Richiami teorici

Sia $z = f(P) = f(x, y)$ una funzione di due variabili definita in un insieme A e sia $P_0(x_0, y_0)$ un punto interno ad A. Se R è un dominio regolare di centro P_0 e di dimensioni $2h$ e $2k$, la funzione della sola variabile x, $f(x, y_0)$ risulta definita nell'intervallo $(x_0 - h, x_0 + h)$.

Se la funzione $f(x, y_0)$ ammette derivata nel punto x_0 essa si chiama derivata parziale prima rispetto a x della funzione $f(x, y)$, calcolata nel punto $P_0(x_0, y_0)$ e la indicheremo con la notazione $f_x(x_0, y_0)$ oppure $\frac{\partial f}{\partial x}$

Per definizione si ha, quindi:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_{0,} y_0)}{\Delta x}$$

Le considerazioni fatte valgono allo stesso modo per la derivata parziale rispetto alla variabile y.

Per la definizione, si ha, pertanto:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_{0,} y_0)}{\Delta y}$$

Contrariamente a quanto accadeva per le funzioni di una variabile, la derivabilità parziale di una funzione di due variabili non implica la continuità della funzione. Infatti, la derivabilità parziale rispetto a una delle due variabili x e y implica la continuità parziale rispetto alle due variabili separatamente e questa non implica la continuità totale.

Sia data una funzione $f(x, y)$ definita in un insieme aperto $A \subset R^2$, cioè

$$f: A \subset R^2 \to R$$

Sia $P_0(x_0, y_0) \in A$ e prendiamo un intorno $I(P_0, \delta) \subset A$.

La funzione $f(x, y)$ si dice differenziabile nel punto P_0 se esistono due numeri reali L ed M, dipendenti da (x_0, y_0) tali che, $\forall (x, y) \in I(P_0, \delta)$ si ha:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = L(x - x_0) + M(y - y_0) + \omega(x_0, y_0; x, y)$$

con

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{\omega(x_0, y_0; x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

La funzione $\omega(x_0, y_0; x, y)$, come conseguenza della precedente scrittura è una funzione infinitesima per $(x, y) \to (x_0, y_0)$

Cioè

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \omega(x_0,y_0;x,y) = 0$$

Teorema:

Se la funzione $f(x,y)$ è differenziabile in P_0, allora essa è continua in P_0

Dimostrazione:

Essendo A aperto, (x_0,y_0) è un punto di accumulazione per A e per la continuità delle funzioni $g(x,y) = x - x_0$ e $h(x,y) = y - y_0$:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) + L(x-x_0) + M(y-y_0) = f(x_0,y_0)$$

Vediamo ora quanto valgono L ed M:

$$L = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

dunque

$$L = f_x(x_0,y_0)$$

Analogamente

$$M = f_y(x_0,y_0)$$

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \omega(x_0,y_0;x,y)$$

L'espressione

$$df = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

si chiama il differenziale della funzione $f(x,y)$ nel punto (x_0,y_0)

Il differenziale di una funzione può essere (tradizionalmente) scritto anche nel modo seguente

$$df = f_x(x_0,y_0)dx + f_y(x_0,y_0)dy$$

Si può osservare che una funzione differenziabile in un punto è derivabile in quel punto. Non vale il viceversa: esistono esempi di funzioni che sono sia continue sia derivabili e che, tuttavia, non sono differenziabili in tale punto.

Es. 1 – Si determinino le derivate parziali prime della funzione:

$$\boldsymbol{f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}}$$

Il campo di esistenza della funzione è R^2. Le derivate parziali sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

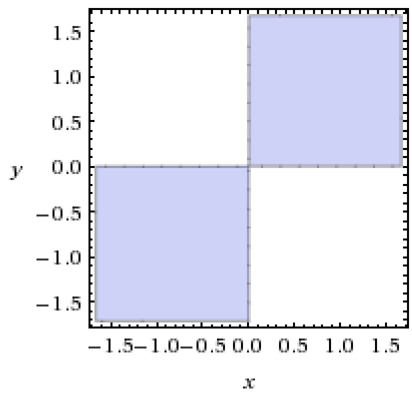
Es. 2 – Si determinino il campo di esistenza e le derivate parziali prime della funzione:

$$\boldsymbol{f(x,y) = \sqrt{x\left(y+\frac{1}{y}\right)}}$$

Il campo di esistenza è stabilito dalle seguenti posizioni:

$$\begin{cases} x\left(y+\dfrac{1}{y}\right) \geq 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y+\dfrac{1}{y} \geq 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ y+\dfrac{1}{y} < 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Risolvendo il sistema si ottiene che il campo di esistenza è la parte di piano inclusa nel primo e nel terzo quadrante, semiassi esclusi:



Es. 3 – La funzione

$$\boldsymbol{f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}}$$

è continua nel punto (0,0)

Infatti, usando le coordinate polari, si ha:

$$f(rcos\theta, rsin\theta) = rcos^2\theta sin\theta$$

da cui otteniamo

$$|f(rcos\theta, rsin\theta)| = r|cos^2\theta sin\theta| \leq r$$

Perciò

$$\lim_{r \to 0} f(rcos\theta, rsin\theta) = 0$$

uniformemente rispetto a θ e, di conseguenza, si ha:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0,0)$$

La funzione è derivabile nel punto $(0,0)$.

