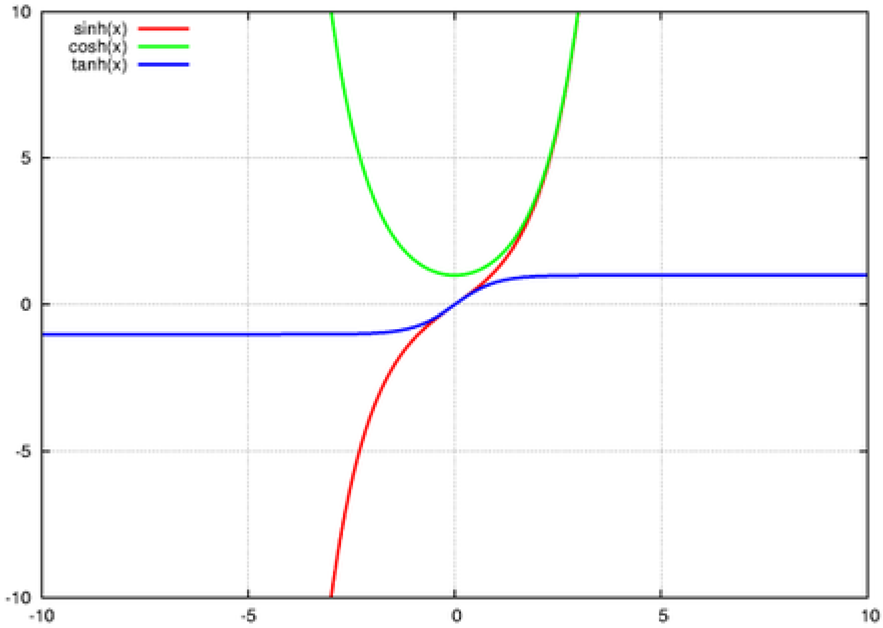
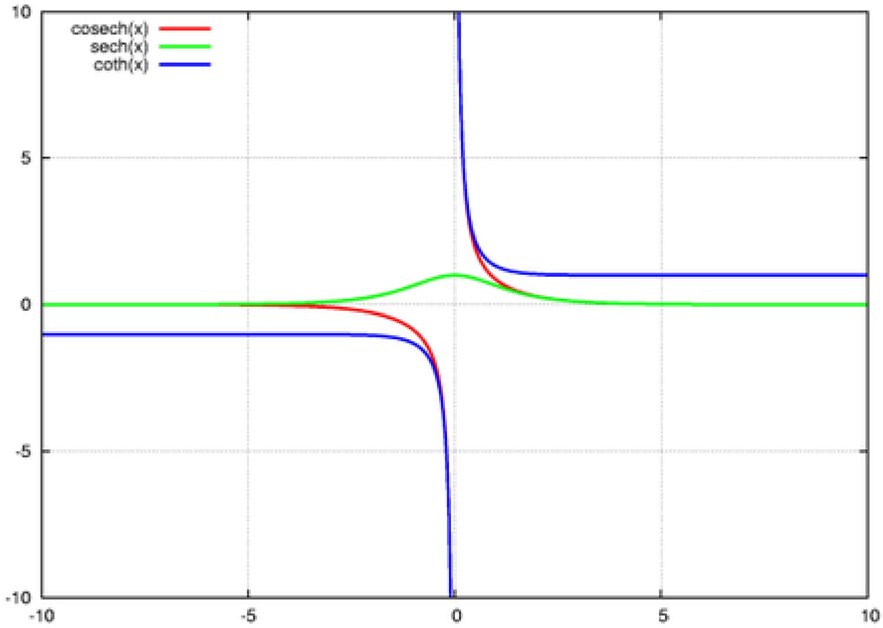
Funzioni iperboliche

Le **funzioni iperboliche** costituiscono una famiglia di funzioni speciali dotate di alcune proprietà analoghe a corrispondenti proprietà delle ordinarie funzioni trigonometriche.



