ESERCIZI SUI LIMITI DI FUNZIONE

Esercizio proposto N°1

Verificare che

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x}=2$$

Si ricordi la definizione di limite finito in un punto:

$$\forall\varepsilon>0,\exists I_{x_0}\ t.c.|f(x)-l|<\varepsilon$$

Pertanto, applicando la definizione al caso concreto, si ha:

$$\left|\frac{x+3}{x}-2\right|<\varepsilon$$

o, ciò che è lo stesso:

$$-\varepsilon<\left|\frac{x+3-2x}{x}\right|<\varepsilon$$

che equivale a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases}\frac{-x+3}{x}<\varepsilon\\ \frac{-x+3}{x}>-\varepsilon\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\frac{-x+3-\varepsilon x}{x}<0\\ \frac{-x+3+\varepsilon x}{x}>0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\left|\begin{array}{l}x>\frac{3}{1+\varepsilon}\\ x>0\end{array}\right.\\ \left|\begin{array}{l}x<\frac{3}{1-\varepsilon}\\ x>0\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}x<0\cup x>\frac{3}{1+\varepsilon}\\ 0<x<\frac{3}{1-\varepsilon}\end{cases}$$

In definitiva:

$$\frac{3}{1+\varepsilon}<x<\frac{3}{1-\varepsilon}$$

Esercizio proposto n°2

Verificare che

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x}=3$$

Ricordando la definizione di limite

$$\forall\varepsilon>0,\qquad\exists I_3\ \ t.c.\ \ \left|\frac{3x+1}{x}-3\right|<\varepsilon$$

ovvero

$$-\varepsilon < \frac{3x+1-3x}{x} < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \qquad -\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \qquad x < -\frac{1}{\varepsilon} \vee x > \frac{1}{\varepsilon}$$

Ho trovato cioè un intorno di +∞ $\left]\frac{1}{\varepsilon}; +\infty\right[$

Esercizio proposto n°3

Verificare che

$$\lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, I_{-\infty} \quad t.c. \quad |e^{2x}| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \qquad -\varepsilon < e^{2x} < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \begin{cases} e^{2x} < -\varepsilon & \forall x \in R \\ e^{2x} < \varepsilon & x < \dfrac{log\varepsilon}{2} \end{cases}$$

La disequazione è vera per ogni x dell'intervallo $\left]-\infty; \frac{log\varepsilon}{2}\right[$ che è un intorno di $-\infty$; il limite è dunque verificato.

Esercizio proposto n°4

Verificare che

$$\lim_{x \to 4} \frac{1}{(x-4)^2} = +\infty$$

Dalla definizione di limite infinito in un punto si ha che:

$$\forall M > 0 \quad \exists I_{x_0} \quad t.c. \quad f(x) > M$$

che, applicato al nostro caso particolare, diventa:

$$\frac{1}{(x-4)^2} < M$$

ovvero

$$(x-4)^2 < \frac{1}{M} \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{1}{\sqrt{M}} < x-4 < \frac{1}{\sqrt{M}} \qquad \Longrightarrow \qquad 4-\frac{1}{\sqrt{M}} < x < 4+\frac{1}{\sqrt{M}}$$

Ho trovato un intorno circolare di centro 4 e raggio $\delta = 1/\sqrt{M}$

Verificare che valgono i seguenti limiti:

1	$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$	16	$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x+10} = 0$
2	$\lim_{x\to 2^-} (1-2x) = -3$	17	$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x-1}{2x+1} = 2$
3	$\lim_{x\to 3^+} e^{\frac{2}{3-x}} = 0$	18	$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$
4	$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\sqrt{2-x}} = +\infty$	19	$\lim_{x\to+\infty} log\frac{x}{x-1} = 0$
5	$\lim_{x\to -1^-} (2x+3) = 1$	20	$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{2x+1} = 0$
6	$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} = 0$	21	$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x} = 2$
7	$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{1}{x}} = +\infty$	22	$\lim_{x\to-\infty} log(1+e^x) = 0$
8	$\lim_{x\to 7} \frac{1}{(x-7)^2} = +\infty$	23	$\lim_{x\to+\infty} (x^3+3) = +\infty$
9	$\lim_{x\to 5} \frac{5}{(x-5)^4} = +\infty$	24	$\lim_{x\to+\infty} 2^{x-4} = +\infty$
10	$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{2}{x}} = +\infty$	25	$\lim_{x\to+\infty} e^{x^2} = +\infty$
11	$\lim_{x\to -3} \frac{2}{(x+3)^2} = +\infty$	26	$\lim_{x\to+\infty} log(x^4-x^3) = +\infty$
12	$\lim_{x\to 1^-} \log(1-x^2) = -\infty$	27	$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{logx} = +\infty$
13	$\lim_{x\to 1} \frac{1}{logx} = \infty$	28	$\lim_{x\to 0} log^4 x = +\infty$
14	$\lim_{x\to 1^-} \log\sqrt{1-x} = -\infty$	29	$\lim_{x\to+\infty} log^4 x = +\infty$
15	$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2-2^x} = -\infty$	30	$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[4]{x^2-3x+5} = +\infty$

Limiti in forma indeterminata ∞/∞

Le funzioni più semplici che si presentano nella forma indeterminata ∞/∞ sono le funzioni razionali per x che tende a ∞:

$$\lim_{x\to\pm\infty} r(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n \cdot x^n}{b_m \cdot x^m}$$

Dove $a_n \cdot x^n$ e $b_m \cdot x^m$ sono i termini di grado massimo dei polinomi rispettivamente a numeratore e a denominatore, sicché formalmente la relazione sopra scritta si ottiene sopprimendo tutti i termini di grado inferiore a n al numeratore e inferiore a m al denominatore. Si possono verificare le seguenti tre circostanze:

Se n>m	$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n \cdot x^n}{b_m \cdot x^m} = \pm\infty$
Se n<m	$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n \cdot x^n}{b_m \cdot x^m} = 0$
Se n=m	$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n \cdot x^n}{b_m \cdot x^m} = \frac{a_n}{b_m}$

Un analogo comportamento si ha con le funzioni fratte (anche se non razionali) laddove si può applicare il teorema sui limiti delle funzioni composte, come nell'esempio seguente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{log^3x - 5log^2x + 3logx + 1}{7log^3x - log^2x + 2logx + 3}$$

Applicando il teorema sui limiti delle funzioni composte, possiamo porre $logx = y$. Se x tende a 0, y tenderà a infinito:

$$\lim_{x\to 0} \frac{log^3x - 5log^2x + 3logx + 1}{7log^3x - log^2x + 2logx + 3} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^3 - 5y^2 + 3y + 1}{7y^3 - y^2 + 2y + 3} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^3}{7y^3} = \frac{1}{7}$$

Seguendo queste indicazioni risolvi gli esercizi dal 26 a 30

Limiti in forma indeterminata $\infty - \infty$

Esercizio proposto n°5

Si calcoli

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-5}\right)$$

Poiché il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$ si razionalizza la funzione in modo che si abbia

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-5}\right)}{\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-5}\right)}\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-5}\right) = \frac{x+7-x+5}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-5}} = \frac{12}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-5}} = 0$$

Esercizi da svolgere

1	$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-5}\right)$	16	$\lim_{x\to+\infty} 3^x - 2^x = +\infty$
2	$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+4}\right)$	17	$\lim_{x\to+\infty} 3^x - 2^x = +\infty$
3	$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3+x^2-6x+1\right)$	18	$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^3+x+1} = +\infty$
4	$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3+6x^2-5x+3\right)$	19	$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^3+2x^2+x+1} - \sqrt{x^4+3x^2+2} = -\infty$
5	$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-3x^2+3x}{x^2-4x-2}$	20	$\lim_{x\to-3^+} \frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9}$

