



# GEOMETRIA DELLO SPAZIO

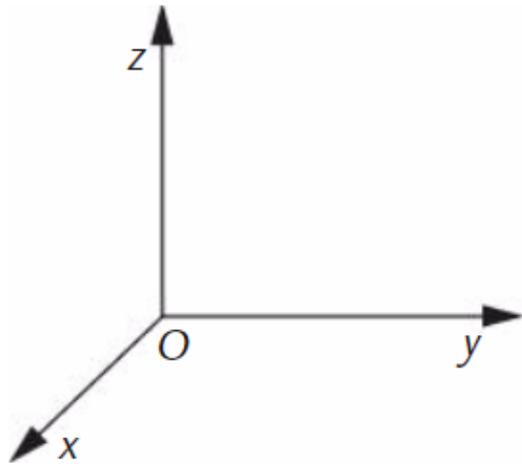
Prof. Roberto Capone  
A.A. 2016/17  
Corso di Studi in Ingegneria Chimica



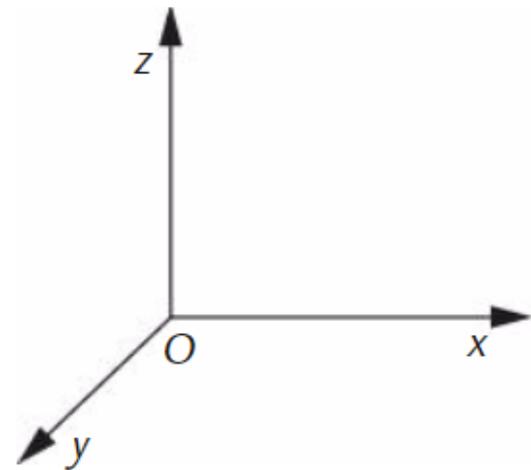
# Introduzione alla geometria analitica dello spazio

---

Anche lo spazio, come il piano, può essere riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali, procedendo come segue: si considerano tre rette a due a due ortogonali, dette asse  $x$ , asse  $y$  e asse  $z$ , tutte e tre passanti per un punto  $O$ , origine del sistema di riferimento; si orientano i tre assi e si considera su di essi una unità di misura; se l'orientamento è come in fig. 11.1 il sistema di riferimento si dice destro, mentre se è come in fig. 11.2 si dice sinistro



**Figura 11.1**



**Figura 11.2**

---

---

Il piano che contiene gli assi  $x$  e  $y$  è detto piano  $xy$ ; analogamente il piano che contiene gli assi  $x$  e  $z$  è detto piano  $xz$  e il piano che contiene gli assi  $y$  e  $z$  è detto piano  $yz$  (fig. 11.3). I tre piani  $xy$ ,  $yz$  e  $xz$ , detti piani coordinati, dividono lo spazio in otto parti, detti ottanti (gli analoghi dei quadranti nel piano). A ogni punto  $P$  dello spazio è possibile associare una terna ordinata di numeri reali  $(x, y, z)$ , che costituiscono le coordinate del punto  $P$  (fig. 11.4)

