



Forme differenziali

Corso di Matematica 2

2014/2015

Corso di studi in Ingegneria meccanica

Forme differenziali lineari

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un insieme aperto e siano $A, B, C: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue in Ω . Si definisce forma differenziale ω in Ω l'espressione

$$\omega = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz$$

Data la curva orientata semplice e regolare γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

si chiama integrale della forma differenziale lineare (o anche integrale curvilineo di seconda specie), lungo la curva γ , il numero

$$\int_a^b (A(x(t), y(t), z(t))x'(t) + B(x(t), y(t), z(t))y'(t) + C(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt$$

Tale espressione viene anche indicata:

$$\int_{\gamma} A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz$$

o, anche

$$\int_{\gamma} \omega$$

Forme differenziali lineari



Con queste operazioni, l'insieme delle forme differenziali lineari, definite in un insieme Ω di \mathbb{R}^2 , è uno spazio vettoriale.

Per una forma differenziale si possono definire le seguenti operazioni:

I – Dato un vettore $r(r_1, r_2)$ e un punto $(x, y) \in \Omega$, il prodotto scalare tra ω ed r è:

$$\omega \cdot r = A(x, y)r_1 + B(x, y)r_2$$

II – dato uno scalare $c \in \mathbb{R}$ ed una funzione definita in Ω e a valori in \mathbb{R} , si definisce la moltiplicazione della forma differenziale c per f nel modo seguente: $c \cdot \omega = cXdx + cYdy$

$$\text{e } f \cdot \omega = (fX)dx + (fY)dy;$$

III – date due forme differenziali ω_1 e ω_2 si definisce addizione di ω_1 e ω_2 la seguente forma:

$$\omega_1 + \omega_2 = (X_1dx + Y_1dy) + (X_2dx + Y_2dy) = (X_1 + X_2)dx + (Y_1 + Y_2)dy$$

Osservazione

Consideriamo, ora, il differenziale di una funzione $f(x, y)$. Si ha $df = f_x dx + f_y dy$. Quindi il differenziale di una funzione f si può vedere come una forma differenziale lineare.

Non vale, ovviamente, il viceversa: data una forma lineare, non è detto che ci sia una funzione f il cui differenziale coincida con la forma lineare stessa.

Indipendenza dalla parametrizzazione

Teorema - La formula

$$\int_a^b (A(x(t), y(t), z(t))x'(t) + B(x(t), y(t), z(t))y'(t) + C(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt$$

non dipende dalla parametrizzazione della curva orientata semplice e regolare γ ma dipendono dall'orientazione della curva stessa.

Dimostrazione

Si riporta, nelle slides successive, la scannerizzazione del testo Anichini-Conti «Analisi Matematica 2»

Indipendenza dalla parametrizzazione

Facciamo vedere ora che le formule che abbiamo presentato non dipendono dalla parametrizzazione della curva orientata, semplice e regolare γ , ma dipendono solo dall'orientazione della curva stessa.

Per semplicità proveremo questo risultato nel caso di curve di \mathbb{R}^2 ; nel caso tridimensionale la dimostrazione è analoga.

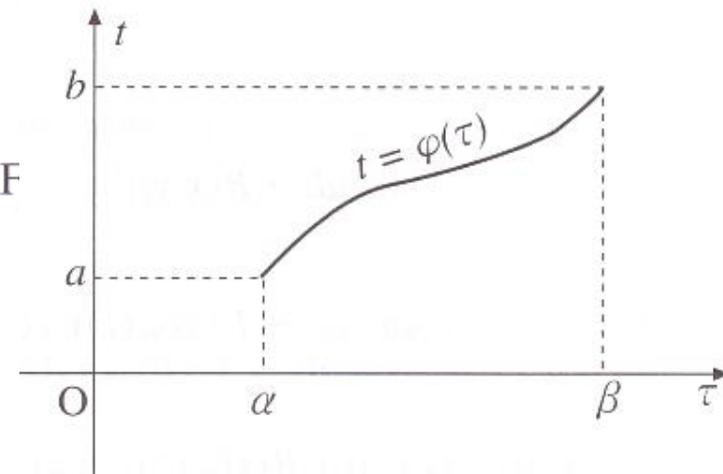
Siano γ e δ due curve orientate, semplici, regolari ed equivalenti. Sia $\varphi(\tau)$ il cambiamento di parametro; dunque sia:

$$\gamma:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \delta:[\alpha,\beta] \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\varphi:[\alpha,\beta] \rightarrow [a,b], \quad \varphi \in C^1[\alpha,\beta], \varphi'(\tau) \neq 0 \quad \text{per ogni } \tau \in [\alpha,\beta],$$

$$\gamma(\varphi(\tau)) = \delta(\tau).$$

Se $\varphi'(\tau) > 0$, per ogni $\tau \in [\alpha,\beta]$, si ha (si veda la F



$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b.$$

Indipendenza dalla parametrizzazione

Se $\varphi'(\tau) < 0$, per ogni $\tau \in [\alpha, \beta]$, si ha (si veda la Figura 6.2):