6	$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-2x^3+3x^2}{x^3-4x-2}$	21	$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+1}-x=3/2$
7	$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3x^2+x^4}{1-5x^4-2x}$	22	$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x+5}-x=-1$
8	$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-x^3+4x^2}{2x^3-x+2}$	23	$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x^4+3x^3+x^2-x+2}-x=3/4$
9	$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-x^2+5}{1-2x^3+2x^2}$	24	$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+5}-\sqrt{x^2+x+1}=1$ (Conviene sottrarre ed aggiungere x)
10	$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-x^3+7}{2-x+3x^4}$	25	$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+4}-\sqrt{x^2+x+1}=0$
11	$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+5}}$	26	$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}-4e^{2x}+2e^x-1}{2e^{3x}+6e^{2x}+5}=1/2$
12	$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x+7}}{x+5}$	27	$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-5e^x+1}{e^{3x}+7e^{2x}-e^x+2}=0$
13	$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+3x^2+x-1}{x^2+4x+3}$	28	$\lim_{x\to0}\frac{2logx+1}{3logx+5}=2/3$
14	$\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x^2+x+1}{x^2+x-2}$	29	$\lim_{x\to0}\frac{3cotgx-1}{cotgx+5}=3$
15	$\lim_{x\to-2^-}\frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}$	30	$\lim_{x\to0}\frac{3cotg^3x-1}{cotg^2x-cotgx+5}=+\infty$

Limiti notevoli

Dai seguenti due limiti la cui validità è opportunamente dimostrabile, derivano molti altri limiti utili per sciogliere forme indeterminate

$\lim_{x\to0}\frac{sinx}{x}=1$	$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

Tabella riassuntiva dei limiti notevoli

$\lim_{x\to0}\frac{sinax}{bx}=\frac{a}{b}$	$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a$
$\lim_{x\to0}\frac{tgx}{x}=1$	$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{nx}=e^{na}$
$\lim_{x\to0}\frac{tgax}{bx}=\frac{a}{b}$	$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=1/e$
$\lim_{x\to0}\frac{1-cosx}{x}=0$	$\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=e^a$
$\lim_{x\to0}\frac{1-cosx}{x^2}=\frac{1}{2}$	$\lim_{x\to0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\log_e a}$
$\lim_{x\to0}\frac{arcsinx}{x}=1$	$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_e a$

$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin ax}{bx}=\frac{a}{b}$	$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=lna$
$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$
$\lim_{x\to 0}\frac{\text{arctg}\, ax}{bx}=\frac{a}{b}$	$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{ax}=1$

Esercizi da svolgere

1	$\lim_{x\to 0}\frac{sin5x}{5x}$	16	$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos3x}{sin^2 3x}$
2	$\lim_{x\to 0}\frac{sinx^2}{x^2}$	17	$\lim_{x\to 0}\frac{sin^2 3x\cdot\log(1-2x)}{(1-cos2x)arctgx}$
3	$\lim_{x\to 0}\frac{sin3x^2}{3x^2}$	18	$\lim_{x\to 0}\frac{(1-cos5x)^2\cdot\left(\sqrt[5]{1+2x}-1\right)sin5x}{arcsin^2 2x\cdot sin^3 2x}$
4	$\lim_{x\to 0}\frac{sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$	19	$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{sin2x^2}}{arctgx}$
5	$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{(x-3)}$	20	$\lim_{x\to 0^-}\frac{log\left(1+\sqrt{arctgx^2}\right)}{e^x-1}$
6	$\lim_{x\to 0}\frac{sin(5^x-1)}{5^x-1}$	21	$\lim_{x\to 0}\frac{sin\left(3^{x^2}-1\right)}{x^2 arcsin^2 x}$
7	$\lim_{x\to 0}\frac{sin^2 7x}{49x^2}$	22	$\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)^3\cdot log^2(1+3x)}{tgx\cdot arcsin^4 x}$
8	$\lim_{x\to 0}\frac{sin^2 5x}{1-cosx}=50$	23	$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\, x-2x}{x-2\,\text{sen}\, x}=1$
9	$\lim_{x\to 0}\frac{tg^3\sqrt[3]{x}}{sin3x}=1/3$	24	$\lim_{x\to 0}\frac{5-5\cos x}{2x\,\text{sen}\, x}=5/4$
10	$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos2x}{sin^2 3x}=2/9$	25	$\lim_{x\to 0}\frac{3-3\cos x}{x\,\text{sen}\, x}=3/2$
11	$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+4x)}{49x^2 arctg2x}=2$	26	$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\, 4x+x}{x}=5$
12	$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+3x}-1}{arcsinx}=3/5$	27	$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\, 3x+5x}{x}=8$
13	$\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{sinx}=log9$	28	$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^x=e^4$

