



# Equazioni differenziali

Corso di Matematica 2

2015/2016

Corso di studi in Ingegneria Civile - Ambiente e  
Territorio

# Equazioni differenziali

## Definizione 1

Si chiama **equazione differenziale** un tipo particolare di *equazione funzionale*, nella quale la funzione incognita compare insieme ad alcune sue derivate, ossia un'equazione nella quale, oltre alle normali operazioni algebriche e trascendenti, è ammessa l'operazione di derivazione.

## Definizione 2

Si dice **ordine** di un'equazione differenziale il massimo ordine di derivazione che in essa compare.

## Definizione 3

Si chiama **soluzione** di un'equazione differenziale di ordine  $n$  una funzione di classe  $C^n$  su un opportuno insieme che verifichi l'equazione stessa.

Se ad esempio scriviamo l'equazione in **forma normale**, ossia come

$$y^n = f(x, y, y', \dots, y^{n-1},)$$

e  $y = y(x)$  è una sua soluzione, la relazione

$$y^n(x) = f[x, y(x), y'(x), \dots, y^{n-1}(x)]$$

deve essere un'identità.

# Equazioni differenziali

## Definizione 4

Chiamiamo **integrale generale** dell'equazione differenziale una soluzione della forma

$$y = f(x) + k,$$

oppure

$$y = kf(x),$$

dalla quale si ottengono tutte le **soluzioni particolari** con la semplice attribuzione di un valore particolare alla costante arbitraria  $k$ .

Spesso non si è interessati all'intera famiglia di soluzioni di un'equazione differenziale, ma si desidera ottenere una soluzione particolare.

In questo caso si deve formulare un **problema di Cauchy**, ossia una coppia di equazioni riguardanti la funzione incognita, del tipo

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

la cui soluzione può essere trovata, ad esempio, scegliendo il valore della costante arbitraria per il quale la soluzione espressa in forma di integrale generale della prima equazione verifica anche la seconda equazione.

# Equazioni differenziali

Il problema che si pone è se un problema di Cauchy ammetta soluzione e, quando questo succeda, se tale soluzione sia unica.

## Teorema di esistenza e unicità in grande

Sia  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua e lipschitziana rispetto ad  $y$  in  $\mathbb{R}$ , uniformemente rispetto a  $x$  in  $[a, b]$ . Allora, comunque scelto il punto  $(x_0, y_0)$  in  $[a, b] \times \mathbb{R}$  esiste una ed una sola funzione  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , differenziabile con continuità e soluzione del problema di Cauchy, ossia tale che

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Una funzione reale di variabile reale,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  si dice lipschitziana in  $A$  se

$$\exists k \in \mathbb{R} : \forall x_1, x_2 \in A, |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$$

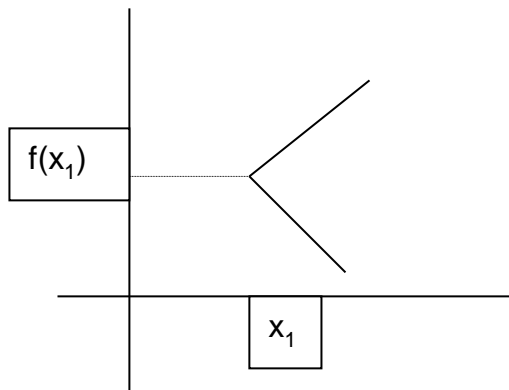
# Equazioni differenziali

La definizione di funzione lipschitziana è di facile interpretazione. Infatti, fissati i punti  $x_1$  e  $x_2$ , con ad esempio  $x_1 < x_2$ , la relazione riportata significa che

$$f(x_1) - k(x_2 - x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_1) + k(x_2 - x_1)$$

Se osserviamo il disegno sotto riportato, il significato di questa relazione è che  $f(x_2)$  deve trovarsi nella parte di piano delimitata dalle due semirette, di coefficiente angolare  $k$  e  $-k$ .

Questo ci dà dunque un'informazione sull'incremento che la funzione può subire nel passaggio da  $x_1$  a  $x_2$ , controllato dall'incremento subito dalle due rette e che quindi non è compatibile con variazioni troppo brusche (quali ad esempio si verificano in corrispondenza di punti a tangente verticale).



L'incremento della funzione è controllato, attraverso un coefficiente  $k$ , da quello della  $x$  ed esiste una costante  $k$  che vale per ogni punto  $x$  di  $[a, b]$ .