Grafici delle funzioni iperboliche: sinh, cosh e tanh (argomenti reali)



Grafici delle funzioni iperboliche: csch, sech e coth (argomenti reali)

Definizioni

Possiamo definire le funzioni iperboliche in questo modo:

Data un'iperbole equilatera, con $a = b$, centrata con gli assi sugli assi coordinati e dato un angolo α, consideriamo il settore iperbolico di area $\alpha/2$, questo determina un punto **P** come intersezione con l'iperbole; definiamo quindi **seno iperbolico** $\boldsymbol{sinh}$ l'ordinata del punto **P** e **coseno iperbolico** $\boldsymbol{cosh}$ l'ascissa del punto **P**; conseguentemente si possono definire le altre funzioni iperboliche tramite $sinh$ e $cosh$ così come si fa per quelle trigonometriche.

Possiamo anche dare le loro definizioni basate su funzioni esponenziali.

- **Funzione seno iperbolico**

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- **Funzione coseno iperbolico**

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- **Funzione tangente iperbolica**

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

- **Funzione cotangente iperbolica**

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

- **Funzione secante iperbolica**

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

- **Funzione cosecante iperbolica**

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

In queste definizioni *x* si può considerare variabile reale o complessa.

Relazione con le funzioni trigonometriche

Per x reale la funzione $coshx$ è una funzione pari, cioè simmetrica rispetto all'asse y; la funzione $sinhx$ è invece una funzione dispari, cioè simmetrica rispetto all'origine.

Conseguentemente sono funzioni dispari anche $tanhx$, $cothx$, $cschx$, mentre $sechx$ è pari.

Si trovano poi i seguenti valori particolari:

$$\sinh 0 = 0 \qquad \cosh 0 = 1 \qquad \tanh 0 = 0 \qquad \text{sech} 0 = 1$$

Così come al variare della variabile reale t i punti $(cost, sint)$ definiscono la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, analogamente i punti $(cosht, sinht)$ definiscono l'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = 1$.

Questa è una conseguenza dell'identità:

$$(cosht)^2 - (sinht)^2 = 1$$

derivabile dalle definizioni mediante funzioni esponenziali con manipolazioni algebriche elementari.

Al contrario delle corrispondenti funzioni trigonometriche, le funzioni iperboliche non sono periodiche.

L'argomento *t* delle funzioni seno e coseno che definiscono la circonferenza può essere interpretato naturalmente come un angolo; la $t$argomento delle funzioni iperboliche rappresenta invece due volte l'area del settore compreso tra il segmento che collega l'origine con il punto $(cosht, sinht)$ su un ramo dell'iperbole equilatera, l'arco di tale iperbole che si conclude nel punto $(t, 0)$ sull'asse x e il segmento sull'asse x da questo punto all'origine.

Le funzioni iperboliche soddisfano molte identità, simili a corrispondenti identità trigonometriche.

In effetti, la **formula di Osborne** specifica che si può convertire ogni identità trigonometrica in una identità iperbolica sviluppandola completamente in termini di potenze intere di seni e coseni, trasformando ogni sin in sinh e ogni cos in cosh e infine cambiando il segno di ogni termine che contiene un prodotto di due sinh. Procedendo in questo modo, ad esempio, si trovano i teoremi di addizione:

$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$

e le formule dell'*angolo dimezzato*

$$\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cosh(x)}{2}}$$
$$\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}}$$

Funzioni iperboliche inverse

Le inverse delle funzioni iperboliche sono:

- $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
- $\operatorname{arccosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$
- $\operatorname{arctanh}(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
- $\operatorname{arcoth}(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
- $\operatorname{arcsech}(x) = \ln\left(\frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x}\right)$
- $\operatorname{arccsch}(x) = \ln\left(\frac{1 \pm \sqrt{1+x^2}}{x}\right)$