Prof. Roberto Capone

Curve e integrali curvilinei

Corso di Analisi Matematica 2013/2014

Corso di laurea in Ingegneria edile

Università degli Studi del Molise

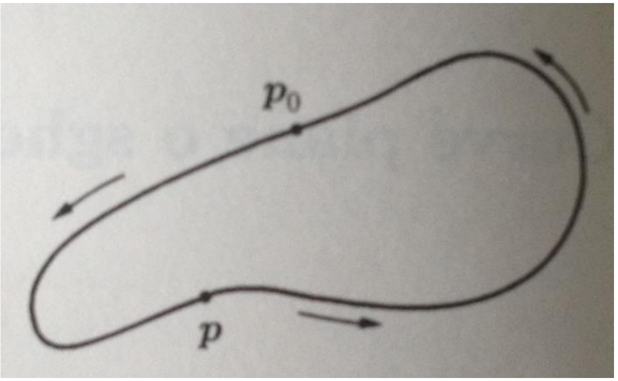
Curve

Definizione

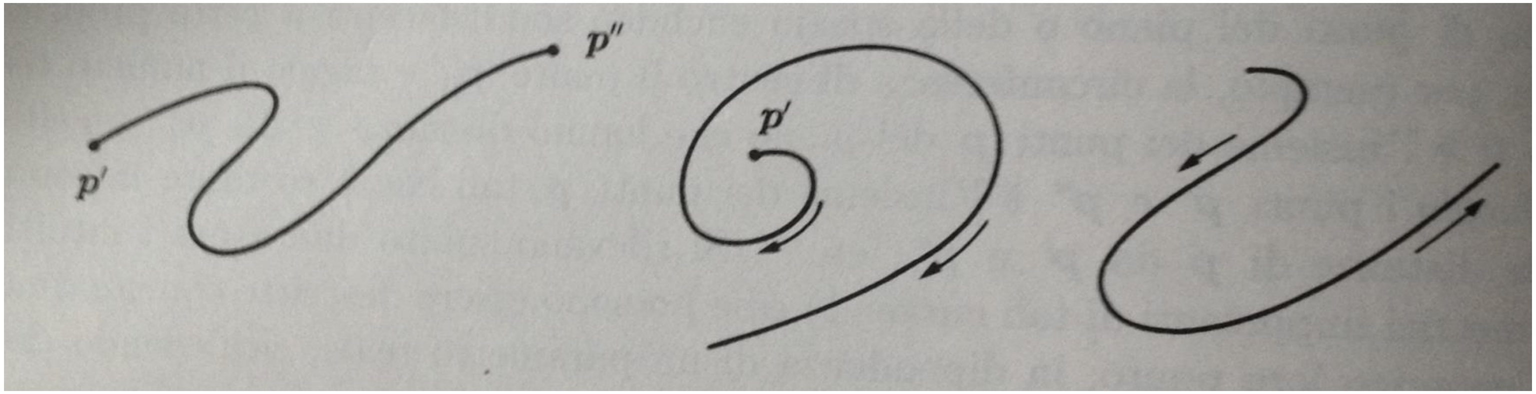
Si definisce curva di classe C^k in R^n l'applicazione continua $\gamma: I \subseteq R \rightarrow R^n$, dove I è un intervallo della retta reale.

Le curve possono essere classificate in curve chiuse e curve aperte.

L'appellativo chiusa può essere dato ad una curva quando il generico suo punto può descriverla con continuità, in dipendenza di un generico parametro reale, partendo da una posizione iniziale p_o e ritornando nella stessa posizione dopo averla percorsa tutta.



L'appellativo aperta può essere dato ad una curva che non sia chiusa e, in tal caso, si può distinguere un tipo di curva aperta dotata di entrambi gli estremi p' e p'', un altro tipo dotato di un solo estremo e un altro ancora non dotato di nessun estremo.



Omeomorfismi

Definizione

Una funzione vettoriale $f: X \subseteq R^n \rightarrow Y \subseteq R^k$ biunivoca di X su Y, continua insieme con la sua inversa, si dice un omeomorfismo di X su Y. Due insiemi $X \subseteq R^n$ e $Y \subseteq R^k$ si dicono omeomorfi se esiste un omeomorfismo di X su Y o di Y su X.

Il significato intuitivo di omeomorfismo è legato a quello di deformazione. Secondo tale concetto, dati due insiemi X e Y del piano e dello spazio, Y si ottiene per deformazione di X quando è il risultato di successive dilatazioni e contrazioni locali di X senza che nel corso di queste si creino lacerazioni o sovrapposizioni. Una tale deformazione di X in Y non conserva in generale né la forma, né le distanze, né il parallelismo mentre è possibile dire che essa stabilisce tra X e Y una corrispondenza biunivoca godente della seguente proprietà topologica:

1. A punti di X presi via via sempre più vicini a p corrispondono punti di Y presi via via sempre più vicini a p'.
2. Punti di Y presi via via sempre più vicini a p' sono corrispondenti di punti di p presi via via sempre più vicini a p.

