intervallo  $[a,b]$  e l'area del trapezoide individuato da  $g$  nell'intervallo  $[a,b]$

Pertanto, l'area cercata risulta essere espressa dalla formula

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Si noti che la formula vale se  $f(x) > g(x)$  altrimenti la differenza va invertita.

### Integrali delle funzioni pari e dispari

Sia  $f(x)$  una funzione dispari, ossia tale che  $f(-x) = -f(x)$  e si consideri il suo integrale in un intervallo simmetrico rispetto all'origine

$$\int_{-a}^a f(x)dx$$

E' intuitivo e si potrebbe dimostrare che l'integrale risulta nullo: infatti ricordando il significato geometrico di integrale definito, l'integrale rappresenta la somma algebrica delle due aree (rosa e blu). Per la simmetria del grafico di  $f(x)$ , tali aree risultano equivalenti e quindi hanno, in valore assoluto, la stessa misura. Poiché una si trova al di sopra e una al di sotto dell'asse  $x$ , le loro misure avranno segni opposti e la loro somma algebrica sarà perciò zero.

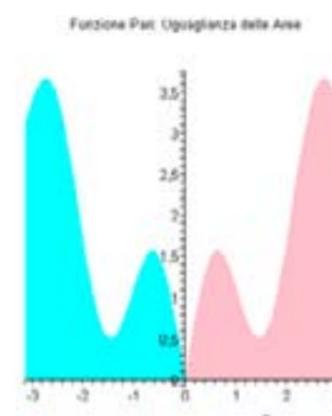
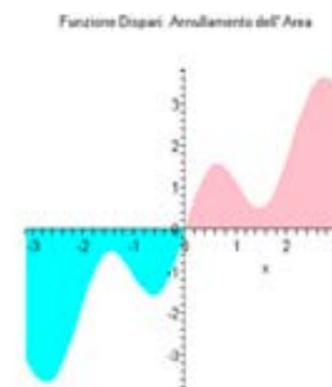
Sia invece,  $y=f(x)$  una funzione pari il cui grafico, rappresentato in figura, è simmetrico rispetto all'asse  $y$ .

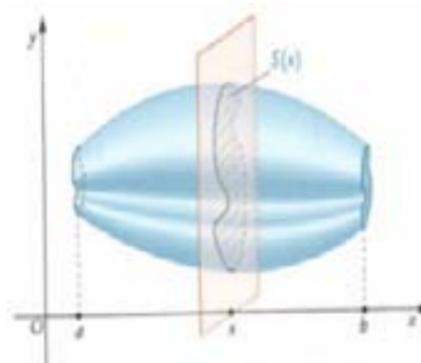
In questo caso le due aree equivalenti vanno sommate. Pertanto:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

### Calcolo dei volumi

Consideriamo un solido limitato da due piani perpendicolari all'asse  $x$  passanti rispettivamente per i punti di coordinate  $(a,0)$  e  $(b,0)$ . Supponiamo inoltre di conoscere l'area  $S(x)$  della sezione del solido ottenuta conducendo il piano perpendicolare all'asse  $x$ , passante per il punto di coordinate  $(x,0)$ . Vogliamo calcolare il volume del solido così





generato.  
 Consideriamo innanzitutto i punti  $x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_n=b$  che dividono  $[a,b]$  in  $n$  intervalli ciascuno di ampiezza  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  e suddividiamo il solido in  $n$  fette ciascuna di spessore uguale  $\Delta x$  conducendo i piani perpendicolari all'asse  $x$  passanti per i punti  $x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n$ . Scegliamo quindi in ogni intervallo  $[x_{i-1}, x_i]$  un punto arbitrario  $c_i$ . Nell'ipotesi che  $\Delta x$  sia infinitesimo, è lecito pensare di approssimare ogni fetta in cui il solido è stato suddiviso con un cilindro avente come altezza  $\Delta x$  e basi equivalenti alla sezione del solido ottenuta con il piano passante per  $(c_i, 0)$ .

Il volume di questo cilindro è  $S(c_i) \Delta x$  e la somma dei volumi delle varie fette è data da:

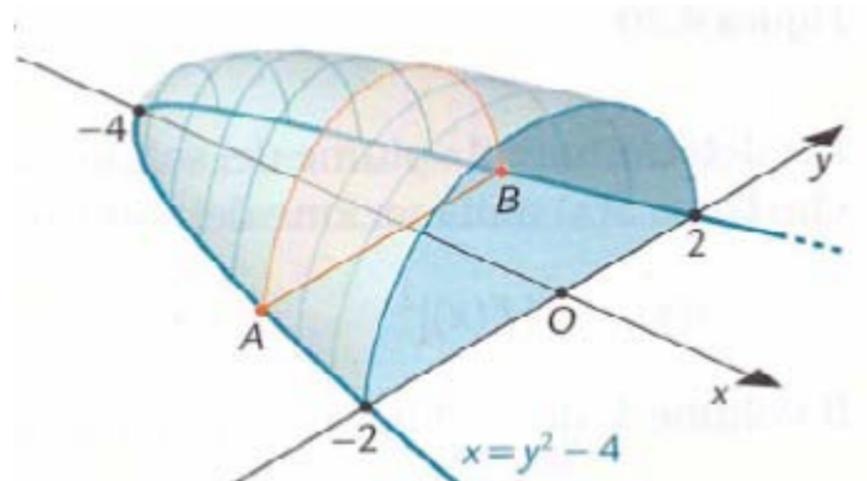
$$S(c_1)\Delta x + S(c_2)\Delta x + \dots + S(c_n)\Delta x = \sum_{i=1}^n S(c_i)\Delta x$$

Possiamo definire volume del solido originario il limite di tale somma quando  $n$  tende a infinito. La somma appena scritta è una somma di Riemann della funzione  $S(x)$  relativa all'intervallo  $[a,b]$ , il suo limite per  $n$  che tende a infinito è l'integrale definito della funzione  $S(x)$  in tale intervallo. È ragionevole dunque la seguente

**Definizione:** dato un solido limitato da due piani perpendicolari all'asse  $x$ , che intersecano l'asse  $x$  stesso nei punti di ascissa  $a$  e  $b$ , sia inoltre  $S(x)$  l'area della sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare all'asse  $x$  passante per  $(x,0)$ ; allora il volume  $V$  del solido è dato dalla formula

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Calcolo del volume del solido con il metodo delle sezioni  
 Determiniamo il volume del solido che ha come base il segmento parabolico limitato dalla parabola di equazione  $x=y^2-4$  e dall'asse  $y$ , le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse  $x$  sono semicerchi



Si determina dapprima l'area della sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare all'asse  $x$  e passante per il punto di coordinate  $(x,0)$ . Tale sezione è un semicerchio. Indichiamo con  $AB$  il suo diametro. Risolvendo rispetto a  $y$  si ricava:

$$y = \pm\sqrt{x+4}$$

Quindi le coordinate di  $A$  e di  $B$  sono  $(x, \pm\sqrt{x+4})$ . Il raggio del semicerchio è allora

$$r = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} (2\sqrt{x+4}) = \sqrt{x+4}$$

E l'area del semicerchio è:

$$S(x) = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{\pi}{2} (x+4)$$

Il volume del solido è:

$$V = \int_{-4}^0 \frac{\pi}{2} (x+4) dx = 4\pi$$

**Volume dei solidi di rotazione**