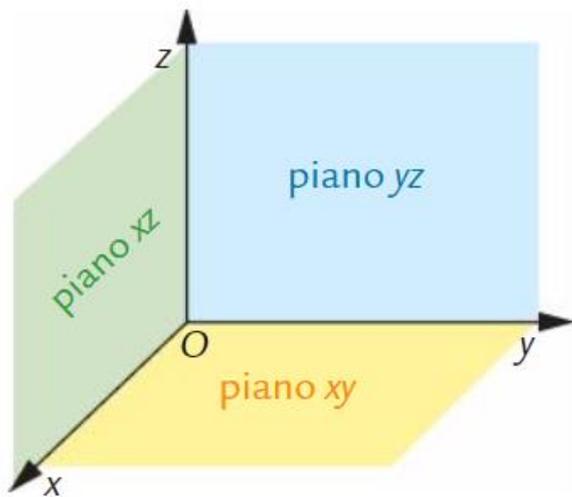


Figura 11.3

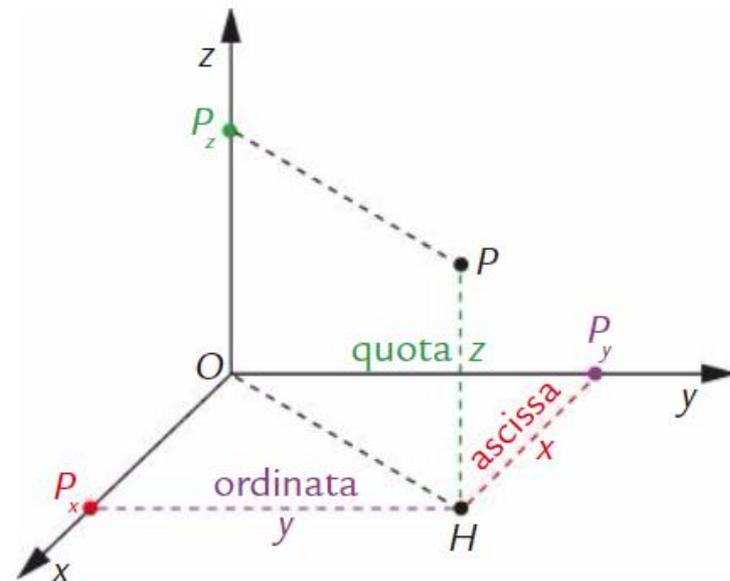
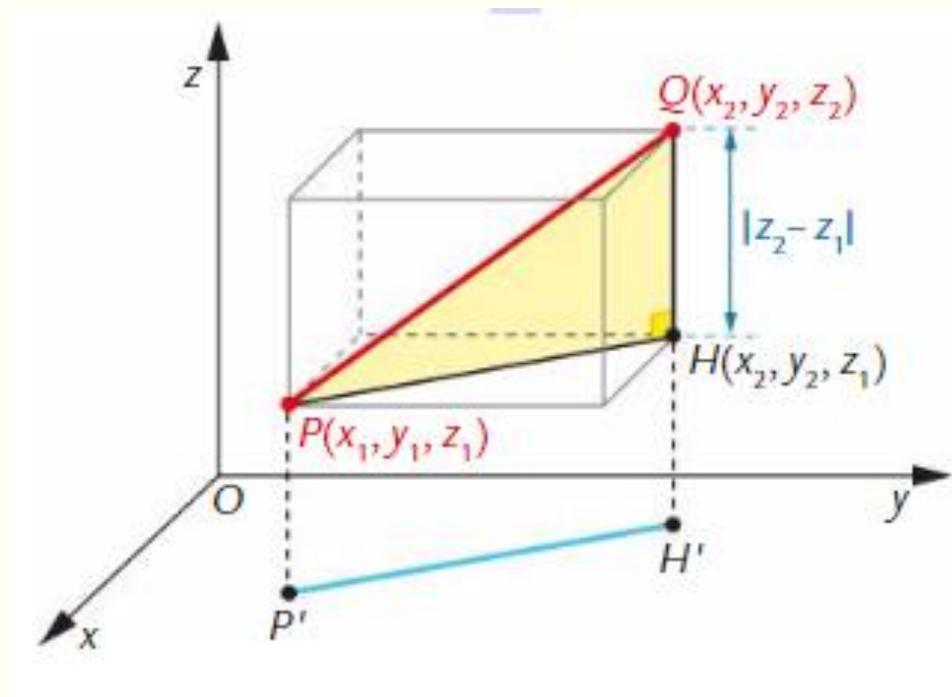


Figura 11.4

# Distanza tra due punti

---



## Distanza tra due punti nello spazio

Nello spazio, la distanza  $d$  tra due punti di coordinate  $(x_1, y_1, z_1)$  e  $(x_2, y_2, z_2)$ , è espressa dalla formula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

# Punto medio di un segmento

---

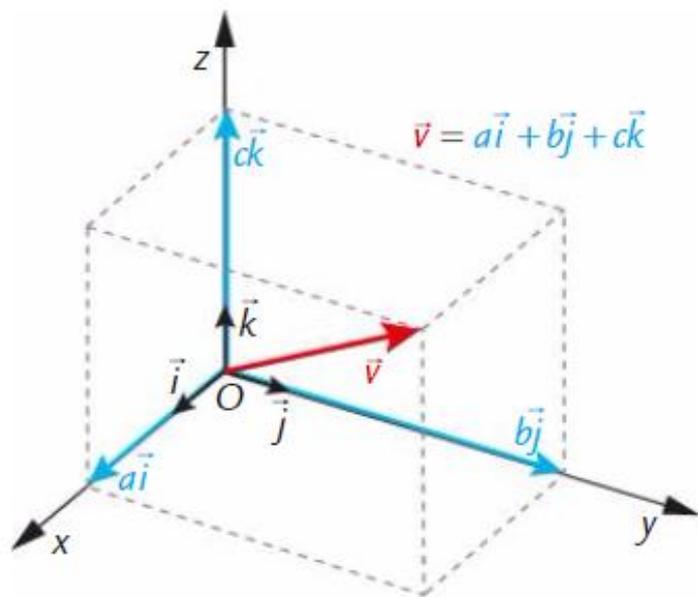
## PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO NELLO SPAZIO