La corrispondenza biunivoca tra X e Y è continua insieme con la sua inversa

Curve semplici aperte (dotate di estremi)

Definizione 1
Un sottoinsieme $\gamma \subseteq R^3$ (risp. $\subseteq R^2$) omeomorfo ad un intervallo [a,b] di R si dice una curva sghemba (risp. piana) semplice, aperta, dotata di estremi

Poiché una funzione vettoriale definita nell'intervallo compatto [a,b] di R che abbia come codominio il sottoinsieme $\gamma \subseteq R^3$ (risp. $\subseteq R^2$) è un omeomorfismo di [a,b] su γ non appena essa sia biunivoca e continua in [a,b], allora un sottoinsieme $\gamma \subseteq R^3$ (risp. $\subseteq R^2$) è una curva semplice aperta se e solo se è il codominio di una funzione vettoriale definita in un intervallo compatto [a,b] di R, ivi continua e biunivoca.

Definizione 2
Se $\gamma \subseteq R^3$ (risp. $\subseteq R^2$) è una curva semplice aperta dotata di estremi, un omeomorfismo di un intervallo compatto [a,b] su γ ,o, ciò che è lo stesso, una funzione vettoriale definita in [a,b] ivi biunivoca e continua, il cui codominio sia γ si dice una rappresentazione parametrica di γ di base [a,b]

Rappresentazione parametrica di una curva

Se con t si indica il generico punto dell'intervallo [a,b], con $p(x, y, z)$ il generico punto della curva γ e con $p(t)$ una rappresentazione parametrica di γ di base [a,b] di componenti $x(t), y(t), z(t)$ si dice una equazione vettoriale di γ di base [a,b], le uguaglianze

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad t \in [a, b] \\ z = z(t) \end{cases}$$

si dicono terna di equazioni parametriche di γ di base [a,b] e il numero reale t prende il nome di parametro

Curve semplici aperte (dotate di un solo estremo o prive di estremi)

Definizione 1
Un sottoinsieme $\gamma \subseteq R^3$ (risp. $\subseteq R^2$) omeomorfo ad un intervallo I di R si dice una curva sghemba (risp. piana) semplice, aperta, dotata di un solo estremo o priva di estremi a seconda che I sia un intervallo del tipo $[a,b[,]a,b], [a,+\infty[,]-\infty,b]$ (tutti omeomorfi tra loro) oppure del tipo $]a,b[,]a,+\infty[,]-\infty,b[,]-\infty,+\infty[$ (tutti omeomorfi tra loro)

Definizione 2
Se $\gamma \subseteq R^3$ (risp. $\subseteq R^2$) è una curva semplice aperta dotata di un solo estremo o priva di estremi , un omeomorfismo di un intervallo I su γ ,o, ciò che è lo stesso, una funzione vettoriale definita in I ivi biunivoca e continua, il cui codominio sia γ si dice una rappresentazione parametrica di γ di base I

Analogamente alle curve aperte dotate di estremi, le uguaglianze

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad t \in I \\ z = z(t) \end{cases}$$

si dicono terna di equazioni parametriche di γ di base I e il numero reale t prende il nome di parametro.

Curve e parametrizzazioni

Nota una parametrizzazione r, si può pensare ad una curva non solo come ad un sottoinsieme γ dello spazio , immagine di una funzione continua, bensì alla coppia (γ, r) dove $\gamma \subseteq R^3$ ed $r: I \subseteq R \to R^3$ una funzione continua.
La parametrizzazione $r: I \subseteq R \to R^3$ corrisponde a quello che fisici e ingegneri chiamano moto o cammino continuo. Essa contiene informazioni cinematiche di una curva.
Più semplicemente, una parametrizzazione è assegnata mediante l'equazione (in forma vettoriale)

$$r(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$$

o (in forma scalare)

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Al variare di t, r(t) descrive γ, detto sostegno della curva che è interpretabile come traiettorie descritta dalla particella e che racchiude gli aspetti geometrici della curva.