$$\varphi(\alpha) = b, \quad \varphi(\beta) = a.$$

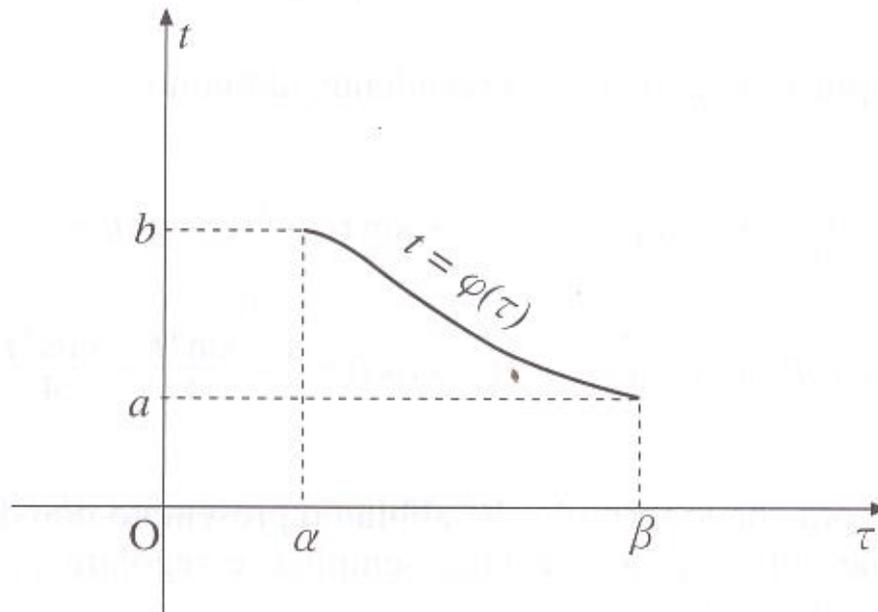


Figura 6.2

Supponiamo che la curva γ abbia equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in [a, b]; \end{cases}$$

Indipendenza dalla parametrizzazione

di conseguenza la curva δ ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x(\varphi(\tau)) \\ y = y(\varphi(\tau)), \quad \tau \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\delta} A(x, y) dx + B(x, y) dy &= \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (A(x(\varphi(\tau)), y(\varphi(\tau))) (x(\varphi(\tau)))' + B(x(\varphi(\tau)), y(\varphi(\tau))) (y(\varphi(\tau)))') d\tau = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (A(x(\varphi(\tau)), y(\varphi(\tau))) x'(\varphi(\tau)) + B(x(\varphi(\tau)), y(\varphi(\tau))) y'(\varphi(\tau))) \varphi'(\tau) d\tau = \end{aligned}$$

(per la formula di integrazione per sostituzione, ponendo $t = \varphi(\tau)$)

Indipendenza dalla parametrizzazione

$$\begin{aligned} &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} (A(x(t), y(t))x'(t) + B(x(t), y(t))y'(t)) dt = \\ &= \begin{cases} \int_a^b (A(x(t), y(t))x'(t) + B(x(t), y(t))y'(t)) dt & \text{se } \varphi'(\tau) > 0, \\ -\int_a^b (A(x(t), y(t))x'(t) + B(x(t), y(t))y'(t)) dt & \text{se } \varphi'(\tau) < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Dunque otteniamo:

$$\int_{\delta} A(x, y) dx + B(x, y) dy = \int_{\gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy,$$

se le curve δ e γ hanno la stessa orientazione; otteniamo invece

$$\int_{\delta} A(x, y) dx + B(x, y) dy = -\int_{\gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy,$$

se le curve δ e γ hanno orientazione opposta.

Forme differenziali su curve generalmente regolari

Nel caso di una curva orientata, semplice regolare γ , poiché γ si può considerare come l'unione di curve regolari $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, l'integrale della forma differenziale esiste anche in questo caso e si ha:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \dots + \int_{\gamma_n} \omega$$

Nel fare gli integrali curvilinei delle forme differenziali occorre prestare molta attenzione all'orientamento della curva. Per questo motivo, gli integrali curvilinei delle forme differenziali sono detti integrali orientati. Vale, infatti, il seguente teorema:

Teorema

Data una forma differenziale ω e una curva regolare γ si ha:

$$\int_{-\gamma} \omega = - \int_{+\gamma} \omega$$

Teorema fondamentale per gli integrali curvilinei

Assegnata una funzione $f(x, y)$, si consideri la forma differenziale data dal suo differenziale: $\omega = df = f_x dx + f_y dy$.

Data una curva regolare $+\gamma$ espressa mediante rappresentazione parametrica da $(x(t); y(t))$ (o mediante la funzione vettoriale r), si ha

$$\int_{+\gamma} df = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

o, equivalentemente

$$\int_{+\gamma} \nabla f \cdot dr = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

Su molti testi, l'integrale curvilineo delle forme differenziali viene denominato integrale curvilineo di seconda specie.

Forme differenziali esatte

Definizione

Una forma differenziale $\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i$ definita in un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice esatta se è il differenziale di qualche funzione, in altre parole, se esiste una funzione detta primitiva della forma ω :

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

di classe C^1 tale che:

$$\omega = df$$

o più esplicitamente se $\forall x \in A$:

$$a_k(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

Formula fondamentale per gli integrali curvilinei di forme esatte

Sia ω una forma differenziale, definita in A ed esatta e sia f una sua primitiva.

