Forme differenziali lineari in tre variabili

Sia $\Omega \subset R^3$ un insieme aperto e siano $A, B, C: \Omega \to R$ funzioni continue in Ω. Consideriamo la forma differenziale ω in Ω

$$\omega = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz$$

Si dice che la forma differenziale è integrabile in Ω o che essa è un differenziale esatto in Ω quando esiste una funzione $f(x,y,z)$ continua in Ω la quale, in ogni punto di Ω abbia come differenziale totale la forma $A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz$, tale cioè che sia:

$$df = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz$$

ossia

$$\frac{df}{dx} = A(x,y,z), \qquad \frac{df}{dy} = B(x,y,z), \qquad \frac{df}{dz} = C(x,y,z).$$

Ogni funzione $f(x,y,z)$ che soddisfi le condizioni sopra scritte si chiama una primitiva o un integrale della forma differenziale.

Vale il seguente teorema

Se le funzioni $A(x,y,z)$, $B(x,y,z)$, $C(x,y,z)$ sono funzioni continue assieme alle derivate parziali

$$\frac{\partial A}{\partial y}, \quad \frac{\partial A}{\partial z}, \quad \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial z}, \quad \frac{\partial C}{\partial x}, \quad \frac{\partial C}{\partial y}$$

nel parallelepipedo T:

$$T: a \le x \le b, c \le y \le d, e \le z \le f$$

allora condizione necessaria e sufficiente affinché l'espressione differenziale sia un differenziale esatto è che si abbia:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}, \qquad \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial x}, \qquad \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}$$

In tal caso l'integrale indefinito della dorma differenziale è dato dalla formula:

$$f(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} A(x,y,z)dx + \int_{y_0}^{y} B(x,y,z)dy + \int_{z_0}^{z} C(x,y,z)dz + c$$

dove (x_0, y_0, z_0) è un punto arbitrario di T e c una costante arbitraria

Teorema

La formula

$$\int_a^b (A\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + B\,\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) + C\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t))dt$$

non dipende dalla parametrizzazione della curva orientata semplice e regolare γ ma dipendono dall'orientazione della curva stessa.

Nel caso di una curve orientata, semplice regolare γ, poiché γ si può considerare come l'unione di curve regolari $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, l'integrale della forma differenziale esiste anche in questo caso e si ha:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \cdots + \int_{\gamma_n} \omega$$

Nel fare gli integrali curvilinei delle forme differenziali occorre prestare molta attenzione all'orientamento della curva. Per questo motivo, gli integrali curvilinei delle forme differenziali sono detti integrali orientati.

ES. 1

Riconoscere che la forma differenziale

$$\boldsymbol{\omega(x,y,z) = \left(2xy + \frac{z}{1+x^2}\right)dx + \left(x^2 + 2yz\right)dy + \left(y^2 + arctgx\right)dz}$$

è un differenziale esatto e calcolare il suo integrale indefinito

Il problema dell'integrazione si può porre in tutto lo spazio. Nel nostro caso è:

$$A(x,y,z) = 2xy + \frac{z}{1+x^2}; \quad B(x,y,z) = x^2 + 2yz; \quad C(x,y,z) = y^2 + arctgx$$

Si constata facilmente che risulta:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y} = 2y$$

Quindi la forma differenziale è esatta.

Per trovare l'integrale si procede come segue:

$$f(x,y,z) = \int_0^x \left(2xy + \frac{z}{1+x^2}\right)dx + \int_0^y (x^2 + 2yz)dy + \int_0^z (y^2 + arctgx)dz + c = \boldsymbol{x^2y + zarctgx + y^2z + c}$$

Cambiamento di variabili negli integrali doppi

Spesso conviene esprimere un Dominio D rispetto a cui calcoliamo un integrale doppio delle variabili x e y, attraverso un nuovo dominio T, sfruttando eventuali simmetrie sia del dominio di integrazione che della funzione integranda.

Un cambiamento di variabili è una funzione

$$T:(u,v)\in R^2 \longmapsto (x(u,v),y(u,v))\in R^2$$

Consideriamo una funzione ***T***, lineare dal piano *uv* al piano *xy*:

$$T\left(\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}au+bv\\cu+dv\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix},\qquad A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$$

Per via della linearità, ***T*** trasforma parallelogrammi del piano *uv* in altri parallelogrammi del piano *xy*.