Il **punto medio** di un segmento i cui estremi hanno coordinate  $(x_1, y_1, z_1)$  e  $(x_2, y_2, z_2)$ , ha coordinate:

$$\left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

# Vettori nello spazio

---



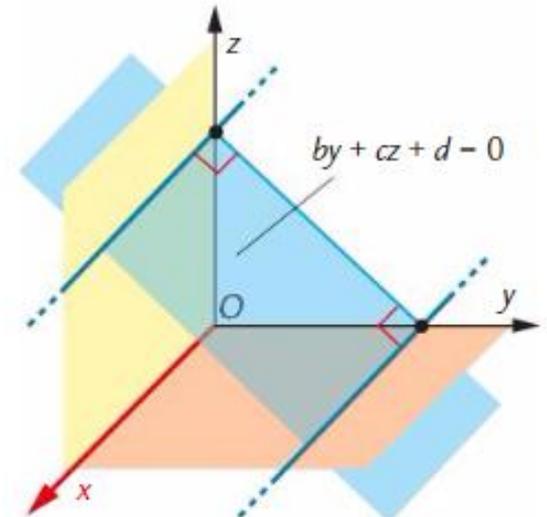
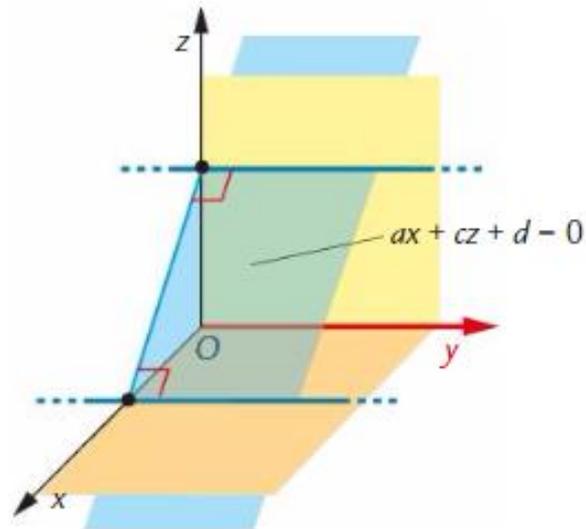
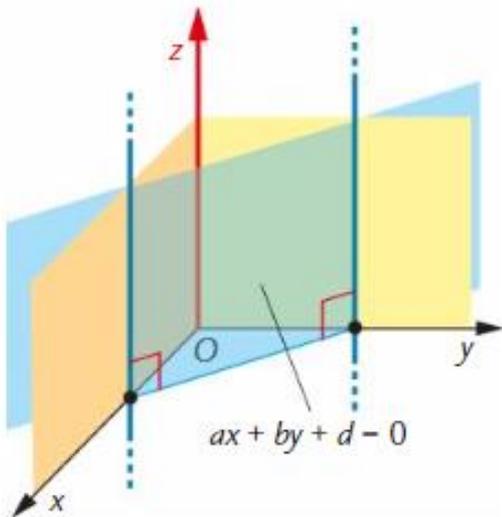
$$ax + by + cz + d = 0$$

## Equazione del piano passante per un punto, di dato vettore normale

Il piano passante per il punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  e di vettore normale  $\vec{n}(a, b, c)$  ha equazione:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

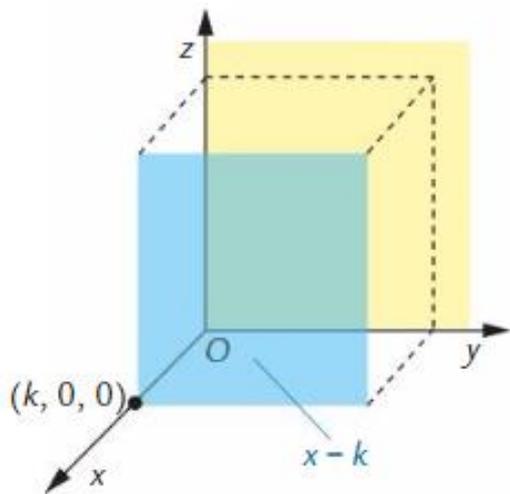
[11.2]