Allora

$$\int_{\gamma} \omega = f(P_2) - f(P_1)$$

dove P_1 e P_2 sono rispettivamente il primo e il secondo estremo della curva γ

Forme differenziali esatte

Formula fondamentale per gli integrali curvilinei di forme esatte

Sia ω una forma differenziale, definita in A ed esatta e sia f una sua primitiva.

Allora

$$\int_{\gamma} \omega = f(P_2) - f(P_1)$$

dove P_1 e P_2 sono rispettivamente il primo e il secondo estremo della curva γ

Dimostrazione

Sia $f: A \rightarrow R$ una primitiva della forma differenziale e siano $x = x(t)$, $y = y(t)$ con $t \in [a, b]$, le equazioni parametriche della curva γ . Ricordando la formula di derivazione delle funzioni composte, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_{\gamma} a(x, y) dx + b(x, y) dy = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t) \right] dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} [f(x(t), y(t))] = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a)) = f(P_2) - f(P_1) \end{aligned}$$

Forme differenziali chiuse

Definizione

Una forma differenziale $\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i$ definita in un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ e di classe $C^1(A)$, si dice chiusa se verifica la seguente relazione:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_k} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i}$$

Osservazione

Se una forma differenziale di classe C^1 è esatta, allora è chiusa; in generale non vale il viceversa. La condizione di essere chiusa, senza opportune ipotesi sul dominio della forma differenziale, non assicura che la forma sia esatta.

Un particolare tipo di insieme ci permette di stabilire alcune importanti proprietà per le forme differenziali, se definite su questi insiemi. Si tratta degli **insiemi semplicemente connessi**.

Domini connessi

Definizione

Un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice connesso se, qualunque siano i punti P e Q presi in A , esiste una linea poligonale che è contenuta tutta in A e che ha P e Q come estremi.

Lemma 1

Sia f una funzione di classe C^1 definita in un insieme aperto e connesso A di \mathbb{R}^2 . Se, $\forall (x, y) \in A$ risulta $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$, allora f è una funzione costante in A .

Lemma 2

Se F e G sono primitive, di classe C^1 , definite in un insieme aperto e connesso, della stessa forma differenziale lineare ω , allora differiscono per una costante.

Lemma 3

Data $\omega = Xdx + Ydy$ una forma differenziale lineare, di classe C^0 e definita in un insieme aperto e connesso, se F è una sua primitiva, allora ogni primitiva di ω è del tipo $F + cost$.

Forme differenziali esatte: caratterizzazione

Dato un aperto connesso $A \subset \mathbb{R}^2$ e data una forma differenziale lineare ω di classe C^0 in A , le seguenti proposizioni sono equivalenti:

I - ω è esatta;

II – se γ è una qualunque curva generalmente regolare, chiusa e contenuta in A , allora

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

III – Se P_0 e P sono due punti qualunque in A e γ_1 e γ_2 sono due curve generalmente regolari orientate contenute in A , che hanno entrambe come primo estremo P_0 e come secondo estremo P , allora:

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

vale a dire che l'integrale curvilineo dipende solo dagli estremi e non dal cammino percorso;

Si veda dimostrazione sul testo Fusco-Marcellini-Sbordone Analisi Matematica due pp. 356-357-358

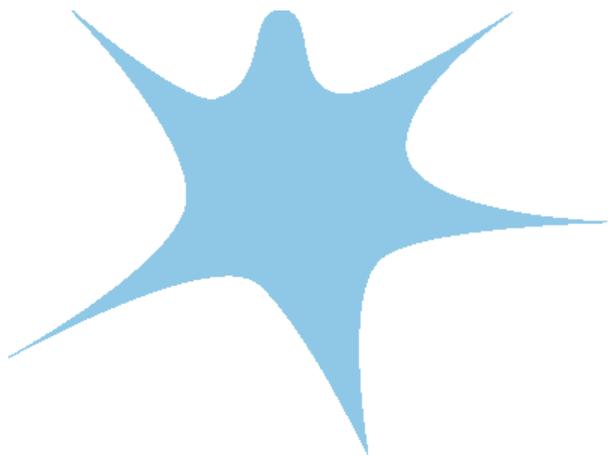
Insiemi stellati

I criteri di esattezza per le forme differenziali danno delle condizioni necessarie e sufficienti affinché una forma differenziale risulti esatta ma sono piuttosto difficili da applicare.

Esistono altre condizioni sufficienti di maggiore utilità pratica ma occorre che tali forme siano definite in particolari aperti di R^n

Definizione

Un insieme A si dice stellato (rispetto a un suo punto x_0) se $\forall x \in A$ il segmento di estremi x_0 e x è tutto contenuto in A :



Ogni insieme convesso è un insieme stellato, mentre non è valido il viceversa.

Un insieme è convesso se e solo se è un insieme stellato rispetto a tutti i punti dell'insieme.

Chiusura ed esattezza

Teorema:

Data $\omega = Xdx + Ydy$ una forma differenziale lineare di classe C^1 in un insieme aperto A di R^2 .

$$\omega \text{ esatta} \Rightarrow \omega \text{ chiusa}$$

Dimostrazione

Se ω è esatta, vuol dire che esiste una primitiva F tale che $F_x = X$ e $F_y = Y$.