Vi è un rapporto costante tra l'area di un parallelogramma *S* e quella della sua immagine ***T***(*S*), il cui fattore di proporzionalità è il modulo del determinante della matrice associata *A:*

$$Area\big(T(S)\big)=detA\cdot Area(S)$$

Cosa succede se *S* non è un parallelogramma? Dato che una funzione lineare manda parallelogrammi in parallelogrammi, allora manda poligoni in poligoni, mantenendo il medesimo fattore di proporzionalità fra l'area del poligono e quello della sua immagine. In particolare, manda poligoni inclusi in *S* in poligoni inclusi in ***T***(*S*) e ugualmente per quelli contenenti *S*, che hanno immagine contenente ***T***(*S*). Perciò possiamo concludere in base alla definizione di misura secondo Peano–Jordan che la

relazione di proporzionalità fra l'area di un insieme e quella della sua immagine vale per tutti gli insiemi dotati di area.

Definizione

*Se **T** è una funzione lineare, allora, per ogni insieme S, misurabile secondo Peano Jordan, si ha*

$$Area\big(T(S)\big)=det(J_T)\cdot Area(S)$$

*dove $J_T=A$ è la matrice associata, nonché la matrice jacobiana di **T**.*

La matrice jacobiana della funzione

$$T:(u,v)\in R^2 \longmapsto (x(u,v),y(u,v))\in R^2$$

è:

$$J_T(u,v)=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}$$

Teorema del cambiamento di variabili

Se $T:A\subset R^2\to R^2$ è una trasformazione di classe C^1, $T(u,v)=(x(u,v),y(u,v)$ che sia:

- biunivoca da un aperto misurabile S del piano uv in un aperto misurabile $T=T(S)$ del piano xy;
- Con jacobiano sempre non nullo e limitato

(una trasformazione che gode di queste proprietà si chiama anche diffeomorfismo)

Allora, $\forall f:T\to R$ integrabile su T, vale la formula:

$$\iint_T f(x,y)dxdy = \iint_S f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Esercizio n°2

Calcolare l'integrale doppio:

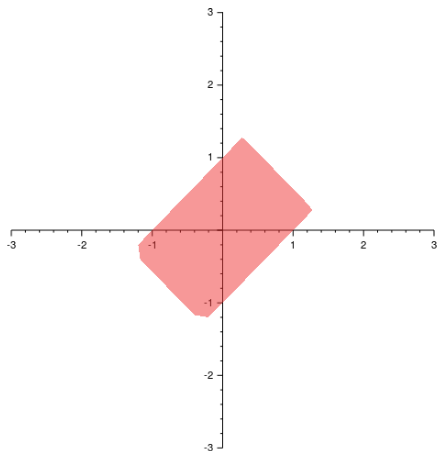
$$\iint_D \boldsymbol{\cos(x+y)\cdot e^{x-y} dxdy}$$

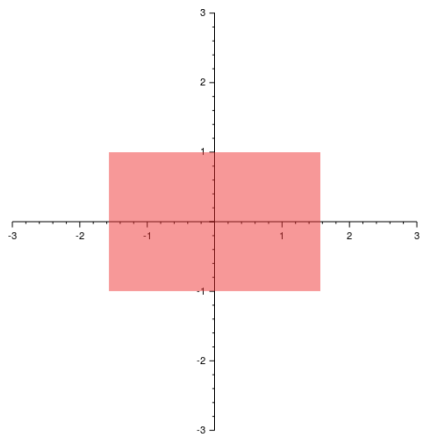
Essendo D il dominio definito dalle limitazioni:

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \le \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}, \quad |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \le \boldsymbol{1}$$

Si può effettuare un cambiamento di variabili

$$x+y=u; x-y=v$$





Al dominio D, corrisponde nel piano (u,v) il dominio T definito dalle limitazioni:

$$|u| \le \frac{\pi}{2}, \quad |v| \le 1$$

Il determinante funzionale vale:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Si ha quindi:

$$\iint_D \cos(x+y)\cdot e^{x-y} dxdy = \frac{1}{2}\iint_T cosu\cdot e^v dudv = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cosudu \int_{-1}^{1} e^v dv = e - \frac{1}{e}$$