Infatti si ha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

Dunque otteniamo

$$f_x(0,0) = 0$$

Analogamente

$$f_y(0,0) = 0$$

Proviamo ora che f non è differenziabile in $(0,0)$.

Infatti sostituendo

$$L = f_x(0,0) = 0, \quad M = f_y(0,0) = 0$$

nell'espressione

$$f(x,y) - f(x_0, y_0) = L(x - x_0) + M(y - y_0) + \omega(x_0, y_0; x, y)$$

Si può far vedere che $\omega(x_0, y_0; x, y)$ non è un infinitesimo.

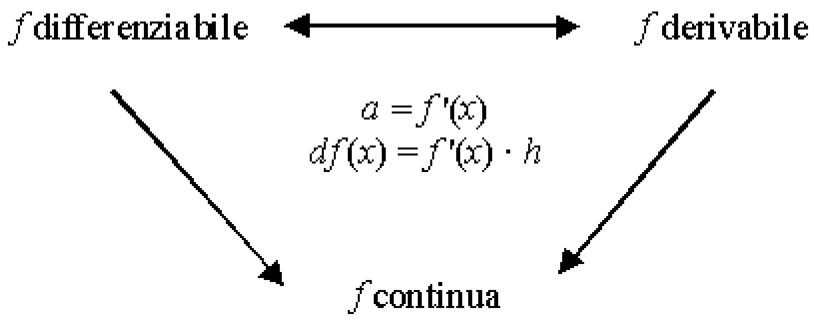
A tale scopo basta mostrare che non esiste il limite

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

Passando a coordinate polari, si vede facilmente che il limite dipende da θ e perciò non è uniforme rispetto a θ:

$$\lim_{r \to 0} \frac{r^3 cos^2\theta sin\theta}{\sqrt{(r^2 cos^2\theta + r^2 sin^2\theta)^3}} = \lim_{r \to 0} cos^2\theta sin\theta$$

Dunque il limite non esiste e, di conseguenza, la funzione data non è differenziabile nell'origine.



Esercizi sulle derivate parziali

Calcolare le derivate parziali (prime e seconde) delle seguenti funzioni

1	$f(x,y) = (1-x+y)^2$	16	$f(x,y) = x^2 artg\frac{y}{x}$
2	$f(x,y) = cos(xy)$	17	$f(x,y) = log\frac{x^2-1}{y^2-3}$
3	$f(x,y) = log\left(sin\frac{1+x}{y}\right)$	18	$f(x,y) = x^y$
4	$f(x,y) = sin(2x+3y)$	19	$f(x,y) = log\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{y+\sqrt{1+y^2}}$
5	$f(x,y) = arctg\frac{y}{x}$	20	$f(x,y) = log\sqrt{x^2+y^2}$
6	$f(x,y) = y - log(x+y^2)$	21	$f(x,y) = \frac{e^x}{e^y}$
7	$f(x,y) = tg(x^3y^4)$	22	$f(x,y) = arcsin\frac{x-y}{x+y}$
8	$f(x,y) = x^y \cdot \frac{logx}{y}$	23	$f(x,y) = log(2x+2y)$
9	$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$	24	$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{y+3}$
10	$f(x,y) = xcosy + ycosx$	25	$f(x,y) = e^x(siny+cosy)$
11	$f(x,y) = e^x + (cosy)^2$	26	$f(x,y) = e^x\left(\frac{y-3}{x+y^2}\right)$
12	$f(x,y) = x\sqrt{x}$	27	$f(x,y) = arctg\frac{x-y}{1+xy}$
13	$f(x,y) = arctg\frac{x+y}{x-y}$	28	$f(x,y,z) = xyz$
14	$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2(x^2+y^2)}$	29	$f(x,y,z) = x^5y^4 + x^6z^2$
15	$f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$	30	$f(x,y,z) = x^2y + y^2z + xz^2$

Es. 4

Assegnata la funzione

$$\boldsymbol{f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{y+3}}$$

si trovi l'espressione del piano tangente alla superficie nel punto $\boldsymbol{P_0(2,2)}$.

La funzione è definita in tutto il piano cartesiano, escluso i punti appartenenti alla retta di equazione $y = -3$. Il punto $P_0(2,2) \in A$ è un punto di accumulazione per A, pertanto ha senso la ricerca dell'espressione del piano tangente alla superficie nel punto dello spazio $P_0(x_0, y_0, z_0)$ con $z_0 = f(2,2) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Si calcolano le derivate parziali:

$$f_x = \frac{1}{y+3} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f_y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{(y+3)^2}$$

Si valutano tali derivate nel punto $P_0(2,2)$:

$$f_x(2,2) = \frac{1}{y+3} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{5\sqrt{5}}$$

$$f_y(2,2) = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{(y+3)^2} = -\frac{1}{5\sqrt{5}}$$

L'equazione del piano tangente è dato dall'espressione:

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

che, nel nostro caso diventa:

$$z = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{5\sqrt{5}}(x-2) - \frac{1}{5\sqrt{5}}(y-2)$$

Determinare l'equazione del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni, in corrispondenza del punto a fianco indicato