Per ipotesi ω è di classe C^1 , cioè le derivate parziali di X e Y sono continue. Di conseguenza F è di classe C^2 (poiché le sue derivate parziali del secondo ordine coincidono con le derivate parziali prime di X e Y). Inoltre si ha

$$\frac{\partial F^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial F^2}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

Per il teorema di Schwartz, le derivate parziali miste di F coincidono, quindi risulta

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

L'asserto è provato.

Domini semplicemente connessi

Definizione

Un sottoinsieme di R^2 , A aperto, si dice semplicemente connesso se:

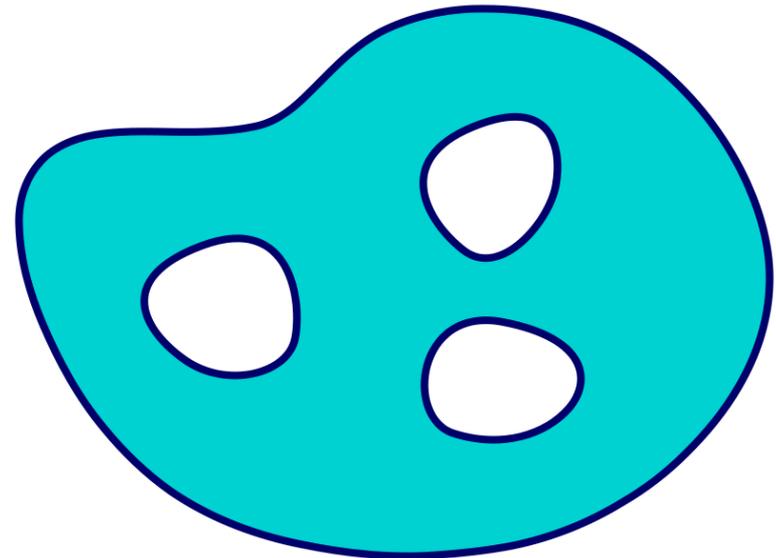
1. è connesso
2. ogni curva generalmente regolare, chiusa e semplice contenuta in A è la frontiera di un insieme limitato contenuto in A .

Osservazione

Dire che A è un insieme semplicemente connesso vuol dire che l'insieme è "senza buchi", in quanto ogni curva chiusa e semplice, generalmente regolare, può essere deformata con continuità fino a ridursi ad un singolo punto.

Una corona circolare ha "buchi" e, infatti, non è semplicemente connesso. Il piano privato di un punto non è semplicemente connesso.

L'interno di un cerchio è semplicemente connesso. La circonferenza non è semplicemente connesso.



Forme differenziali in aperti stellati

Teorema

Sia ω una forma differenziale lineare di classe C^1 in A aperto stellato. Allora se ω è chiusa è esatta

Dimostrazione

Supponiamo per fissare le idee che A sia stellato rispetto all'origine. In questo caso, se $x \in A$, il segmento di equazione $\gamma(t) = tx$ che unisce x all'origine è tutto contenuto in A .

Definiamo

$$f(x) = \int_{\gamma} \omega = \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(tx) x_i dt$$

Si può far vedere che $f(x)$ è una primitiva della forma differenziale ω , che dunque risulta esatta. Ricordando il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, avremo

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (a_i(tx) x_i) dt$$

Forme differenziali in aperti stellati

Effettuando la derivata a secondo membro e tenuto conto che ω è una forma differenziale chiusa, si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial a_k}{\partial x_i}(tx) tx_i + a_k(tx) \right) dt$$

Posto $g(t) = ta_k(tx)$
risulta

$$g'(t) = a_k(tx) + \sum_{i=1}^N t \frac{\partial a_k}{\partial x_i}(tx) x_i$$

e dunque, in conclusione, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 g'(t) dt = g(1) - g(0) = a_k(x)$$

cosicché

$$df = \omega$$



Teorema

Sia ω una forma differenziale lineare di classe C^1 in A aperto stellato. Allora se ω è chiusa è esatta

Forme differenziali in aperti semplicemente connessi

Teorema.

Sia ω una forma differenziale lineare di classe C^1 definita in un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ semplicemente connesso. Se la forma differenziale è chiusa allora la forma è anche esatta in A .

Dimostrazione

Consideriamo una forma differenziale $\omega = a(x; y)dx + b(x; y)dy$, definita in un aperto A di \mathbb{R}^2 ; allora in base ai teoremi di caratterizzazione delle forme esatte occorre provare che per ogni curva regolare a tratti e chiusa, contenuta in A , risulta

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

Supponiamo che la curva γ sia semplice ed orientata in senso antiorario, per l'ipotesi della semplice connessione di A possiamo considerare D il dominio limitato in A di cui la curva è la frontiera.

Si ha allora

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} ((a(x, y), b(x, y)), T(x, y)) ds = \int_{\partial D} ((b(x, y), -a(x, y)), N(x, y)) ds$$

dove $T(x, y)$ e $N(x, y)$ sono rispettivamente i versori tangente e normale a γ e di conseguenza anche alla frontiera ∂D del dominio D . Essendo la forma chiusa, dal teorema della divergenza*, segue che

$$\int_{\gamma} \omega = \iint \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

Campi vettoriali

Definizione

Si dice campo vettoriale in R^3 un'applicazione continua

$$F: \Omega \subset R^3 \rightarrow R^3$$

ovvero

$$F(x, y, z) \in \Omega = (A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z))$$

con $(x, y, z) \in \Omega$ e con $A, B, C: \Omega \rightarrow R$ funzioni continue.