Curva e proprio sostegno

Una curva (che è una applicazione) non va confusa col proprio sostegno (che è un sottoinsieme del piano)

Esempio
Consideriamo ad esempio due curve:

$$\gamma_1 : [0,2\pi] \rightarrow R^2$$
$$\gamma_2 : [0,4\pi] \rightarrow R^2$$

di equazioni parametriche rispettivamente:

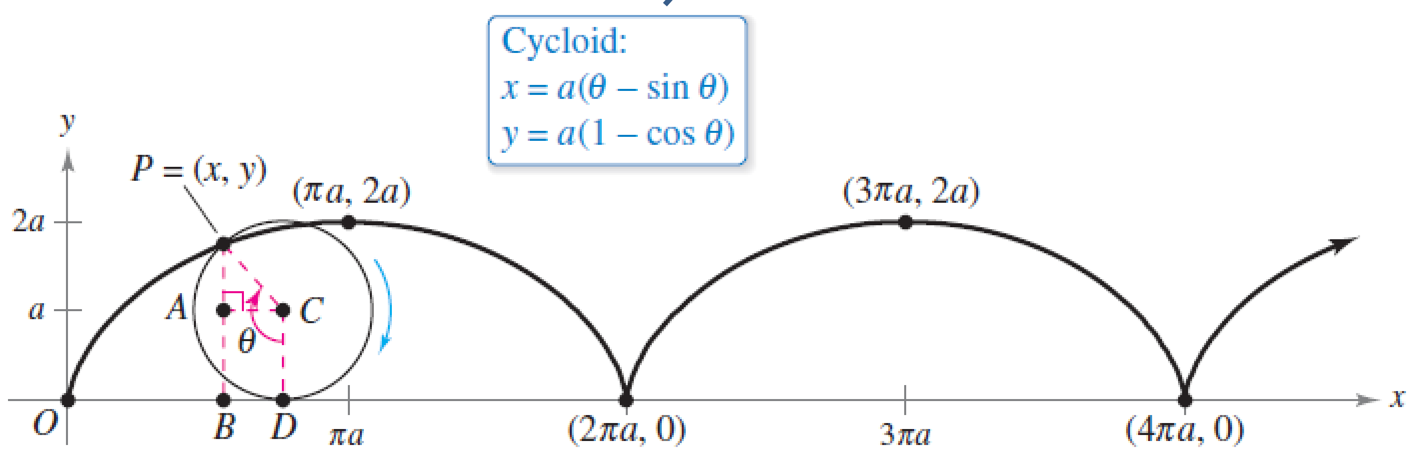
$$\begin{cases} x_1(t) = cost \\ y_1(t) = sint \end{cases} \text{ con } t \in [0,2\pi] \text{ e } \begin{cases} x_2(t) = cost \\ y_2(t) = sint \end{cases} \text{ con } t \in [0,4\pi]$$

Tali curve, pur avendo il medesimo sostegno, sono distinte, in quanto γ_1 rappresenta il moto di una particella che compie un giro completo ruotando in senso antiorario, mentre γ_2 rappresenta il moto di una particella che compie due giri completi ruotando nello stesso senso.

La cicloide

La **cicloide** (dal greco *kykloeidés*, *kýklos* "cerchio" e *-oeidés* 'forma', cioè che è fatto da un cerchio) è una curva semplice aperta, piana appartenente alla categoria delle rullette. Essa è la curva tracciata da un punto fisso su una circonferenza che *rotola* lungo una retta.

Equazioni parametriche della cicloide

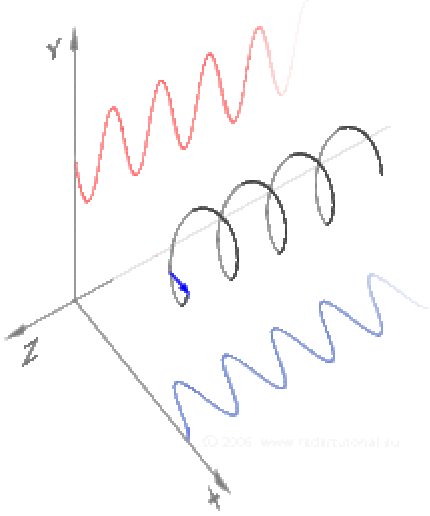


L'elica cilindrica

La curva semplice aperta sghemba di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = rcost \\ y = rsint \\ z = \omega t \end{cases}$$

dove r ed ω sono due numeri positivi, si chiama elica cilindrica di raggio r e di passo costante ω.
Si tratta di una curva semplice aperta non dotata di estremi che è inclusa nel cilindro circolare di asse l'asse z e raggio r di equazione cartesiana $x^2 + y^2 = r^2$.