1	$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $P(1;1)$	9	$f(x,y) = xlog(x+y)$ $(1;1)$
2	$f(x,y) = log(x^2-y)$ $P(2;1)$	10	$f(x,y) = xy$ $P(\sqrt{2};\sqrt{2})$
3	$f(x,y) = \frac{x-1}{y^2-4}$ $P(2;3)$	11	$f(x,y) = \sqrt[3]{2x+xy^3}$ $P(1;0)$
4	$f(x,y) = x^2+y^2$ $P(1;2)$	12	$f(x,y) = y^4-3x^2$ $P(1;0)$
5	$f(x,y) = (y+1)e^{xy}$ $P(1;0)$	13	$f(x,y) = arcsin(x^2+2y^2)$ $(0;\sqrt{2}/2)$
6	$f(x,y) = artg(xy)$ $P(1;1)$	14	$f(x,y) = e^{-x^2+y^4}$ $P(1;1)$
7	$f(x,y) = cosx \cdot siny$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	15	$f(x,y) = \sin(x+y)$ $P(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$
8	$f(x,y) = x^3y+xy^3$ $(1;1)$	16	$f(x,y) = x \cdot logy$ $P(1;e)$

Gradiente – Derivate direzionali

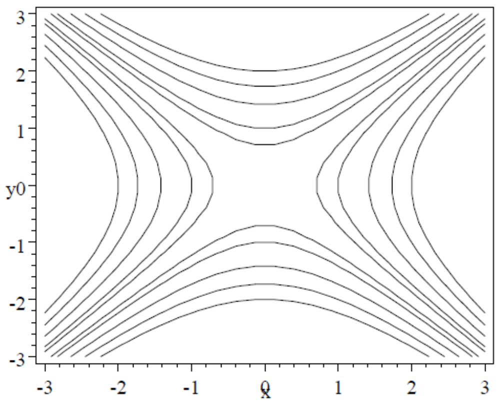
Se $f(x,y)$ è una funzione derivabile in punto (x,y), in tale punto è possibile definire il gradiente di f, indicato con ∇f oppure con $grad f$, che per definizione è il vettore di R^2 avente per componenti le derivate parziali di f:

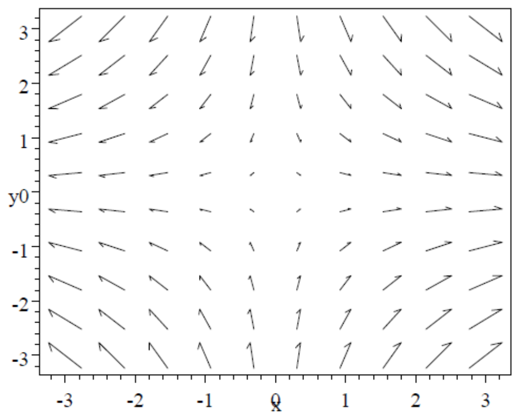
$$\nabla f(x,y) = \left(f_x(x,y), f_y(x,y)\right)$$

La derivata $f'(x)$, di una funzione di una variabile $f(x)$, è anch'essa una funzione di una variabile. Nel caso di una funzione di due variabili $f(x,y)$ si ha invece che il vettore gradiente, visto come funzione della coppia $(x,y), (x,y) \to \nabla f(x,y)$ è una funzione da $R^2 \to R^2$. Si ha così che, nonostante f sia una funzione scalare, la funzione ∇f è una funzione vettoriale che a volte chiameremo campo vettoriale.

Es. 5 – Sia $f(x,y) = x^2 - y^2$. Calcolare il gradiente di f. Cosa ci dicono modulo e direzione del vettore gradiente?

Si ha che $\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$.
Per esempio, $\nabla f(0,0) = (0,0); \nabla f(1,1) = (2,-2); \nabla f(2,4) = (4,-8)$