Osservazione

Il motivo del nome campo vettoriale è il seguente:

La funzione $F(x, y, z)$ associa ad ogni punto $P(x, y, z) \in \Omega$ il punto $P' = F(x, y, z)$. Poiché il punto P' determina il vettore $\overline{OP'}$ applicato nell'origine, possiamo dire che la funzione $F(x, y, z)$ associa ad ogni punto P il vettore $\overline{OP'}$. Se poi consideriamo il vettore \bar{v} applicato nel punto P ed equivalente al vettore $\overline{OP'}$, possiamo dire che la funzione $F(x, y, z)$ associa a ogni punto P di Ω uno ed un solo vettore \bar{v} applicato in P

Campi vettoriali

Ad esempio il campo vettoriale

$$F: \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

così definito:

$$F(x, y, z) = GM \left(\frac{-x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \frac{-y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \frac{-z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \right)$$

dove G è la costante di gravitazione universale, rappresenta il campo di forza gravitazionali, cioè la forza generata da un corpo di massa M , posto nell'origine, che agisce su un corpo di massa unitaria, posto nel punto $P(x, y, z)$.

Se poniamo $\vec{r} = (x, y, z) = P$ l'espressione precedente può essere scritta anche nel seguente modo più compatto:

$$F(P) = -\frac{GM\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$

Il modulo di $F(P)$ è dato da

$$\|F(P)\| = \frac{GM}{\|\vec{r}\|^2}$$

Lavoro di una forza

Un esempio in cui vediamo applicata una forma differenziale in fisica è il lavoro compiuto da un campo di forze. Se consideriamo una particella che si muove lungo una curva, indicando con \bar{s} la distanza percorsa dalla particella lungo la curva $+\gamma$, e con $\bar{F} = (X, Y)$ una forza che agisce sulla particella mentre essa si sposta di un tratto $d\bar{s}$, si definisce lavoro elementare eseguito da \bar{F} il prodotto scalare:

$$dL = \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

In coordinate cartesiane, e limitandoci al caso bidimensionale, si può scrivere

$$dL = Xdx + Ydy$$

Il lavoro elementare è dunque una forma differenziale.

Il lavoro totale lungo tutta la curva $+\gamma$ è definito tramite l'integrale della forma differenziale dL :

$$L = \int_{+\gamma} dL = \int_a^b X(x(t), y(t))dx + Y(x(t), y(t))dy$$

Dove T è il versore tangente a γ

Circuitazione

Se indichiamo con T il versore tangente a γ , cioè:

$$T(t) = \frac{(x'(t), y'(t), z'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}}$$

si può anche scrivere:

$$L = \int_{\gamma} dL = \int_{\gamma} F \cdot T \cdot ds$$

Nel caso in cui γ sia una curva chiusa, l'integrale

$$\int_{\gamma} F \cdot T \cdot ds$$

viene anche detto *circuitazione* di F lungo γ , e indicato con il simbolo

$$\oint F \cdot T \cdot ds$$

L'operatore nabla

Alcuni concetti e grandezze della fisica, in particolare in elettrologia, sono legati alle derivate spaziali di campi scalari e vettoriali. Queste operazioni si prestano ad essere rappresentate convenientemente per mezzo dell'operatore vettoriale nabla (detto anche atled nel mondo anglosassone) indicato col simbolo ∇