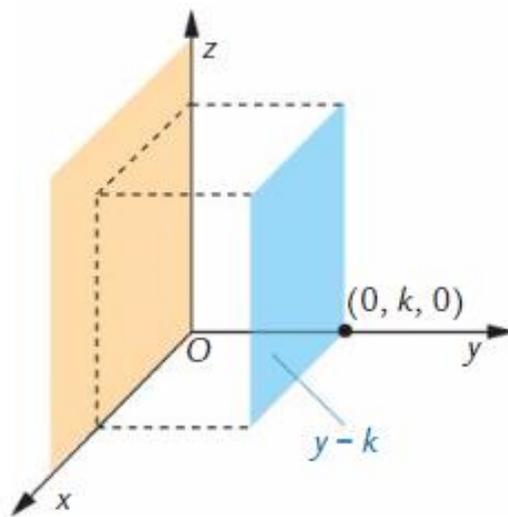
a. Piano parallelo **all'asse z** (deve perciò intersecare i piani  $xz$  e  $yz$  lungo rette parallele all'asse  $z$ ). Tale piano è anche perpendicolare al piano  $xy$ .

b. Piano parallelo **all'asse y** (deve perciò intersecare i piani  $yz$  e  $xy$  lungo rette parallele all'asse  $y$ ). Tale piano è anche perpendicolare al piano  $xz$ .

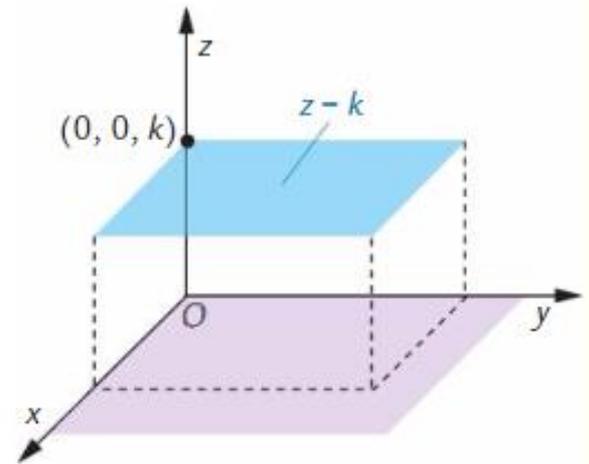
c. Piano parallelo **all'asse x** (deve perciò intersecare i piani  $xy$  e  $xz$  lungo rette parallele all'asse  $x$ ). Tale piano è anche perpendicolare al piano  $yz$ .



a. Piano parallelo al piano yz.



b. Piano parallelo al piano xz.



c. Piano parallelo al piano yz.

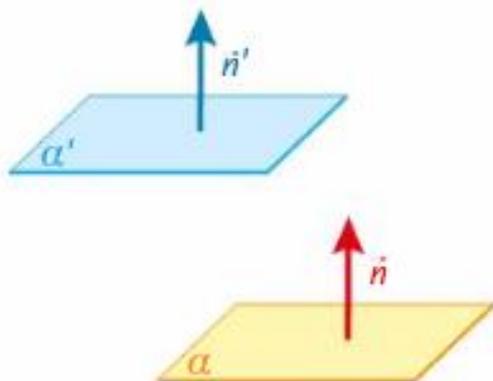
# Parallelismo tra due piani

---

**Condizione di parallelismo  
tra i due piani**

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\text{e } a'x + b'y + c'z + d' = 0$$



I due piani sono *paralleli* se e solo se lo sono i due vettori normali:

$$\vec{n}(a, b, c) \text{ e } \vec{n}'(a', b', c')$$

Ciò si verifica se e solo se esiste  $k \in \mathbf{R}$  tale che:

$$a = ka', b = kb', c = kc'$$

ovvero, se  $a', b', c' \neq 0$ , quando:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

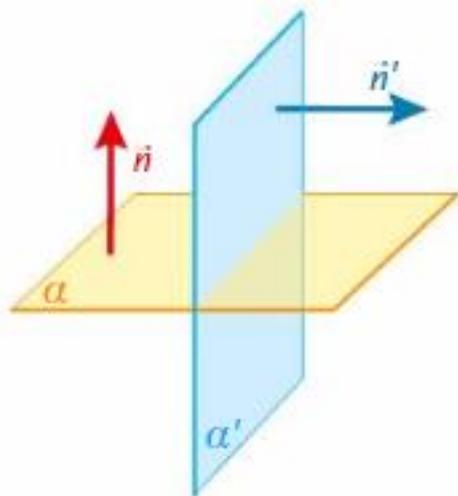
# Perpendicolarità tra due piani

---

**Condizione di perpendicolarità  
tra i due piani**

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\text{e } a'x + b'y + c'z + d' = 0$$