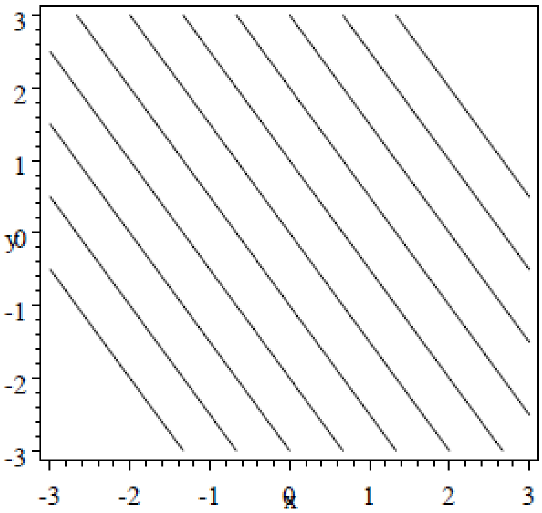


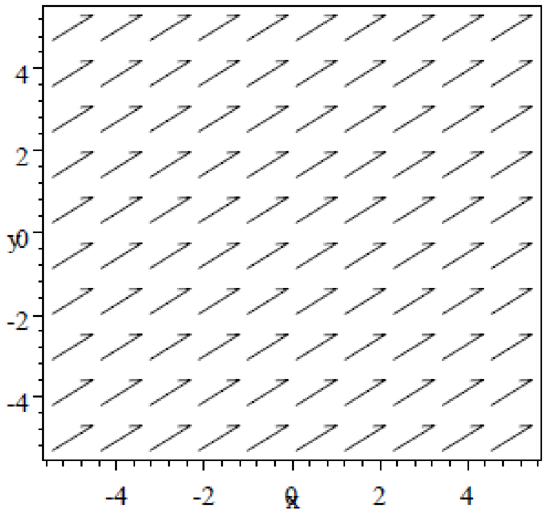
Guardando le due figure, si osserva che la funzione gradiente assegna un vettore ad ogni punto del dominio. Per ovvie ragioni la figura ne mostra solo alcune. Da notare che, per esempio, lungo l'asse x, $f(x,y) = x^2$ così che f (x, y) cresce dapprima lentamente, poi sempre più velocemente, allontanandosi dall'origine sia verso destra che verso sinistra. Lungo l'asse x il vettore gradiente punta in direzione opposta all'origine. Lungo l'asse y accade esattamente l'opposto.
In un punto stazionario di f il gradiente è nullo (come accade nell'origine per l'esempio dato). Le figure ci fanno anche capire che l'origine è un punto di sella. L'osservazione più importante da fare è comunque:
In ogni punto (x_0, y_0) del dominio, il vettore gradiente è perpendicolare alla curva di livello passante per (x_0, y_0).
Intuitivamente esso ci dice che le curve di livello sono perpendicolari alle direzioni di massima pendenza.

Il Gradiente di una Funzione Lineare

Una funzione lineare ha la forma L(x, y) = ax + by + c e quindi ha derivate parziali costanti. Il vettore gradiente è dato perciò da ∇L(x, y) = (a, b) per tutte le coppie (x, y) .

Vediamo il grafico, per esempio, della funzione L(x, y) = 3x + 2y





Anche in questo caso, come si vede bene osservando i due grafici, il vettore gradiente (3, 2) appare essere perpendicolare alle curve di livello 3x+2y = k Come è ben noto, il coefficiente angolare di questa retta è −3/2 e quindi il vettore (2, −3) è un vettore tangente che è ortogonale al vettore (3, 2), come affermato.

Funzioni lineari in tre variabili: gradienti e superfici di livello

Una funzione lineare in tre variabili è data da L(x, y, z) = ax+by+cz+d. Il vettore gradiente è dato da ∇L = (a, b, c) , vettore costante tridimensionale. Consideriamo l'insieme {(x, y, z) ∈ R_3 : L(x, y, z) = w_0} , cioè la superficie di livello L(x, y, z) = w_0. Si ha, ax + by + cz + d = w_0 che rappresenta il piano di equazione ax+by +cz = w_0 − d. Come è noto dalla geometria elementare il vettore (a, b, c) è perpendicolare al piano stesso. Questo mostra, come nel caso di due variabili, che il vettore gradiente nel punto di coordinate (x_0, y_0, z_0) è ortogonale alla linea di livello per lo stesso punto.

Gradiente ed Approssimazione Lineare

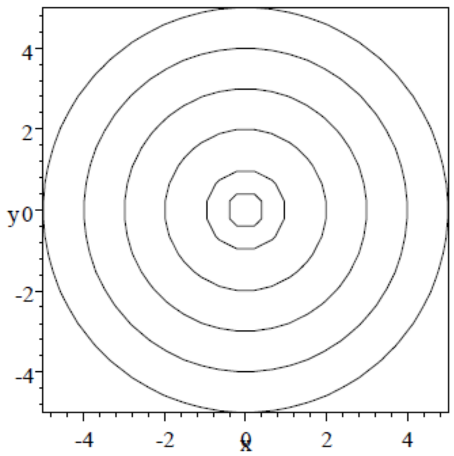
Sia $f: D \subset R^2 \to R$ una funzione differenziabile, (x_0, y_0) un punto nel dominio D. Abbiamo precedentemente definito l'approssimazione lineare di f nell'intorno di (x_0, y_0) come la funzione definita da

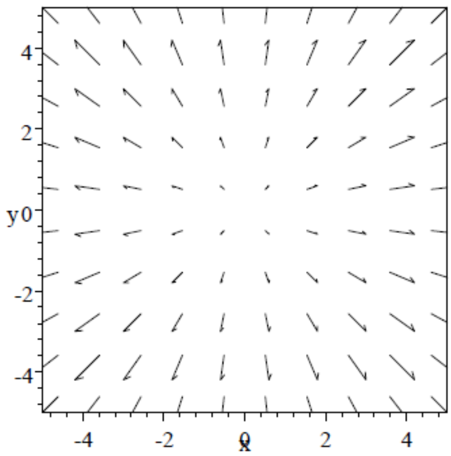
$$L(X) = f(X_0) + \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0)$$

dove

$$X_0 = (x_0, y_0), X = (x, y)$$

Ogni funzione di più variabili che sia differenziabile può essere approssimata, in ogni punto del dominio X_0 con una funzione lineare.





Come negli altri casi, il vettore gradiente è perpendicolare alle curve di livello. La proprietà di perpendicolarità del gradiente è molto utile quando si voglia trovare il piano tangente ad un punto di una superficie in R^3.