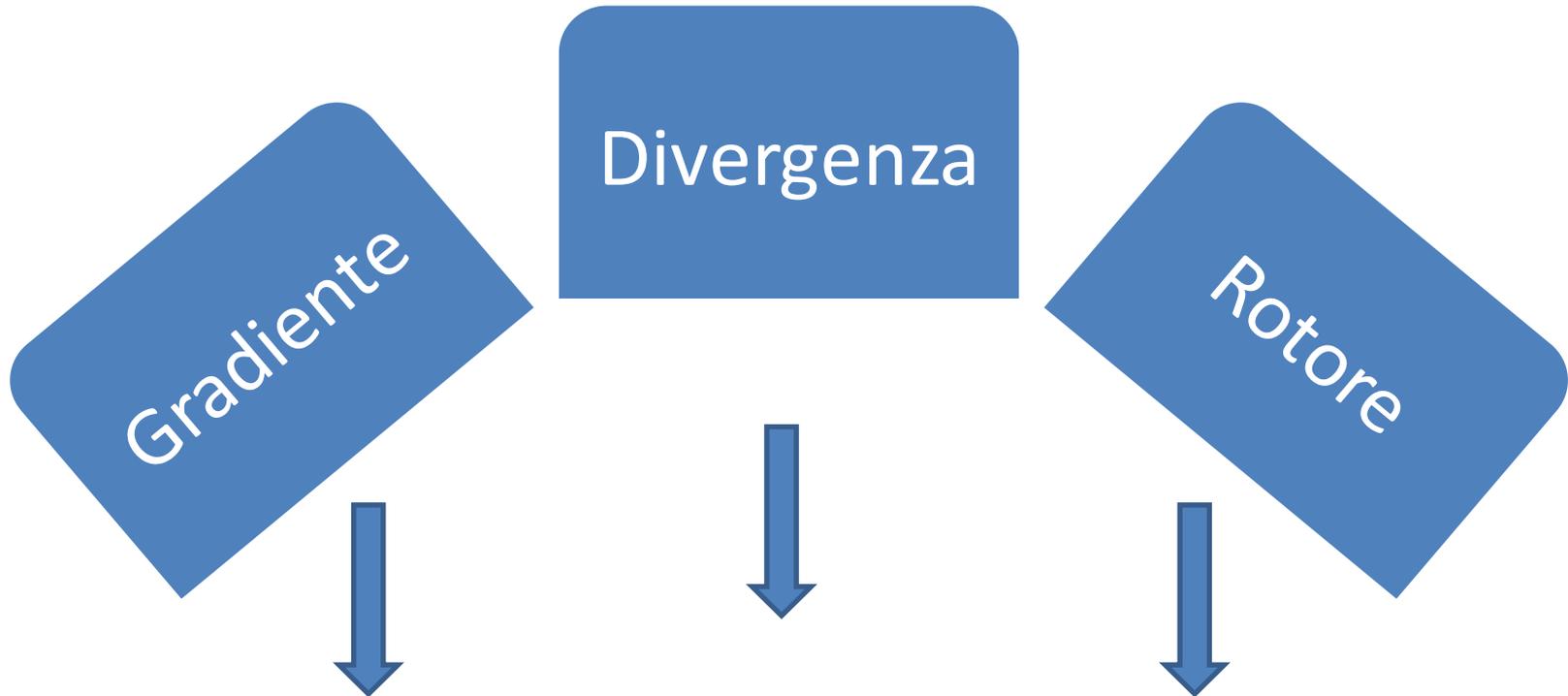
Esso è definito nel seguente modo:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

L'operatore nabla può essere applicato a funzioni della posizione (campi) sia scalari che vettoriali e si può dimostrare che nel calcolo dei risultati è lecito considerarlo come un normale vettore e applicare le regole usuali dell'algebra vettoriale.

L'operatore nabla

I modi di applicare l'operatore nabla sono 3



L'operatore nabla viene applicato direttamente a uno scalare e produce una grandezza vettoriale

$$\nabla s = \mathbf{i} \frac{\partial s}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial s}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial s}{\partial z} = \text{grad } s$$

In questo caso nabla opera tramite il prodotto scalare su una grandezza vettoriale e produce un risultato scalare

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = \text{div } \mathbf{w}$$

In questo caso nabla opera tramite il prodotto vettoriale su una grandezza vettoriale e produce un risultato vettoriale

$$\nabla \times \mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{w}$$

Il Gradiente

Il **gradiente** di una funzione a valori reali (ovvero di un campo scalare) è una funzione vettoriale.

Il gradiente di una funzione è spesso definito come il vettore che ha come componenti le derivate parziali della funzione (anche se questo vale solo se si utilizzano coordinate cartesiane *ortonormali*)

In altri termini, Il gradiente della funzione reale f è il vettore normale alla superficie di equazione $f(x, y, z) = 0$ nel punto (x, y, z) definito da

$$\nabla f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z} = \text{grad } f$$

dove $f: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ aventi derivate parziali prime in A .

Proprietà del Gradiente

- Se per una coppia di campi vale la relazione $\nabla s = w$, la stessa relazione vale per qualsiasi altro campo scalare $s'(x, y, z) = s(x, y, z) + c$, dove c è una costante.
- In ogni punto la direzione del gradiente corrisponde a quella in cui il campo scalare cresce più velocemente.
- Un campo posizionale s per cui $\nabla s = w$ viene comunemente chiamato potenziale (scalare) del campo vettoriale w

La Divergenza

La divergenza è una quantità scalare che determina la tendenza delle linee di flusso di un campo vettoriale a confluire verso una sorgente o diramarsi (divergere) da essa. Tale comportamento può essere descritto considerando una regione di spazio e osservando il flusso (uscite o entrante) del campo vettoriale attraverso la superficie (chiusa) che delimita tale regione: se il flusso è uscente il campo si comporta come se all'interno della regione ci fosse una "sorgente", mentre se è entrante è come se ci fosse un "pozzo".

Definizione

Si consideri la funzione vettoriale $\mathbf{v}: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e si supponga che essa abbia derivate parziali prime in A , allora è possibile definire la divergenza di \mathbf{v} come segue:

la divergenza della funzione vettoriale $\mathbf{v}: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è uno scalare dato da

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

Il rotore

Dato in R^3 il campo vettoriale $F = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$ che supponiamo di classe C^1 , indichiamo con $\text{rot}F$ il campo vettoriale

$$\text{rot}F = (C_y - B_x)\hat{i} - (C_x - A_z)\hat{j} + (B_x - A_y)\hat{k}$$

che si ottiene sviluppando il determinante della seguente matrice simbolica

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial & \partial & \partial \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

Teorema

Il campo vettoriale $F = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$ di classe C^1 è irrotazionale se esso ammette rotore nullo

Teorema

Il campo vettoriale $F = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$ è irrotazionale se e solo se la forma differenziale

$$\omega = a(x, y, z)dx + b(x, y, z)dy + c(x, y, z)dz$$

è chiusa

Campi conservativi

Così come la definizione di campo di forze irrotazionale deriva da quella di chiusura di una forma differenziale, allo stesso modo la definizione di campi di forze conservativi discende da quella di esattezza di una forma differenziale, vale infatti la seguente

Definizione 1

Un campo vettoriale $F(a, b, c)$ è conservativo se e solo se la forma differenziale

$$\omega = a(x, y, z)dx + b(x, y, z)dy + c(x, y, z)dz$$

è esatta.