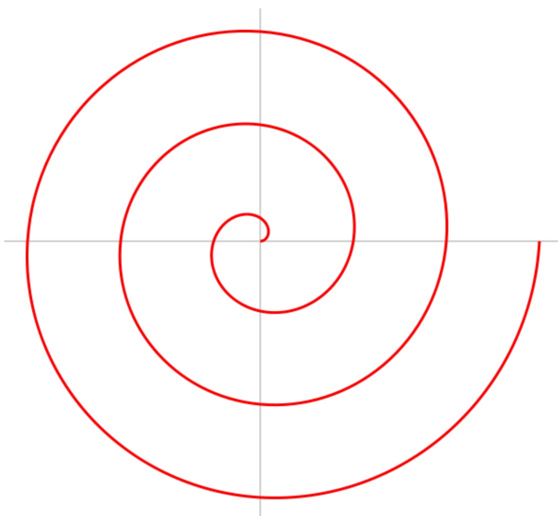


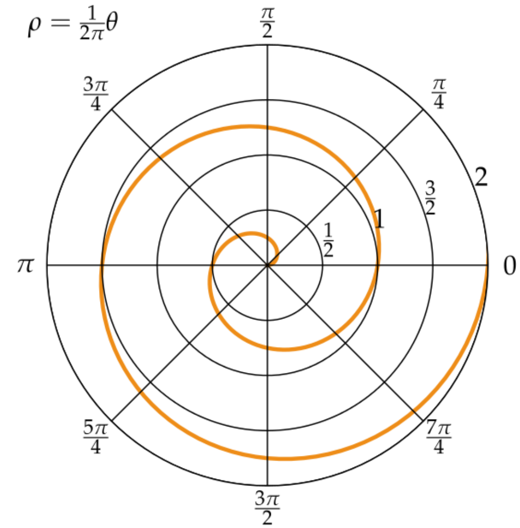
La spirale di Archimede

È una curva semplice aperta, dotata di un solo estremo ed ha equazione polare

$$\rho = a + k\theta \quad con\ \theta \in [0, +\infty[$$

dove k è un numero reale positivo





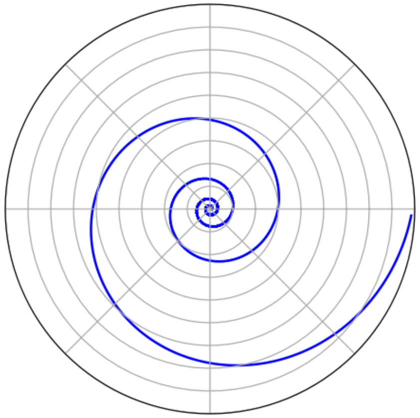
La spirale logaritmica

Una **spirale logaritmica**, **spirale equiangolare** o **spirale di crescita** è un tipo particolare di spirale che si ritrova spesso in natura. La spirale logaritmica è stata descritta la prima volta da Descartes e successivamente indagata estesamente da Jakob Bernoulli, che la definì *Spira mirabilis*, "la spirale meravigliosa. E' una curva semplice aperta, priva di estremi. La sua equazione è:

$$\rho = a \cdot e^{k\theta} \quad con\ \theta \in R$$

oppure

$$\theta = \frac{1}{k} log \frac{\rho}{a}$$



e in forma parametrica

$$\begin{cases} x(t) = a \cdot e^{k\theta} cos\theta \\ y(t) = a \cdot e^{k\theta} sin\theta \end{cases}$$

con *a* e *k* numeri reali.
La modifica di *a* ruota la spirale mentre *k* controlla quanto è stretta e in quale direzione si avvolge.

Curve semplici chiuse

Definizione 1

Un sottoinsieme $\gamma \subseteq R^3$ (risp. $\subseteq R^2$) si dice una curva semplice chiusa sghemba (o piana) se è il codominio di una funzione vettoriale $p(t)$ definita e continua in un intervallo compatto [a,b], tale che la sua restrizione all'intervallo semiaperto [a,b[sia biunivoca e tale che si abbia $p(a) = p(b)$