I due piani sono *perpendicolari* se e solo se lo sono i due vettori normali:

$$\vec{n}(a, b, c) \text{ e } \vec{n}'(a', b', c')$$

Ciò si verifica se e solo se risulta:

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$$

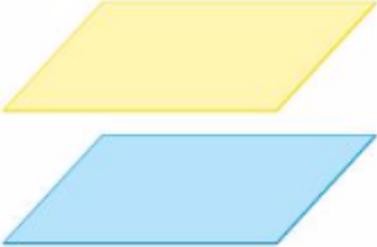
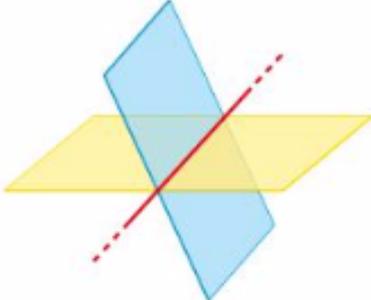
da cui la condizione:

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

# Posizione reciproca tra due piani

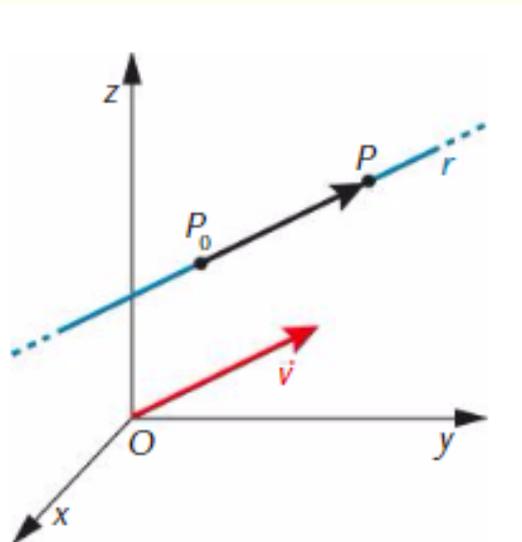
---

---

Piani paralleli distinti	Piani secanti	Piani paralleli coincidenti
		
<p>Il sistema</p> $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ d'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ <p><b>non</b> ammette soluzioni.</p>	<p>Il sistema</p> $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ d'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ <p>ammette <i>infinite</i> soluzioni, tutte appartenenti a una medesima <i>retta</i>.</p>	<p>Il sistema</p> $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ d'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ <p>è verificato da ogni terna ordinata <math>(x, y, z)</math> che soddisfa la prima equazione (o la seconda).</p>

# Equazione della retta nello spazio

---



$$\overrightarrow{P_0P} = t \vec{v} \quad \text{con } t \in \mathbf{R}$$

$$\overrightarrow{P_0P}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \quad \text{e} \quad t \cdot \vec{v} = (ta, tb, tc)$$

$$\begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

## **EQUAZIONI PARAMETRICHE DI UNA RETTA NELLO SPAZIO**

La retta passante per il punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  e di vettore direzione  $\vec{v}(a, b, c)$  ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

[11.5]

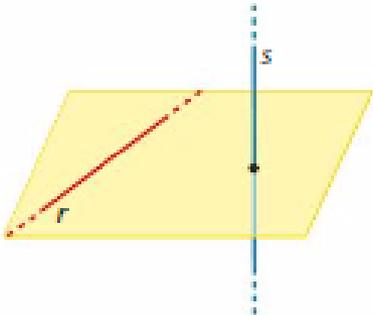
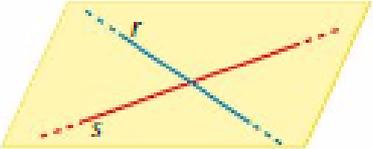
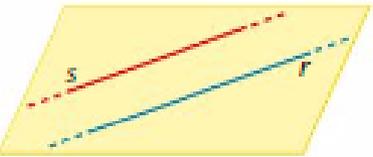
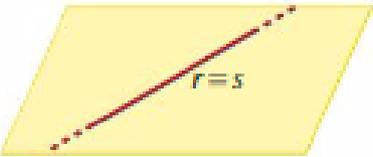
# Equazione della retta nello spazio

---

Se i numeri  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sono diversi da zero, possiamo eliminare il parametro  $t$  e ottenere le equazioni cartesiane della retta:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