Le derivate parziali sono un caso particolare di derivate lungo una direzione, in particolare, le derivate direzionali ci dicono come varia una funzione quando la variabile indipendente varia lungo le direzioni degli assi coordinati. Ma gli assi coordinati, oltre ad essere usati come elemento di orientamento del piano non sono direzioni privilegiate rispetto alle altre ed è quindi ovvio chiedersi come si individua la variazione della funzioni lungo direzioni che non siano quelle degli assi coordinati. La definizione di Derivata direzionale risponde alla domanda che ci siamo appena fatti.

Con il termine direzione si intende un vettore v di lunghezza unitaria, $\|v\| = 1$. Se x è un punto di R^n al variare di t in R il punto x+tv descrive una retta che passa per il punto x e ha direzione determinata da v.Se x e v sono fissati la funzione $g(t) = f(\text{x}+t\text{v})$ è una funzione della sola variabile t:

Definizione

La derivata della funzione $g(t) = f(\text{x} + t\text{v})$ *nel punto* $t = 0$ *se esiste, si chiama derivata della funzione f nella direzione* v*:*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = g'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$$

Si osservi che la derivata parziale rispetto alla variabile x_i non è altro che la derivata lungo la direzione dell'asse delle x_i; cioè lungo il vettore e_i che ha le componenti tutte nulle, ad eccezione della i-esima, che vale 1. Ad esempio, in due variabili la derivata rispetto a x è la derivata lungo la direzione $e_1 = (1; 0)$.

Si ha in generale

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial v}(x+tv)$$

Infatti, posto $x_t = x + tv$, risulta che

$$g'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_t+hv)-f(x_t)}{h} = \frac{\partial f}{\partial v}(x_t)$$

Es. 6 – Si calcoli la derivata della funzione $f(x,y)=x^2y-e^{x+y}$ lungo la direzione $v=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Si ha:

$$g(t)=f\left(x+\frac{t}{2},y+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)=\left(x+\frac{t}{2}\right)^2\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-e^{x+y+t\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

e quindi

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y)=g'(0)=xy+\frac{\sqrt{3}}{2}x^2-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{x+y}$$

Calcolare il gradiente e il determinante della matrice hessiana delle seguenti funzioni, nel punto a fianco indicato:

1	$f(x,y)=sin(xy),\quad P\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$	
2	$f(x,y)=tg(x^2y),\quad P(1,\pi)$	
3	$f(x,y)=x^3-2xy+arcsin(x+2y),\quad P(0,0)$	
4	$f(x,y)=log[cos(x^2+y)]-1,\quad P\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$	
5	$f(x,y)=\frac{x^2+1}{y-x},\quad P(3,1)$	
6	$f(x,y)=arctgx-y\sqrt{x^2+xy}\cdot sin(xy),\quad P(1,0)$	
7	$f(x,y)=x\cdot e^{x+y}-y(x^2+1),\quad P(1,2)$	
8	$f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2-3y}-x}{y^2},\quad P(2,1)$	
9	$f(x,y)=cosx+sin(logy),\quad P(\pi,1)$	
10	$f(x,y)=x^2-\sqrt{y}\cdot e^{xy},\quad P(0,1)$	
11	$f(x,y)=\arccos(x+y),\quad P\left(0,\frac{1}{2}\right)$	
12	$f(x,y)=\frac{tgx+y^2}{1+xy},\quad P(0,0)$	
13	$f(x,y)=y\cdot e^{x^2+2x+3},\quad P(0,e)$	
14	$f(x,y)=x(y+1)\cdot\sqrt[3]{x^2+y^2},\quad P(0,-1)$	
15	$f(x,y)=sinx+cos[2(x+y)],\quad P\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right)$	
16	$f(x,y)=x^4+4y^3+3xy^2-2x^2y^2+x^2y-x+1,\quad P\left(0,-\frac{1}{2}\right)$	
17	$f(x,y)=artg(x^3-y),\quad P(1,0)$	

18	$f(x,y) = \frac{1}{tg(xy^2)}, \quad P\left(\frac{\pi}{4},1\right)$	
19	$f(x,y) = \frac{log(xy+1)}{x+y}, \quad P(0,e)$	
20	$f(x,y) = \sqrt{1+logx+\ e^{xy}}, \quad P(1,0)$	

Alcune funzioni in due variabili notevoli

Una funzione del tipo

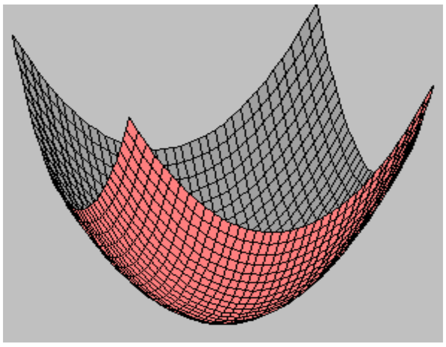
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + 2z = 0$$

che può essere scritta anche nella forma

$$z = -\frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2}$$

prende il nome di paraboloide ellittico.

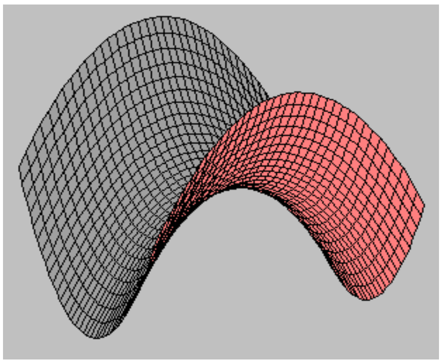
In geometria è classificata come una quadrica, un tipo di superficie in uno spazio a tre dimensioni.