Analogamente alle curve aperte dotate di estremi, le uguaglianze

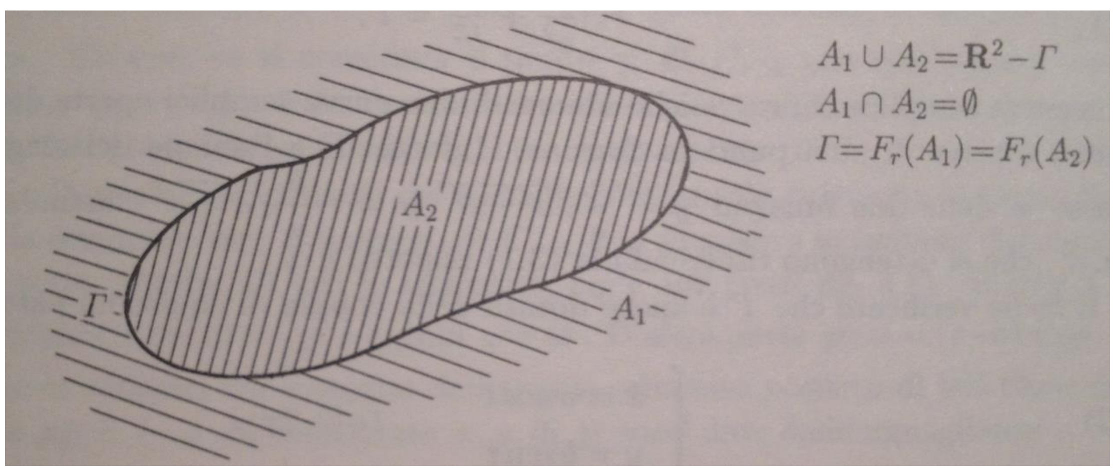
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad t \in [a, b] \\ z = z(t) \end{cases}$$

si dicono terna di equazioni parametriche di γ di base [a,b] e il numero reale t prende il nome di parametro.

Curve di Jordan

Se il sostegno γ di una curva è tutto contenuto in un piano, si dice che la curva è piana.
Le curve piane, semplici e chiuse si chiamano curve di Jordan

Teorema
Una curva di Jordan è frontiera di due insiemi aperti nel piano, uno dei quali è limitato e si chiama interno della curva, l'altro illimitato, detto esterno

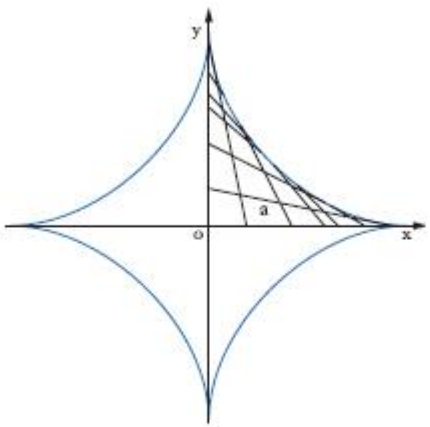


L'asteroide

La curva piana, semplice chiusa, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = r cos^3 t \\ y = r sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$$

con $r \in R^+$ si chiama asteroide



Orientazione di una curva

Consideriamo una curva γ di equazione $r = r(t)$. Il parametro t appartiene a un intervallo $I \subseteq R$. Essendo R orientato, anche I sarà tale, cosicché è automaticamente assegnato su γ un verso di percorrenza ovvero una orientazione della curva.
Si potrà allora dire che una coppia (γ, r) definisce una curva orientata.

Definizione
Sia γ una curva semplice aperta orientata, p_0 un suo punto, p il generico suo altro punto diverso da p_0, sia $s_p = \pm \frac{p-p_0}{\|p-p_0\|}$ con la scelta + o – a seconda che p segua o preceda p_0 secondo il verso scelto su γ. Nell'ipotesi che esista il limite

$$\lim_{p \to p_0} s_p = \lim_{p \to p_0} \pm \frac{p - p_0}{\|p - p_0\|}$$

che è evidentemente un versore, diciamolo t_0 esso si chiama versore tangente positivo a γ nel punto p_0.

Curve semplici regolari

Sia γ una curva semplice aperta orientata, p(t) una sua rappresentazione parametrica di base l'intervallo I, concorde con l'orientamento di γ. Allora se p(t) è derivabile in $t_0 \in I$ e il vettore derivato $p'(t_0)$ è diverso dal vettore nullo, γ è dotata nel punto $p_0 = p(t_0)$ di versore tangente positivo e questo ha l'espressione

$$t(p_0) = \frac{p'(t_0)}{\|p'(t_0)\|}$$

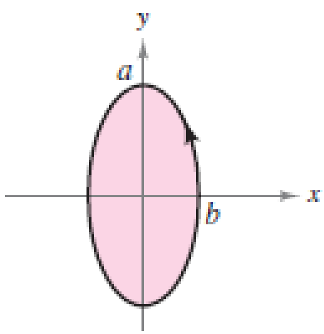
Lo stesso risultato vale se γ è una curva semplice chiusa orientata, p(t) una sua rappresentazione parametrica di base l'intervallo [a,b], concorde con l'orientamento di γ