# Posizione reciproca di due rette nello spazio

Rette sghembe	Rette incidenti
	
<p>I due vettori direzione di <math>r</math> ed <math>s</math> <b>non</b> sono paralleli e le due rette non hanno punti in comune (ovvero il sistema formato dalle loro equazioni è impossibile).</p>	<p>I due vettori direzione di <math>r</math> ed <math>s</math> <b>non</b> sono paralleli e le due rette hanno un solo punto in comune (ovvero il sistema formato dalle loro equazioni ha una e una sola soluzione).</p>
Rette parallele distinte	Rette parallele coincidenti
	
<p>I due vettori direzione di <math>r</math> ed <math>s</math> sono paralleli e le due rette non hanno punti in comune (ovvero il sistema formato dalle loro equazioni è impossibile).</p>	<p>I due vettori direzione di <math>r</math> ed <math>s</math> sono paralleli e ciascun punto di <math>r</math> appartiene a <math>s</math>, ovvero il sistema formato dalle loro equazioni è indeterminato.</p>

# Parallelismo e perpendicolarità tra retta e piano

---

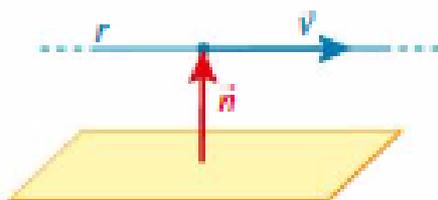
Condizione di parallelismo tra:

- un piano di equazione

$$ax + by + cz + d = 0$$

- una retta di vettore direzione

$$\vec{v}(l, m, n)$$



La retta è parallela al piano se e solo se il vettore  $\vec{n}(a, b, c)$  normale al piano è perpendicolare al vettore direzione  $\vec{v}(l, m, n)$  della retta.

Ne segue la condizione:

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

da cui:

$$la + mb + nc = 0$$

# Parallelismo e perpendicolarità tra retta e piano

---

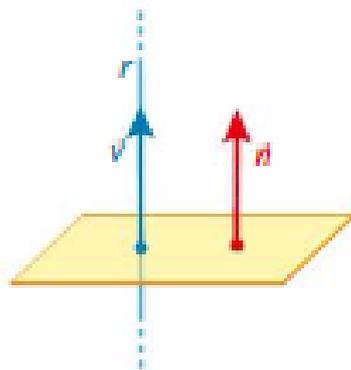
Condizione di perpendicolarità tra:

- un piano di equazione

$$ax + by + cz + d = 0$$

- una retta di vettore direzione

$$\vec{v}(l, m, n)$$



La retta è perpendicolare al piano se e solo se il vettore direzione  $\vec{v}(l, m, n)$  della retta è parallelo al vettore  $\vec{n}(a, b, c)$  normale al piano. Ciò si verifica se e solo se esiste  $k \in \mathbb{R}$  tale che:

$$l = ka, m = kb, n = kc$$

ovvero, se  $a, b, c \neq 0$ , quando:

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$$

# Posizione reciproca tra retta e piano

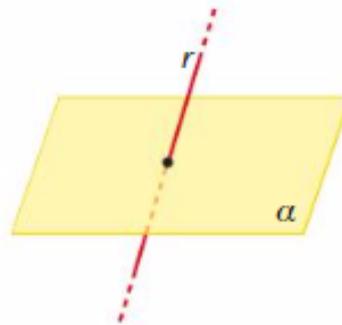
---

---

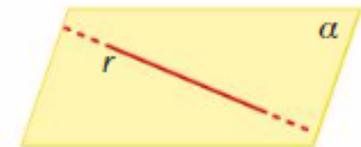
Retta parallela al piano



Retta incidente il piano



Retta che giace sul piano



Il vettore normale al piano è perpendicolare al vettore direzione della retta e inoltre piano e retta non hanno punti in comune (ovvero il sistema formato dalle loro equazioni è impossibile).

Il vettore normale al piano **non** è perpendicolare al vettore direzione della retta.

Il vettore normale al piano è perpendicolare al vettore direzione della retta e tutti i punti della retta appartengono al piano (ovvero il sistema formato dalle loro equazioni è indeterminato).