Relazione tra integrale doppio e integrale curvilineo (formule di Gauss-Green) nel piano

Definizione

Se D è un dominio limitato in R^2, la cui frontiera ∂D sia una curva di Jordan regolare a tratti, si dice che ∂D è orientata positivamente se è orientata in senso antiorario e si denoterà col simbolo $+\partial D$

Le formule di Gauss-Green sono applicabili quando l'insieme di integrazione è un dominio regolare. Esse permettono di calcolare un integrale doppio attraverso un integrale curvilineo di una forma differenziale lineare esteso alla frontiera di A.

L'uso di tali formule è molto utile quando il dominio di integrazione (regolare) è dato in rappresentazione parametrica.

Dato l'integrale doppio

$$\iint_A f(x,y)dxdy$$

occorre determinare una funzione F(x,y) tale che, in A, si abbia:

$$f(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}$$

oppure

$$f(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

La funzione $F(x,y)$ può essere calcolata come:

$$F(x,y) = \int f(x,y)dx \qquad e \qquad F(x,y) = \int f(x,y)dy$$

In base alle formule di Gauss-Green, si ha:

$$\iint_A \frac{\partial}{\partial x} F dxdy = \int_{+\partial A} F(x,y)dy$$

$$\iint_A \frac{\partial}{\partial x} F dxdy = -\int_{+\partial A} F(x,y)dx$$

Lemma

Sia D un dominio semplice (o normale) rispetto agli assi e $F(x,y) = P(x,y) + Q(x,y)$ un campo vettoriale definito dalla chiusura di D di classe C^1:

Se $D = \{(x,y) \in R^2 : a < x < b,\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$ con $\varphi_1(x)\ e\ \varphi_2(x)$ regolari a tratti, allora

$$\iint_D P_y dxdy = -\int_{+\partial D} Pdx$$

Se $D = \{(x,y) \in R^2 : c < y < d,\ \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\}$ con $\psi_1(y)$ e $\psi_2(y)$ regolari a tratti, allora

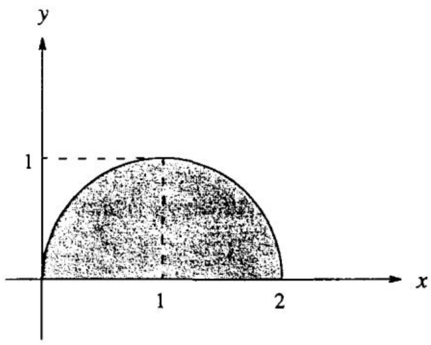
$$\iint_D Q_x dxdy = \int_{+\partial D} Qdy$$

Esercizio n°3

Determinare il seguente integrale

$$\iint_A \boldsymbol{xydxdy}$$

dove A è il dominio rappresentato in figura



Svolgiamo l'integrale senza le formule di Gauss-Green

Utilizziamo la trasformazione in coordinate polari:

$$\begin{cases} x = 1 + \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \end{cases} \qquad 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le \pi$$

$$\iint_A xydxdy = \int_0^1 \int_0^\pi (1 + \rho cos\theta)\rho sin\theta \rho d\rho d\theta = \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^\pi sin\theta d\theta + \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^\pi sin\theta cos\theta d\theta =$$

$$= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 [-cos\theta]_0^\pi + \frac{1}{2}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \int_0^\pi sin2\theta d\theta = \frac{2}{3}$$

Calcoliamo lo stesso integrale facendo uso delle formule di Gauss-Green:

$$F(x,y) = \int f(x,y)dx = \int xydx = y\frac{x^2}{2}$$

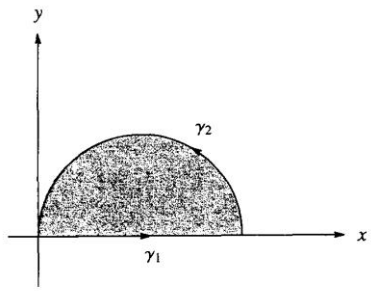
Allora

$$\int_{+\partial A} F(x,y)dy = \int_{+\partial A} y\frac{x^2}{2}dy = \int_{\gamma_1} y\frac{x^2}{2}dy + \int_{\gamma_2} y\frac{x^2}{2}dy$$

dove

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad 0 \le t \le 2$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 1 + cost \\ y = sint \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$