Esempi di curve

Ellipse: $(0 \le t \le 2\pi)$

$x = b \cos t$

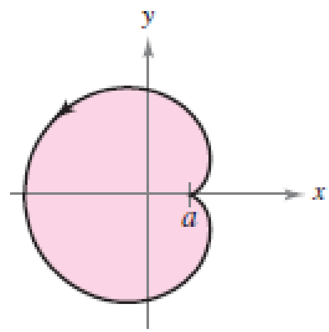
$y = a \sin t$



Cardioid: $(0 \le t \le 2\pi)$

$x = 2a \cos t - a \cos 2t$

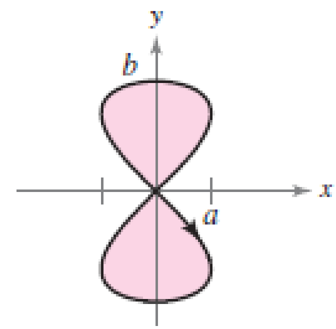
$y = 2a \sin t - a \sin 2t$



Hourglass: $(0 \le t \le 2\pi)$

$x = a \sin 2t$

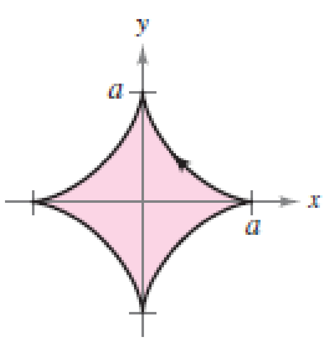
$y = b \sin t$



Astroid: $(0 \le t \le 2\pi)$

$x = a \cos^3 t$

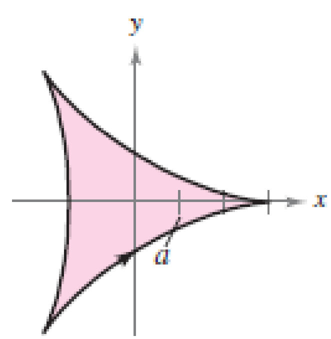
$y = a \sin^3 t$



Deltoid: $(0 \le t \le 2\pi)$

$x = 2a \cos t + a \cos 2t$

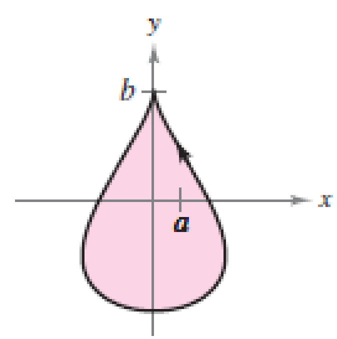
$y = 2a \sin t - a \sin 2t$



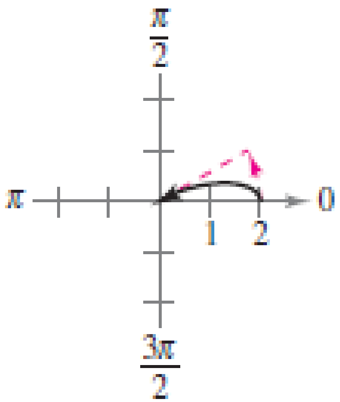
Teardrop: $(0 \le t \le 2\pi)$

$x = 2a \cos t - a \sin 2t$

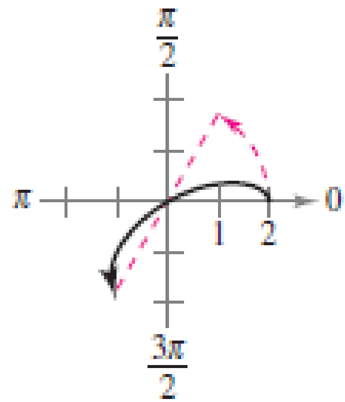
$y = b \sin t$



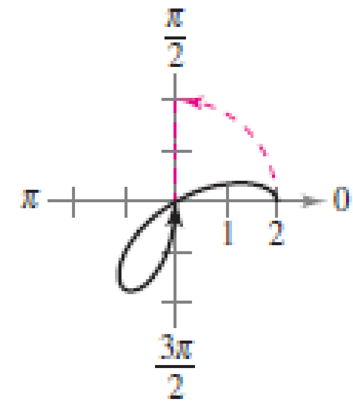
Come si costruisce il trifolium



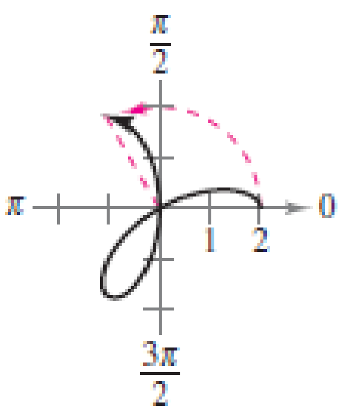
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$