# Distanza di un punto da un piano

---

## Distanza di un punto da un piano

Dato il piano di equazione  $ax + by + cz + d = 0$  e un punto  $P(x_0, y_0, z_0)$ , la **distanza** del punto dal piano (fig. 11.12) è uguale a:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad [11.7]$$

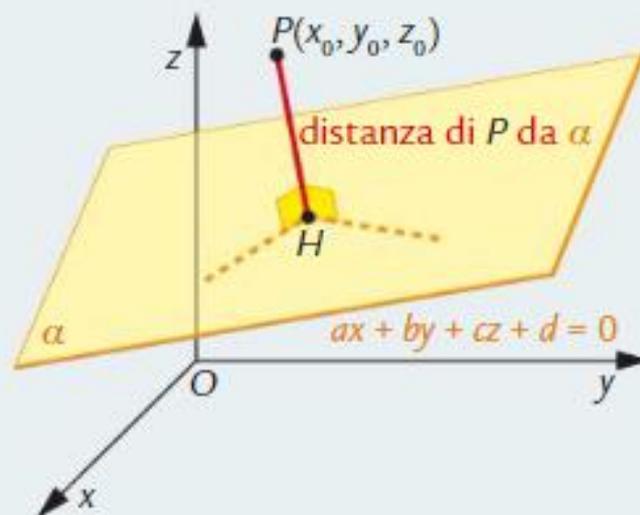
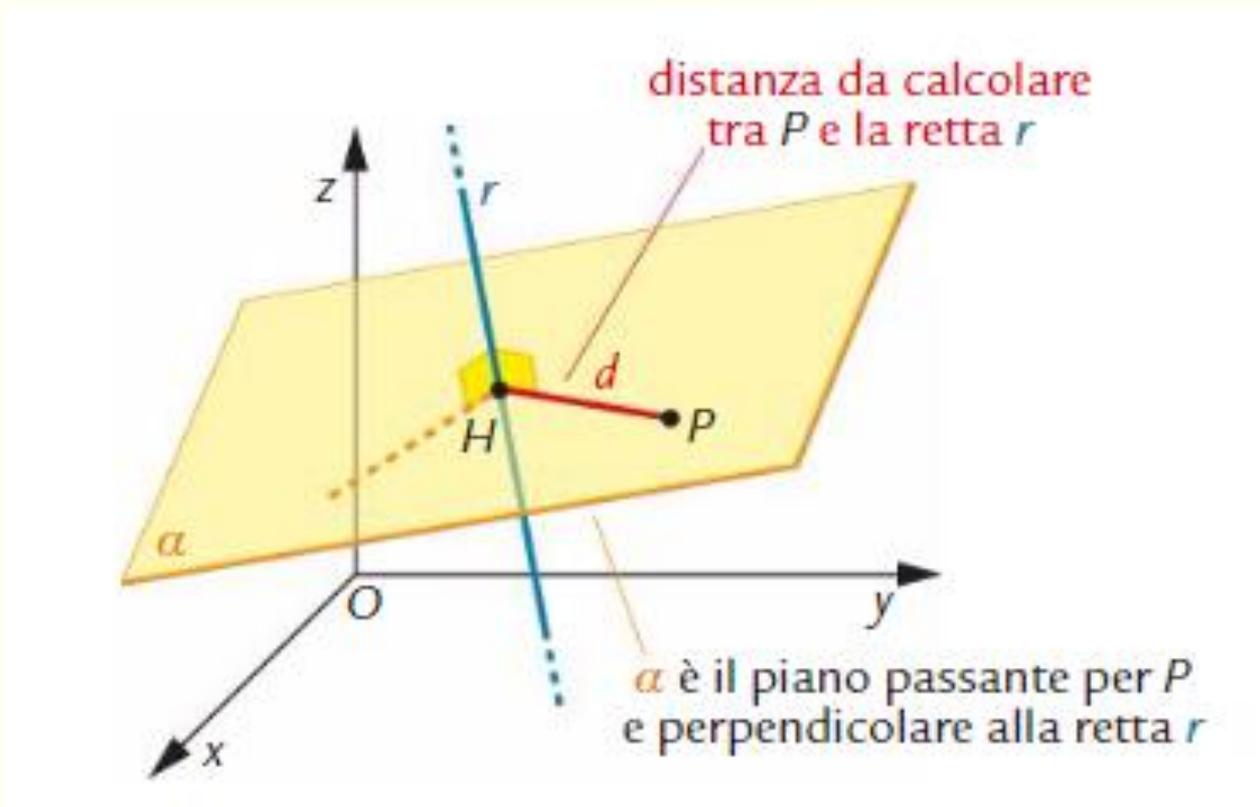


Figura 11.12

# Distanza di un punto da una retta

---



La distanza di  $P$  dalla retta  $r$  è uguale alla distanza tra  $P$  e  $H$ , essendo  $H$  il punto d'intersezione della retta  $r$  con il piano passante per  $P$  e perpendicolare a  $r$ .