Se una funzione si presenta nella forma

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 + 2z = 0$$

si ha quella quadrica che in geometria viene denominata paraboloide iperbolico.



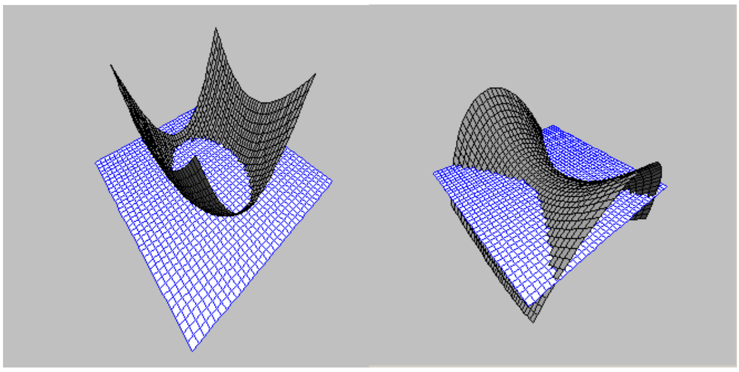
Gli aggettivi “ellittico” e “iperbolico” si deve al fatto che sezionando le superfici con un piano orizzontale, si ottengono rispettivamente una ellisse e una iperbole

Il nome della superficie deriva dal fatto che le sue sezioni verticali sono appunto delle parabole.

Quando a = b un paraboloide ellittico viene detto paraboloide di rivoluzione, cioè una superficie ottenuta dalla rotazione di una parabola attorno al suo asse. Questa superficie è anche chiamata paraboloide circolare.

Hanno la forma del paraboloide di rotazione i riflettori parabolici usati come specchi, come antenne piatte e per analoghi dispositivi, come le antenne paraboliche. La ragione di ciò è dovuta al fatto che una sorgente di luce collocata nel punto focale di un paraboloide di rotazione produce un fascio di luce parallelo all'asse della superficie, e viceversa un fascio di luce parallelo che incide su un paraboloide di rotazione nella direzione del suo asse si concentra nel suo punto focale: questi effetti si hanno naturalmente anche per onde elettromagnetiche con frequenze in intervalli diversi dal visibile.

Poiché le sorgenti luminose o elettromagnetiche sono così distanti da potere immaginare che i fasci d'onda siano paralleli, se ne deduce che la forma a paraboloide di rotazione permette di "catturare" una maggior quantità di informazione e farla convergere in un unico punto.



Minimi e massimi relativi

Sia data una funzione $f: A \subset R^2 \to R$, derivabile nell'insieme aperto A se in un punto $P_0(x_0,y_0) \in A$ la funzione ha un massimo (o un minimo) relativo (detti anche punti estremi), allora necessariamente deve essere:

$$f_x(x_0,y_0) = 0, \qquad f_y(x_0,y_0) = 0$$

Tali condizioni non sono tuttavia sufficienti a garantire l'esistenza di un punto di massimo (o di minimo) relativo per la funzione $f(x,y)$.

Un punto $P_0(x_0,y_0) \in A$ che soddisfa la condizione precedente è detto punto critico (o punto stazionario).

Nel caso di funzioni di una variabile, un procedimento per stabilire se un punto x_0 tale che si abbia $f'(x_0) = 0$ è un punto di massimo (o di minimo) relativo è lo studio del segno della derivata seconda di $f(x)$.

Per le funzioni di due variabili esiste un procedimento analogo.

Definiamo la matrice hessiana di una funzione $f: A \subset R^2 \to R$ con A insieme aperto e $f \in C^2(A)$ la seguente matrice simmetrica:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

Essendo $f \in C^2(A)$, per il teorema di Schwarz, $\forall (x,y) \in A$, si ha:

$$f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y)$$

Chiamiamo hessiano il determinante della matrice hessiana. Tale determinante è utile per la determinazione dei punti estremi.

Teorema

Sia $f: A \subset R^2 \to R$ con A insieme aperto e $f \in C^2(A)$ e $P_0(x_0,y_0) \in A$ in cui si ha

$$f_x(x_0,y_0) = 0 \quad e \quad f_y(x_0,y_0) = 0$$

allora, si possono verificare le seguenti eventualità

$\boldsymbol{H(x_0,y_0) > 0}$	$\boldsymbol{f_x(x_0,y_0) > 0}$	Si ha un minimo relativo
	$f_x(x_0,y_0) < 0$	Si ha un massimo relativo
$\boldsymbol{H(x_0,y_0) < 0}$	Si ha un punto di sella	
$\boldsymbol{H(x_0,y_0) = 0}$	Nulla è possibile dire con questo metodo	

Es. 7 – si determinino i punti di massimo e di minimo relativo e di massimo e minimo assoluto della seguente funzione

$$\boldsymbol{f(x,y) = x^3 + y^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3y}$$

Essendo la funzione definita in tutto R^2, ovvero in un insieme illimitato, può non essere dotata di minimo e di massimo assoluti.