14	$$\lim_{x\to+\infty}\frac{sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{1-cos\left(\frac{1}{x}\right)}=2$$	29	$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+4}{x-1}\right)^x=e^5$$
15	$$\lim_{x\to0}\frac{\text{sen}\,x+2x}{\text{sen}\,x-2x}=-3$$	30	$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(2x+1)}{x}$$

Esercizio proposto n°6

Si voglia calcolare il limite:

$$\lim_{x\to0}\frac{tg^3 2x+log^3(1+x)}{arctg^3 3x+5^{x^4}-1}$$

Tale limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Dividendo numeratore e denominatore per x^3 si ha:

$$\frac{tg^3 2x+log^3(1+x)}{arctg^3 3x+5^{x^4}-1}=\frac{\frac{tg^3 2x}{x^3}+\frac{log^3(1+x)}{x^3}}{\frac{arctg^3 3x}{x^3}+\frac{5^{x^4}-1}{x^3}}=\frac{8\left(\frac{tg2x}{2x}\right)^3+\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^3}{27\left(\frac{arctg3x}{3x}\right)^3+\frac{5^{x^4}-1}{x^4}x}=\frac{1}{3}$$

Esercizio proposto n°7

Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x\to\infty}\left(3^{\frac{1}{x}}\cdot\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$$

Tale limite si presenta nella forma indeterminata $\infty-\infty$.

Possiamo mettere in evidenza x, tenendo presente che $3^{\frac{1}{x}}$ vale 1 per x=0, ottenendo:

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x+1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{x+1}{x^2}}\cdot\frac{x+1}{x^2}\cdot x$$

A proposito del primo fattore possiamo scrivere:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x+1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{x+1}{x^2}}=\lim_{y\to0}\frac{(1+y)^{\frac{1}{2}}-1}{y}=\frac{1}{2}$$

Mentre per il secondo e terzo fattore si ha:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2}\cdot x=1$$

In definitiva si ha:

$$\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Esercizio proposto N°8

Si risolva il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{log(1+5x)}{e^{4x}-1}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Dividendo numeratore e denominatore per x e applicando il teorema del limite del rapporto si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{log(1+5x)}{e^{4x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{log(1+5x)}{x}}{\frac{e^{4x}-1}{x}}=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{log(1+5x)}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{x}}=\frac{5\lim_{x\to 0}\frac{log(1+5x)}{5x}}{4\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{4x}}=\frac{5}{4}$$

Esercizio proposto N°9

Si risolva il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{log(cos5x)}{1-cos^2 3x}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0; conviene aggiungere e sottrarre 1 nell'argomento del logaritmo e scomporre il denominatore:

$$\lim_{x\to 0}\frac{log(cos5x+1-1)}{(1-cos3x)(1+cos3x)}=\frac{1}{1+cos3x}\cdot\frac{log[1+(cos5x-1)]}{cos5x-1}\cdot\frac{cos5x-1}{1-cos3x}=$$

$$=\frac{1}{1+cos3x}\cdot\frac{log[1+(cos5x-1)]}{cos5x-1}\cdot\frac{cos5x-1}{25x^2}\cdot\frac{25x^2}{9x^2}\cdot\frac{9x^2}{1-cos3x}=$$

$$=\frac{25}{9}\cdot\frac{1}{1+cos3x}\cdot\frac{log[1+(cos5x-1)]}{cos5x-1}\frac{cos5x-1}{25x^2}\frac{9x^2}{1-cos3x}=\frac{25}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2=-\frac{25}{18}$$

Esercizio proposto n°10

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{2^x+x-5}-1}{x-2}$$

Per utilizzare i limiti notevoli x dovrebbe tendere a zero. Pertanto si effettua una sostituzione y=x-2