## ESERCIZIO Guidato

---

---

Determiniamo la distanza del punto  $P(2, -1, 5)$  dalla retta  $r$  di equazioni

$$\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = -2t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

- **Scriviamo l'equazione del piano  $\alpha$  per  $P$  perpendicolare alla retta  $r$**

La retta  $r$  ha come vettore direzione  $\vec{v}(3, -2, 4)$ .

Il piano passante per  $P$  e perpendicolare alla retta  $r$  deve avere come vettore normale  $\vec{v}$ , dunque la sua equazione è:

$$3(x - 2) - 2(y + 1) + 4(z - 5) = 0$$

ossia:

$$3x - 2y + 4z - 28 = 0$$

## ESERCIZIO guidato

---

- **Determiniamo il punto d'intersezione  $H$  della retta  $r$  con il piano**

Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = -2t \\ z = 2 + 4t \\ 3x - 2y + 4z - 28 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione del piano le espressioni di  $x$ ,  $y$  e  $z$  fornite dalle equazioni parametriche della retta, otteniamo l'equazione risolvente nell'incognita  $t$ :

$$3(-3 + 3t) - 2(-2t) + 4(2 + 4t) - 28 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Sostituendo infine nelle equazioni parametriche della retta il valore  $t = 1$ , otteniamo le coordinate di  $H$ :

$$\begin{cases} x = -3 + 3 \cdot 1 \\ y = -2 \cdot 1 \\ z = 2 + 4 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow H(0, -2, 6)$$

## ESERCIZIO guidato

---

---

Scrivi l'equazione del piano passante per i tre punti  $A(1, 0, 2)$ ,  $B(0, 1, 3)$ ,  $C(0, 0, 3)$ .

- L'equazione generale del piano  $ax + by + cz + d = 0$  dipende apparentemente da quattro parametri,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ , ma in realtà i parametri essenziali sono solo tre. In questo caso, per esempio, certamente  $d \neq 0$  (perché il piano dato non può passare per l'origine); dividendo i due membri dell'equazione per  $d$ , otteniamo l'equazione:

$$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d}z + 1 = 0$$

ossia, ponendo  $\frac{a}{d} = p$ ,  $\frac{b}{d} = q$ ,  $\frac{c}{d} = r$  si ottiene:

$$px + qy + rz + 1 = 0$$

Per determinare l'equazione del piano è sufficiente perciò determinare i tre parametri  $p$ ,  $q$  ed  $r$ .

- Imponendo che i punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  appartengono al piano di equazione  $px + qy + rz + 1 = 0$  si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} p + 2r + 1 = 0 \\ q + 3r + 1 = 0 \\ 3r + 1 = 0 \end{cases}$$

da cui  $p = -\frac{1}{3}$ ,  $q = 0$ ,  $r = -\frac{1}{3}$ . Ora puoi facilmente concludere.

$$[x + z - 3 = 0]$$

## ESERCIZIO guidato

---

---

Scrivi le equazioni parametriche della retta passante per il punto  $P(3, 1, 3)$ , perpendicolare e incidente alla retta  $r$

di equazioni  $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 6 + 3t \end{cases}$ .

---

- Considera sulla retta  $r$  un generico punto  $Q(5 + 2t, 1 - t, 6 + 3t)$ , con  $t \in \mathbf{R}$ , e imponi che il vettore  $\overrightarrow{PQ}$  sia perpendicolare al vettore direzione della retta  $r$ .
- Risolvi l'equazione in  $t$  che ne scaturisce e determina il punto  $Q$  corrispondente al valore di  $t$  trovato.
- La retta cercata è quella che passa per i due punti  $P$  e  $Q$ .

$$\left[ x = 3 + \frac{1}{7}k, y = 1 + \frac{13}{14}k, z = 3 + \frac{3}{14}k \right]$$

## ESERCIZIO guidato

---

Verifica che le due rette di equazioni parametriche  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$  e  $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2k \\ z = -k \end{cases}$  sono sghembe.

- Per verificare che le due rette sono sghembe devi verificare che non sono parallele e che non hanno punti d'intersezione.
- Per verificare che non sono parallele è sufficiente verificare che non sono paralleli i loro vettori direzione.
- Per verificare che non hanno punti in comune, devi verificare che il sistema seguente è impossibile:

$$\begin{cases} 1 + 2t = 1 + k \\ 1 - t = 2k \\ t = -k \end{cases} \quad [*]$$

A tale scopo puoi ricavare  $t$  e  $k$  da *due* delle tre equazioni del sistema [\*] e poi verificare che i valori di  $t$  e  $k$  trovati **non** soddisfano l'equazione rimanente.