# Equazioni differenziali

Il teorema di esistenza e unicità per un problema di Cauchy dimostra che la soluzione esiste ed è localmente unica, se  $f$  rispetta opportune ipotesi. È sempre possibile ridurre un problema di ordine  $n$  ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie, ovvero di ordine 1

Il teorema di esistenza e unicità per un problema di Cauchy (teorema di Picard-Lindelöf) garantisce l'esistenza di un'unica soluzione in un certo intervallo contenente  $t_0$  se  $f$  e la sua derivata parziale  $\partial f / \partial y$  sono continue in una regione contenente  $t_0$  e  $y_0$ . La dimostrazione di questo teorema si basa sulla riformulazione del problema in una equazione integrale. L'integrale può essere considerato un operatore che "mappa" una funzione in un'altra, in modo tale che la soluzione sia un punto fisso dell'operatore. In seguito si utilizza il teorema delle contrazioni per dimostrare come esista un unico punto fisso, che è la soluzione del problema ai valori iniziali.

# Equazioni differenziali

Esiste anche una dimostrazione più vecchia del teorema di Picard-Lindelöf, che si basa sulla costruzione di una sequenza di funzioni che convergono alla soluzione dell'equazione integrale, e quindi alla soluzione del problema ai valori iniziali. Tale costruzione viene talvolta chiamata "metodo di Picard" o "metodo ad approssimazioni successive". Questa versione è sostanzialmente un caso particolare del teorema delle contrazioni.

In alcuni casi, la funzione  $f$  non è di classe  $C^1$ , o nemmeno lipschitziana, di conseguenza non è assicurata l'esistenza locale di un'unica soluzione. Il teorema di esistenza di Peano assicura che anche per  $f$  semplicemente continua, l'esistenza delle soluzioni è garantita localmente; il problema è che non esiste garanzia dell'unicità.

# Teorema di esistenza e unicità in “grande”

## Dimostrazione

- Esistenza di almeno una soluzione:

Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

è equivalente all'equazione integrale

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

Allora, detto  $C$  l'insieme delle funzioni  $y(x)$  continue in  $[a, b]$  e tali che  $y(x_0) = y_0$ , si consideri la trasformazione

$$T: y(x) \in C \rightarrow y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

Si tratta di una trasformazione di  $C$  in  $C$  e una funzione  $\bar{y}(x)$  è una soluzione dell'equazione integrale sse soddisfa alla condizione

$$T(\bar{y}(x)) = \bar{y}(x)$$

quindi è un elemento unito per la trasformazione  $T$





# Teorema di esistenza e unicità in “grande”



Costruiamoci, servendoci di  $T$ , una successione di funzioni continue in  $[a,b]$ , uniformemente convergente ad una funzione che dimostreremo essere un elemento unito per  $T$ .

Sia

$$y_1(x) = T(y_0) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt$$

$$y_2(x) = T(y_1) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt$$

$$y_n(x) = T(y_{n-1}) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$$

Per costruzione  $y_n(x)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  è continua in  $[a,b]$  e tale che  $y_n(x_0) = y_0$

Per dimostrare che  $(y_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente in  $[a,b]$  proviamo la convergenza uniforme della serie

$$\sum_n (y_n(x) - y_{n-1}(x))$$

maggiorandola con una serie numerica convergente

# Teorema di esistenza e unicità in “grande”



$$|y_1(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_0)| dt \leq M|x - x_0|$$

dove

$$M = \max_{x \in [a, b]} |f(x, y_0)|$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_0)| dt \leq \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_0| dt \leq LM \int_{x_0}^x |t - x_0| dt$$

$$\Rightarrow |y_2(x) - y_1(x)| \leq ML \frac{|x - x_0|^2}{2}$$

dove L è detta costante di Lipschitz di f.

Così proseguendo si ha:

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_2(t)) - f(t, y_1(t))| dt \leq \int_{x_0}^x L|y_2(t) - y_1(t)| dt \leq ML^2 \int_{x_0}^x \frac{|x - x_0|^2}{2} dt = ML^2 \frac{|x - x_0|^3}{3!}$$

# Teorema di esistenza e unicità in “grande”



$$\Rightarrow |y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq ML^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow |y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq ML^n \frac{|b - a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Poiché la serie numerica

$$\sum_n ML^n \frac{|b - a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

è convergente; allora la serie

$$\sum_n (y_{n+1}(x) - y_n(x))$$

è uniformemente convergente in  $[a, b]$ .