In genere una definizione di campo conservativo del tutto equivalente alla precedente è la seguente.

Definizione 2

Un campo vettoriale $F(a, b, c)$ è conservativo se esiste una funzione

$U: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 in A , tale che il gradiente di U coincida con F in A :

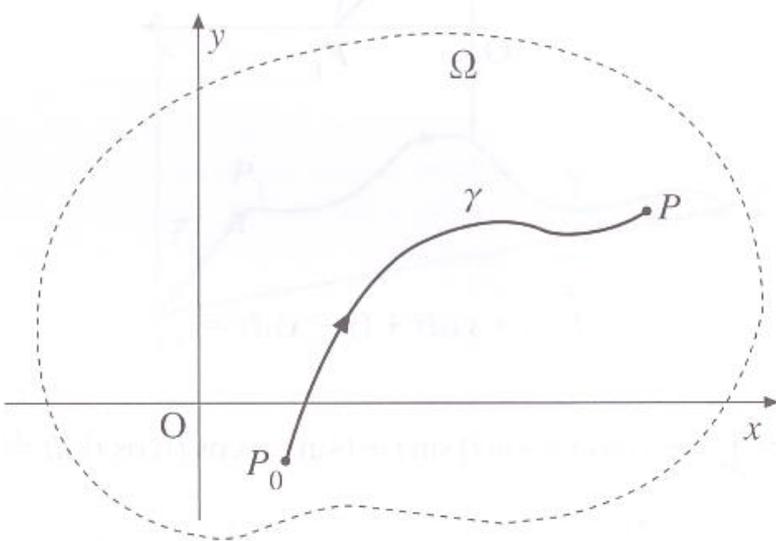
$$\nabla U(x, y, z) = F(x, y, z)$$

La funzione U è anche detta potenziale del campo.

Campi conservativi

Teorema

Un campo vettoriale definito in un insieme aperto e connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è conservativo sse, $\forall P_0, P_1 \in \Omega$ il lavoro compiuto lungo una curva orientata, semplice e generalmente regolare γ , contenuta in Ω e congiungente P_0 e P_1 (nel verso che va da P_0 a P_1) è indipendente dalla curva γ



Dimostrazione

Fissiamo un punto $P_0(x_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ e prendiamo un generico altro punto $P(x, y) \in \Omega$. Definiamo

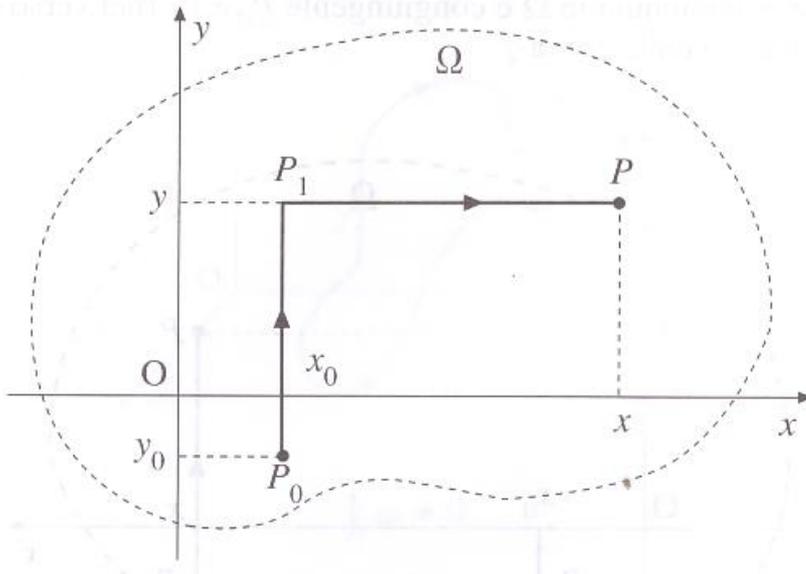
$$U = \int_{\gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy$$

dove γ è una qualunque curva orientata, semplice e generalmente regolare contenuta in Ω , che unisce i punti P_0 e P_1

La funzione $U(x, y)$ è ben definita perché l'integrale che compare al secondo membro è indipendente dalla curva γ ; inoltre esiste almeno una curva orientata, semplice e generalmente regolare che unisce P_0 con P_1 . Infatti essendo Ω un insieme aperto e connesso sappiamo che esiste una spezzata di estremi P_0 e P_1 tutta contenuta in Ω

Campi conservativi

Supponiamo per semplicità che la spezzata sia formata da due segmenti (analogamente avviene per più segmenti)



Facciamo vedere che si ha:

$$U_x(x, y) = A(x, y), U_y(x, y) = B(x, y)$$

Prendiamo come curva γ la spezzata in figura. I punti del segmento P_0P_1 hanno coordinate (x_0, t) , $y_0 \leq t \leq y$; i punti del segmento P_1P hanno coordinate (t, y) , $x_0 \leq t \leq x$.