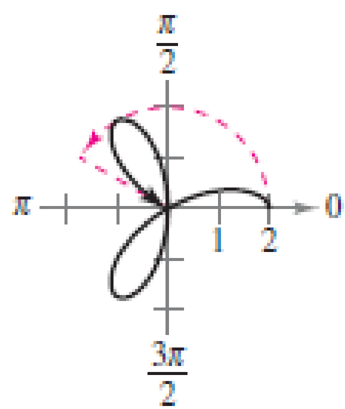
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$



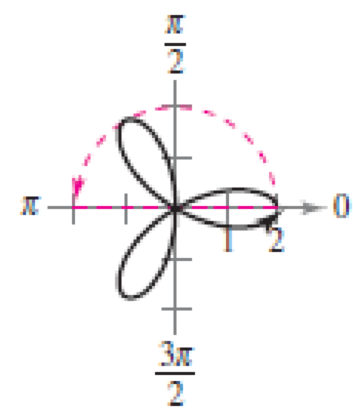
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



$0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$

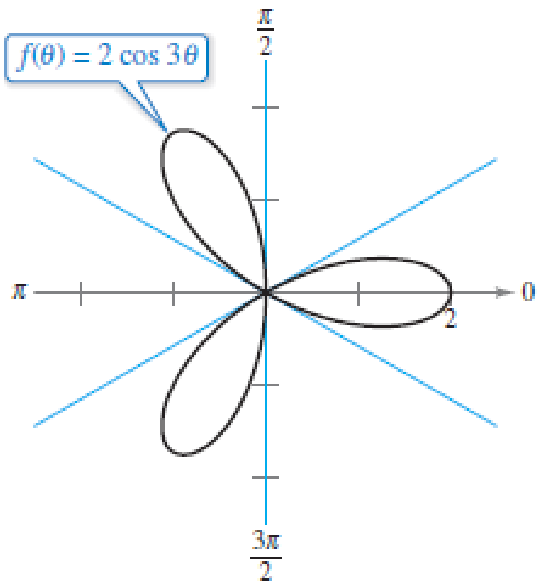


$0 \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$

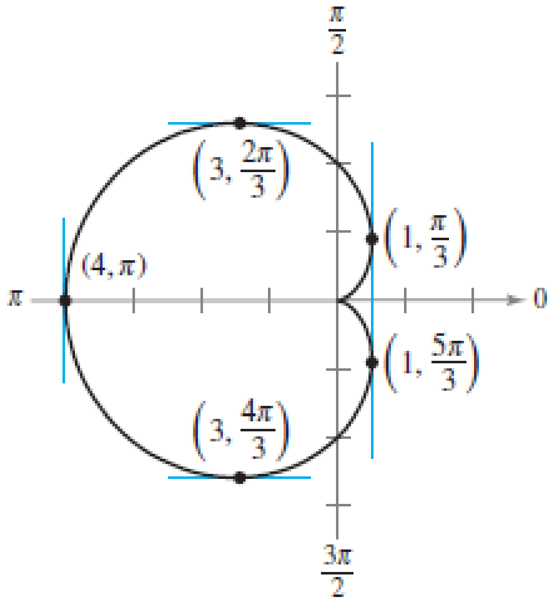


$0 \leq \theta \leq \pi$

Il trifolium e la cardioide



This rose curve has three tangent lines ($\theta = \pi/6$, $\theta = \pi/2$, and $\theta = 5\pi/6$) at the pole.



Horizontal and vertical tangent lines of $r = 2(1 - \cos\theta)$

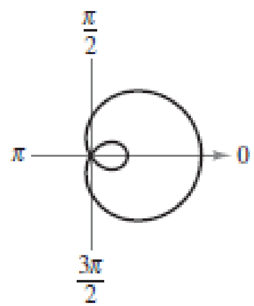
Altre curve notevoli

Limaçons

$r = a \pm b \cos \theta$

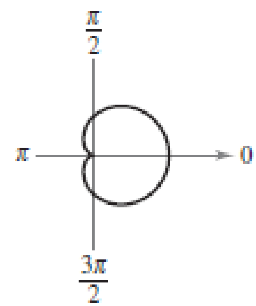
$r = a \pm b \sin \theta$

$(a > 0, b > 0)$



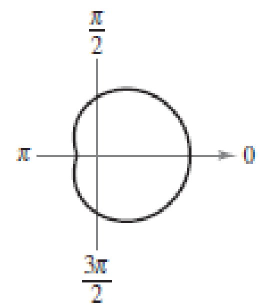
$\frac{a}{b} < 1$

Limaçon with inner loop



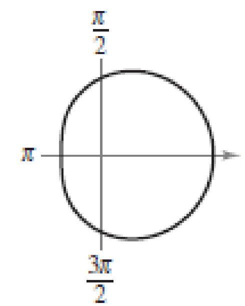
$\frac{a}{b} = 1$

Cardioid (heart-shaped)