Infatti, se si considera la restrizione all'asse delle x, si ha:

$$\lim_{x\to\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\infty} x^3 - \frac{3}{2}x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = \lim_{x\to-\infty} x^3 - \frac{3}{2}x^2 = -\infty$$

Tali risultati permettono di affermare che la funzione non ha né massimo né minimo assoluto.

Le derivate parziali prime sono:

$$f_x = 3x^2 - 3x \quad e \quad f_y = 3y^2 - 3$$

I punti estremali vanno ricercati tra quelli che annullano contemporaneamente le due derivate:

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3x = 0 \\ f_y = 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

I punti critici trovati sono, pertanto $P_1(0,1), P_2(0,-1), P_3(1,1), P_4(1,-1)$

Per indagare sulla natura di questi punti bisogna ricorrere al determinante hessiano.

Le derivate seconde sono:

$$f_{xx} = 6x - 3, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = f_{yx} = 0$$

Pertanto l'hessiano sarà:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x-3 & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 18y(2x-1)$$

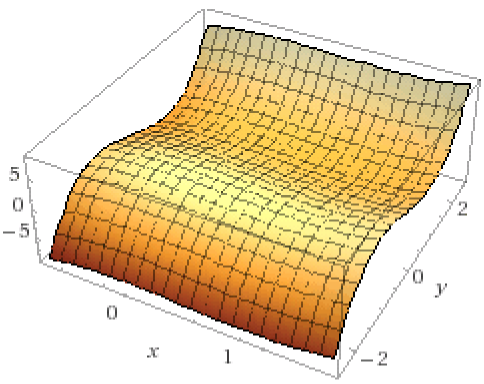
Quindi:

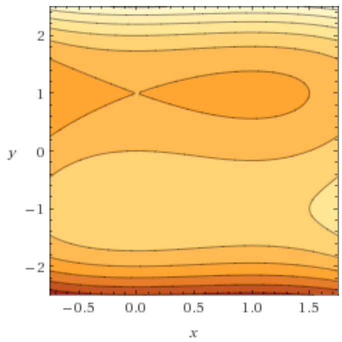
$H(0,1) = -18 < 0$ Punto di sella

$H(0,-1) = 18 > 0, \quad f_{xx}(0,-1) = -3 < 0$ Punto di massimo relativo

$H(1,1) = 18 > 0 \quad f_{xx}(1,1) = 3 > 0$ Punto di minimo relativo

$H(1,-1) = -18 < 0$ Punto di sella





Es. 8 – Si determinino i punti di massimo e di minimo relativo e di massimo e minimo assoluto della seguente funzione

$$\boldsymbol{f(x,y) = sinx \cdot siny}$$

Il campo di definizione di f è R^2. Si può osservare che $-1 \leq sinx \leq 1$ e $-1 \leq siny \leq 1$; pertanto la funzione è dotata di massimo assoluto pari a 1, che viene assunto nei punti per i quali si ha:

$$\begin{cases} sinx = 1 \\ siny = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} sinx = -1 \\ siny = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

La funzione, inoltre, è dotata di minimo assoluto pari a -1, assunto nei punti per i quali si ha:

$$\begin{cases} sinx = 1 \\ siny = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} sinx = -1 \\ siny = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

La funzione è continua e dotata di derivate parziali prime e seconde continue in tutto il campo di definizione. Le derivate parziali prime sono:

$$f_x = cosx \cdot siny \qquad e \qquad f_y = sinx \cdot cosy$$

I punti critici sono dati dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} cosx \cdot siny = 0 \\ sinx \cdot cosy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} siny = 0 \\ sinx = 0 \end{cases} e \begin{cases} cosx = 0 \\ cosy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ y = k\pi \end{cases} e \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

e risultano così essere i punti $P\left(k\pi + \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ $Q(k\pi, k\pi)$

Le derivate seconde sono:

$$f_{xx} = -sinx \cdot siny; \quad f_{yy} = -sinx \cdot siny; \quad f_{xy} = f_{yx} = cosx \cdot cosy$$

Pertanto, l'hessiano è espresso da:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} -sinx \cdot siny & cosx \cdot cosy \\ cosx \cdot cosy & -sinx \cdot siny \end{vmatrix} = sin^2 x sin^2 y - cos^2 x cos^2 y$$

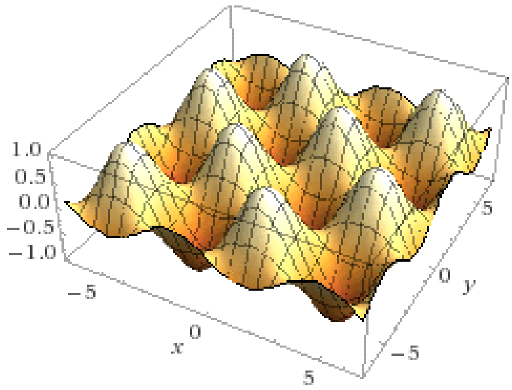
Poiché si ha che

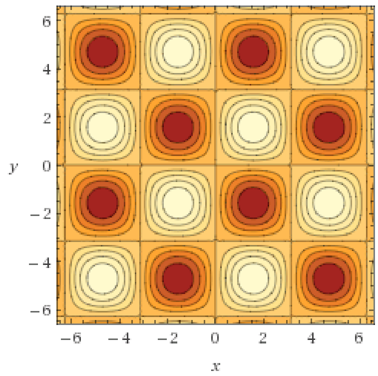
$$H(P) = 1 > 0$$

In corrispondenza del punto P si ha $sinx = \pm 1$ e $siny = \pm 1$ per cui

- Quando i segni sono concordi si ha:
$$f_{xx}(P) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad ho\ un\ massimo\ relativo$$
- Quando i segni sono discordi si ha:
$$f_{xx}(P) = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad ho\ un\ minimo\ relativo$$

Tutti i punti di massimo e minimo relativo sono anche di massimo e minimo assoluti.