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_{y_0}^y (A(x_0, t) \cdot 0 + B(x_0, t)) dt + \int_{x_0}^x (A(t, y) + B(t, y) \cdot 0) dt \\ &= \int_{y_0}^y (B(x_0, t)) dt + \int_{x_0}^x (A(t, y)) dt \end{aligned}$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che $U_y(x, y) = B(x, y)$

Campi conservativi

Teorema

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un insieme aperto e connesso e sia $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale. Allora $F(x, y, z) = (A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z))$ è conservativo sse si ha:

$$\int_{\gamma} A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz = 0$$

per ogni curva orientata, semplice, generalmente regolare e chiusa contenuta in Ω .

Dimostrazione

È chiaro che se il campo vettoriale è conservativo, allora per ogni curva semplice regolare e chiusa γ contenuta in Ω si ha:

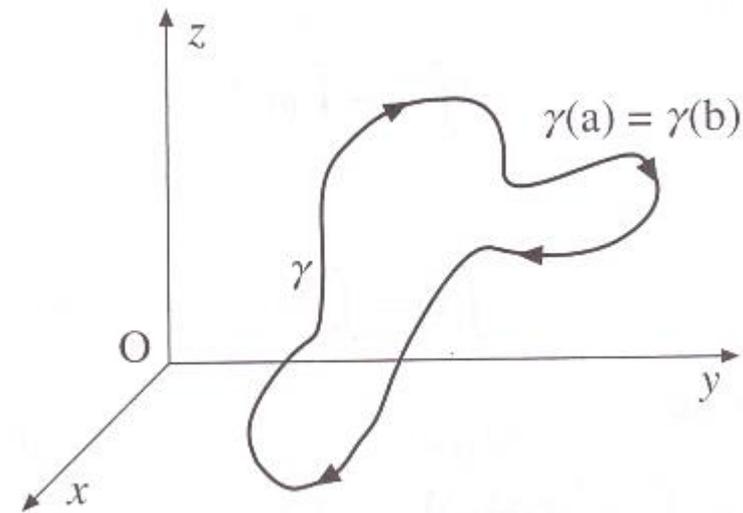
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz \\ = U(x(b), y(b), z(b)) - U(x(a), y(a), z(a)) = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) = 0 \end{aligned}$$

Viceversa, supponiamo che valga la formula della tesi e riscriviamola nel seguente modo:

$$\oint_{\gamma} \omega = 0$$

Siano P_0 e P due punti qualunque di Ω . Facciamo vedere che l'integrale è indipendente dalla curva semplice e generalmente regolare che unisce i punti P_0 e P nel verso che va da P_0 a P

Campi conservativi



Siano γ e δ due curve orientate, semplici, generalmente regolari e contenute in Ω che uniscono i punti P_0 e P .

Sia γ_1 la curva formata dall'unione delle curve γ e $-\delta$. Chiaramente γ_1 è una curva orientata semplice chiusa generalmente regolare; dunque dalle ipotesi si ha che

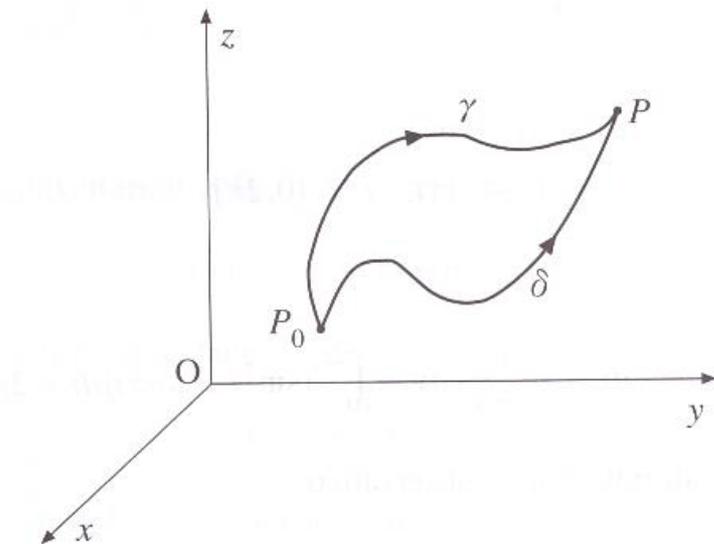
$$\oint_{\gamma_1} \omega = 0$$

Ma abbiamo:

$$\oint_{\gamma_1} \omega = \oint_{\gamma} \omega + \oint_{-\delta} \omega = 0$$

e cioè:

$$\oint_{\gamma} \omega = \oint_{\delta} \omega$$



Caratterizzazione dei campi conservativi

Sia $F: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

I – F è conservativo (cioè ammette una funzione potenziale);

II – date due curve γ_1 e γ_2 continue in A e aventi gli stessi estremi (nell'ordine), si ha:

$$\int_{\gamma_1} F \cdot T \cdot ds = \int_{\gamma_2} F \cdot T \cdot ds$$

III – data una qualunque curva chiusa γ contenuta in A , la sua circuitazione è nulla:

$$\oint F \cdot T \cdot ds = 0$$