Lungo γ_1 l'integrale è evidentemente nullo.

$$\int_{\gamma_2} y \frac{x^2}{2} dy = \int_0^{\pi} \frac{(1 + cost)^2 sint}{2} costdt = \frac{2}{3}$$

Esercizio n°4

Calcolare il seguente integrale:

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$$

dove $D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$

Calcoliamo l'integrale doppio senza usare le formule di Gauss-Green. Si ha che:

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy = \iint_D x^2\, dxdy + \iint_D y^2\, dxdy = \int_0^1 x^2 dx \int_{x^2}^{x} dy + \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} y^2 dy =$$

$$= \int_0^1 x^2(x - x^2) dx + \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{x} = \int_0^1 (x^3 - x^4) dx + \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{3}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{12} - \frac{x^7}{21}\right]_0^1 = \frac{3}{35}$$

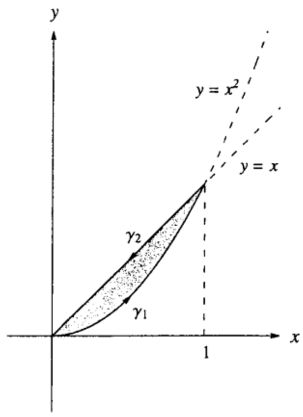
Con le formule di Gauss-Green:

$$F(x, y) = \int f(x, y) dx = \int (x^2 + y^2) dx = \frac{x^3}{3} + xy^2$$

Allora si ha:

$$\int_{+\partial A} F(x, y) dy = \int_{+\partial A} \left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right) dy = \int_{\gamma_1} \left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right) dy - \int_{\gamma_2} \left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right) dy$$

dove γ_1 e γ_2 hanno rappresentazioni parametriche:



$$\gamma_1: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_2: \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$$

Si noti che γ_2 ha verso di percorrenza opposto a quello richiesto.

Calcolando separatamente gli integrali lungo le due curve si ha:

$$\int_{\gamma_1} \left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right) dy = \int_0^1 \left(\frac{t^3}{3} + t^5\right) 2t dt = 2\int_0^1 \left(\frac{t^4}{3} + t^6\right) dt = \frac{44}{105}$$

$$\int_{\gamma_2} \left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right) dy = \int_0^1 \left(\frac{t^3}{3} + t^3\right) dt = \frac{1}{3}$$

In definitiva

$$\int_{\gamma_1} \left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right) dy - \int_{\gamma_2} \left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right) dy = \frac{44}{105} - \frac{1}{3} = \frac{3}{35}$$

Possiamo adoperare l'altra formula di Gauss indistintamente, ottenendo lo stesso risultato:

$$F(x,y) = \int f(x,y) dx = \int (x^2 + y^2) dy = \frac{y^3}{3} + x^2 y$$

Segue che:

$$-\int_{+\partial A} F(x,y) dx = -\int_{\gamma_1} \left(\frac{y^3}{3} + x^2 y\right) dx + \int_{\gamma_2} \left(\frac{y^3}{3} + x^2 y\right) dx$$

$$\int_{\gamma_1} \left(\frac{y^3}{3} + x^2 y\right) dx = \int_0^1 \left(t^4 + \frac{t^6}{3}\right) dt = \frac{26}{105}$$

$$\int_{\gamma_2} \left(\frac{y^3}{3} + x^2 y\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{t^3}{3} + t^3\right) dt = \frac{1}{3}$$

In definitiva:

$$-\int_{+\partial A} F(x,y) dx = -\int_{\gamma_1} \left(\frac{y^3}{3} + x^2 y\right) dx + \int_{\gamma_2} \left(\frac{y^3}{3} + x^2 y\right) dx = -\frac{26}{105} + \frac{1}{3} = \frac{3}{35}$$