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{2^x+x-5}-1}{x-2}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{2^{y+2}+y+2-5}-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+(4\cdot 2^y+y-4)}-1}{(4\cdot 2^y+y-4)}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{4\cdot 2^y+y+4}{y}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{4(2^y-1)+y}{y}=\frac{1}{3}\left(4\cdot\lim_{y\to 0}\frac{2^y-1}{y}+1\right)=\frac{1}{3}(4log2+1)=\frac{1}{3}(1+log16)$$

Verificare le seguenti uguaglianze:

1	$\lim_{x\to 0}\frac{sin3x+5x^2}{arcsin2x+x^3}=\frac{3}{2}$
2	$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x+sinx}=\frac{1}{2}log\frac{2}{3}$
3	$\lim_{x\to 0}\frac{5^x-3^x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-2x}}=2log\frac{3}{5}$
4	$\lim_{x\to 0}\frac{3^{x^2}-cosx}{log(1+3x^2)}=\frac{2log3+1}{6}$
5	$\lim_{x\to +\infty}\frac{3^{\frac{1}{x^2}}-2^{\frac{1}{x^2}}}{log\left(1+\frac{1}{x}\right)tg\frac{1}{x}}=log\frac{3}{2}$
6	$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{arcsin\frac{1}{x}}=1$
7	$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x^3}-\sqrt{1+x^3}}{(\sqrt[4]{1+x^2}-1)\cdot(3^x-1)}=\frac{2}{log3}$
8	$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^3x}{xsinxcosx}=3/2$
9	$\lim_{x\to 0}\frac{5^x-3^x}{tgx+sinx}=\frac{1}{2}log\frac{5}{3}$
10	$\lim_{x\to 0}\frac{5^x-cosx}{\log(1+3x)}=\frac{1}{3}log5$
11	$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x+1}}=log\frac{2}{3}$
12	$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x^3}-\sqrt{1+x^3}}{(5^x-1)\left(\sqrt[4]{1+x^2}-1\right)}=\frac{4}{log5}$

13	$$\lim_{x\to 0}\frac{3sinx-2cosx}{3^{artgx}-xlogx}=-2$$
14	$$\lim_{x\to 0}\frac{log(1+sin^2 3x)+tg^3x}{\sqrt{1+arctg^2x}-1+x^4}=18$$
15	$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{arcsin^2x}-1+tg^4x}{1-cos2x+3sin^5x}=\frac{1}{2}log3$$
16	$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{x^2}-cosx}{\log(1+3x^2)}=\frac{2log3+1}{6}$$
17	$$\lim_{x\to 3}\frac{arcsin(3^x-27)}{artg(x-3)}=27log3$$
18	$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+artg(3sinx)}-1}{artg[log(1+x)]}=\frac{3}{4}$$
19	$$\lim_{x\to 0}\frac{9^{arctg(sinx)}-3^{arctgx}}{x+artgx}=\frac{log3}{2}$$
20	$$\lim_{x\to 0}\frac{sin3x-sin4x}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}}=2$$

Determina gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni

1	$y=\frac{\ln x+1}{x}$ $\quad [x=0, y=0]$	6	$y=(x+2)\cdot e^{x-1}$ $\quad [y=0]$
2	$y=\frac{\ln x-2}{x}$ $\quad [x=0, y=0]$	7	$y=(x-2)\cdot e^{-x-1}$ $\quad [y=0]$
3	$y=\frac{3x^2-x+1}{x+1}$ $\quad [x=-1, y=3x-4]$	8	$y=\sqrt{9x^2+4x-1}$ $\quad \left[y=\pm 3x\pm\frac{2}{3}\right]$
4	$y=\frac{2x^2-2x+3}{x+2}$ $\quad [x=-2, y=2x-6]$	9	$y=\sqrt{4x^2+5x-2}$ $\quad \left[y=\pm 2x\pm\frac{5}{4}\right]$
5	$y=\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{2x^2+x-15}$	10	$y=\frac{\sqrt{x^3-1}}{x-4}$