# Teorema di esistenza e unicità in “grande”



Detto  $y(x)$  il limite uniforme della successione  $(y_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  dimostriamo che  $T(y(x)) = y(x)$

- $y(x)$  è continua in  $[a, b]$  perché il limite uniforme di una successione di funzioni continue
- $y(x_0) = y_0$  perché  $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow y_n(x_0) = y_0$
- $\lim_n f(x, y_n(x)) = f(x, y(x))$  uniformemente, infatti

$$|f(x, y_n(x)) - f(x, y(x))| \leq L|y_n(x) - y(x)|$$

Ne segue che dalla relazione

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$$

Passando al limite per  $n$ , si ha:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt = T(y(x))$$

# Teorema di esistenza e unicità in “grande”



## Unicità

Se  $\varphi(x)$  è un'altra soluzione del problema di Cauchy è:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$$

Dimostriamo che  $\varphi(x) = y(x), \forall x \in [a, b]$

$$|\varphi(x) - y_1(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, \varphi(t)) - f(t, y_0)| dt \leq \int_{x_0}^x L|\varphi(t) - y_0| dt \leq KL|x - x_0|$$

dove

$$K = \max_{[a,b]} |\varphi(t) - y_0|$$

$$|\varphi(x) - y_2(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, \varphi(t)) - f(t, y_1(t))| dt \leq \int_{x_0}^x L|\varphi(t) - y_1(t)| dt \leq \int_{x_0}^x L^2 K |t - x_0| dt \leq L^2 K \frac{|x - x_0|^2}{2}$$

Così proseguendo, si ha:

# Teorema di esistenza e unicità in “grande”



$$|\varphi(x) - y_1(x)| \leq L^n K \frac{|x-x_0|^n}{n!} \leq L^n K \frac{|b-a|^n}{n!}$$

Poiché la serie

$$\sum_n L^n K \frac{|b-a|^n}{n!}$$

è convergente allora la successione

$$L^n K \frac{|b-a|^n}{n!}$$

è infinitesima e quindi

$$\varphi(x) = \lim_n y_n(x) = y(x)$$

# Teorema di esistenza e unicità in “piccolo”

## Teorema

Sia  $f$  una funzione definita e continua nel rettangolo  $R = [a, b] \times [c, d]$ ; se  $f$  è lipschitziana rispetto a  $y$ , per ogni punto  $P_0(x_0, y_0)$  tale che  $y_0$  si ainterno a  $[c, d]$  esiste una e una sola soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(xy) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

definita in un intorno  $x_0$  a valori in un intorno di  $y_0$  e gli estremi della curva integrale appartengono alla frontiera di  $R$

## Dimostrazione

Detto  $\varphi$  il prolungamento di  $f$  su  $S = [a, b] \times [c, d]$  continuo e lipschitziano rispetto a  $y$ , per il teorema di esistenza e unicità in grande, esiste una ed una sola soluzione definita in  $[a, b]$  del problema

$$\begin{cases} y' = \varphi(xy) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Poiché  $y(x)$  è continua in  $[a, b]$  e  $y(x_0) = y_0$  con  $y_0 \in ]c, d[$  esiste un intervallo chiuso contenente  $x_0$  tale che

$$c \leq y(x) \leq d$$

# Teorema di esistenza e unicità in “piccolo”

Se prendiamo la restrizione di  $y$  a tale intorno, sia  $y_I$ , si ha:

$$\begin{cases} y_I(x_0) = y_0 \\ y'_I(x) = \varphi(x, y_I(x)) = f(x, y_I(x)) \end{cases} \quad \forall x \in I$$

e quindi  $y_I$  è soluzione del problema di Cauchy di partenza.

È possibile determinare un intorno massimale (rispetto alla relazione di inclusione) in cui valgono le relazioni appena scritte.

Considero l'insieme  $H$  di tutti gli intervalli  $I$  chiusi contenuti in  $[a, b]$  del tipo  $[x_0, x_0 + h]$  tali che  $c \leq y(x) \leq d$ .

Sia  $b'$  l'estremo superiore dei punti  $x_0 + h$  al variare di  $I = [x_0, x_0 + h]$  in  $H$ .

Analogamente considero l'insieme  $K$  di tutti gli intervalli  $J$  chiusi contenuti in  $[a, b]$  del tipo  $[x_0 - k, x_0]$  tali che  $c \leq y(x) \leq d$ .



# Teorema di esistenza e unicità in “piccolo”

Sia  $a'$  l'estremo inferiore dei punti  $x_0 - k$  al variare di  $J = [x_0 - k, x_0]$  in  $K$ .

$\forall x \in [a', b']$  è  $c \leq y(x) \leq d$  e quindi:

$$y' = \varphi(x, y(x)) = f(x, y(x)), \forall x \in [a', b']$$

Gli estremi del grafico di  $y(x)$  appartengono alla frontiera di  $R$ .

Infatti, se potessimo prendere un  $y(b')$  interno all'intervallo  $]c, d[$  esisterebbe un intorno destro di  $b'$  in cui  $y(x) < d$  e quindi  $b'$  non sarebbe l'estremo superiore dei punti del tipo  $x_0 + h$  tali che

$$c \leq y(x) \leq d$$