Es. 9 – Si determinino i punti di massimo e di minimo relativo e di massimo e minimo assoluto della seguente funzione

$$\boldsymbol{f(x,y) = x^2 + y^2}$$

La funzione è definita in tutto il piano cartesiano. Pertanto, essendo il suo campo di esistenza illimitato potrebbe non essere dotata di massimo e di minimo assoluto.
Considerando la restrizione all'asse x, si ha:

$$\lim_{x\to\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty$$

Da cui si deduce che la funzione è sprovvista di massimo assoluto.
Le derivate parziali prime sono: $f_x = 2x$; $f_y = 2y$
da cui si ricava che l'unico punto critico è $P(0,0)$.
Le derivate parziali seconde sono:

$$f_{xx} = 2; \quad f_{yy} = 2; \quad f_{xy} = f_{yx} = 0$$

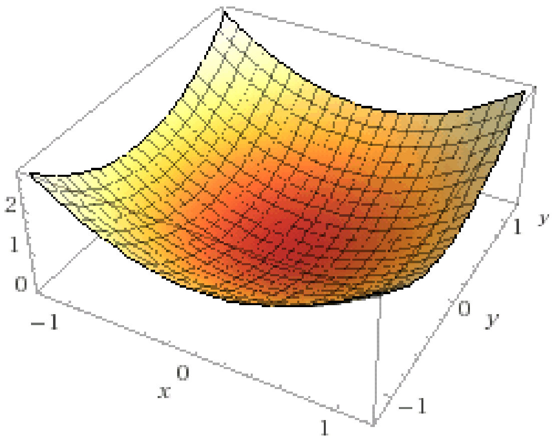
Pertanto l'hessiano è

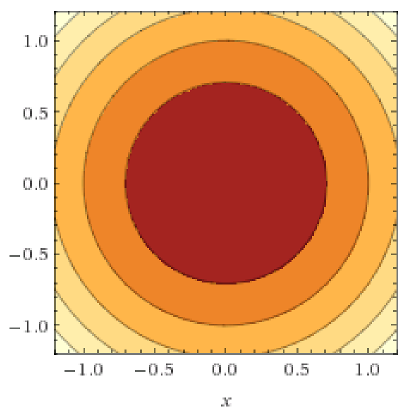
$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Essendo, inoltre

$$f_{xx} = 2 > 0$$

si ricava che il punto $P(0,0)$ è un minimo relativo.





Determinare e classificare gli eventuali punti critici delle seguenti funzioni:

1	$f(x,y)=xy$	$S(0,0)$
2	$f(x,y)=x^2-y^2$	$S(0,0)$
3	$f(x,y)=x^2+xy+y^2$	$m(0,0)$
4	$f(x,y)=x^3+y^3+xy$	$S(0,0); M\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$
5	$f(x,y)=x^3y+xy^3$	$S(0,0)$
6	$f(x,y)=4y^4-16x^2y+x$	$S\left(\frac{1}{8};\frac{1}{4}\right)$
7	$f(x,y)=x^3+3x^2+4xy+y^2$	$S(0,0); m\left(\frac{2}{3};-\frac{4}{3}\right)$
8	$f(x,y)=x^3-6x-2y+y^2+5$	$S\left(-\sqrt{2};1\right); m(\sqrt{2};1)$
9	$f(x,y)=x\cdot\log(x+y)$	$S(0,1)$
10	$f(x,y)=(3-x)(3-y)(x+y-3)$	$S_1(0,3);\ S_2(3,0);\ S_3(3,3)$ $M(2,2)$
11	$f(x,y)=x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$	$m_1(1,1);\ m_2(-1;1);$ $m_3(1,-1);\ m_4(-1,-1)$
12	$f(x,y)=x^4+6x^2y^2+y^4-32(x^2+y^2)$	$S_{1,2}(\pm2;-2), S_{3,4}(\pm2,2)$ $m_{1,2}(0;\ \pm4), m_{3,4}(\pm4,0)$ $M(0,0)$
13	$f(x,y)=\frac{8}{x}+\frac{x}{y}+y$	$m(4,2)$
14	$f(x,y)=-cosx+\frac{x}{2}-y^2+1$	
15	$f(x,y)=(y+1)e^{xy}$	
16	$f(x,y)=e^{x^2-y^2+xy-2y}$	
17	$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-x$	
18	$f(x,y)=artg(xy)$	$S(0,0)$
19	$f(x,y)=ycosx$	
20	$f(x,y)=\sin(x+y)+\cos(x-y)$	