$1 < \frac{a}{b} < 2$

Dimpled limaçon



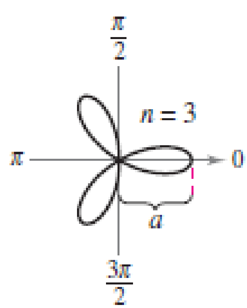
$\frac{a}{b} \geq 2$

Convex limaçon

Rose Curves

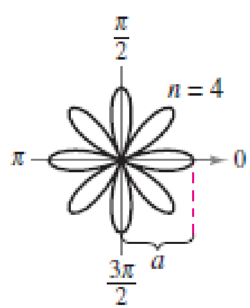
n petals when n is odd

$2n$ petals when n is even ($n \geq 2$)



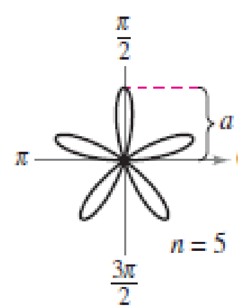
$r = a \cos n\theta$

Rose curve



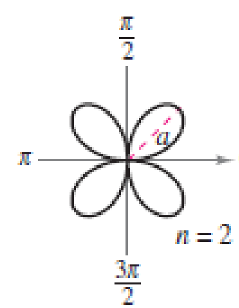
$r = a \cos n\theta$

Rose curve



$r = a \sin n\theta$

Rose curve



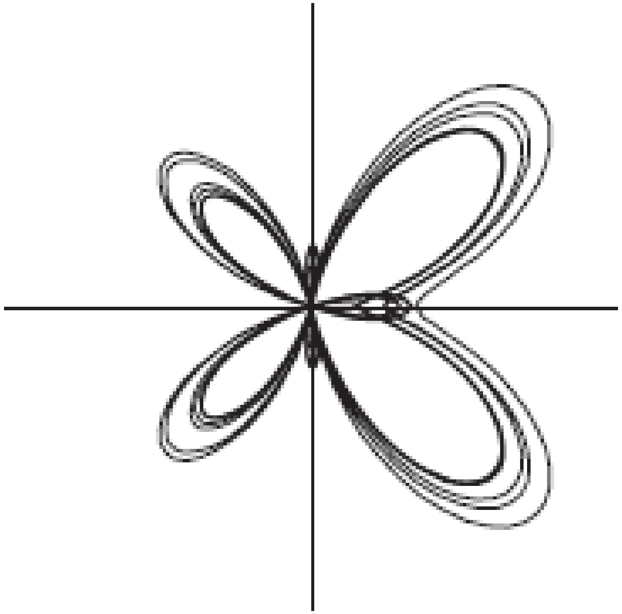
$r = a \sin n\theta$

Rose curve

Ancora una curva notevole

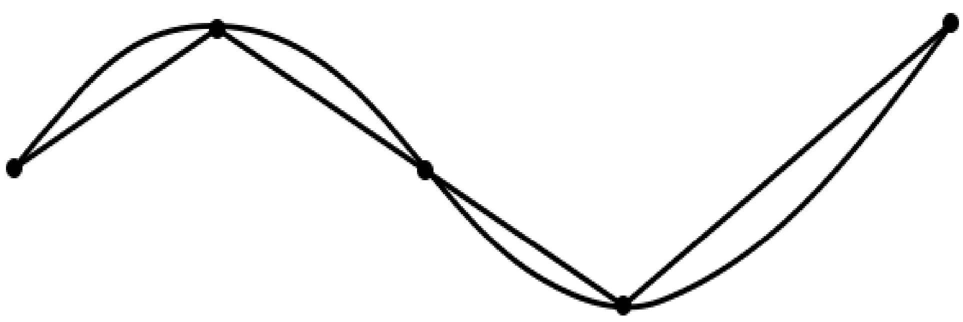
Butterfly Curve Use a graphing utility to graph the curve shown below. The curve is given by

$$r = e^{\cos\theta} - 2\cos 4\theta + \sin^5 \frac{\theta}{12}.$$



Lunghezza di una curva

Una curva nel piano può essere approssimata collegando un limitato numero di punti sulla curva e utilizzando segmenti di linea per creare un percorso poligonale . Poiché è facile calcolare la lunghezza di ogni segmento lineare (utilizzando il teorema di Pitagora nello spazio euclideo, per esempio), la lunghezza totale della approssimazione può essere trovata sommando le lunghezze di ciascun segmento lineare La somma delle lunghezze dei segmenti è la lunghezza del "cammino poligonale". La lunghezza del segmento sarà definita come la distanza tra i due estremi.
La lunghezza della curva è il più piccolo numero che la lunghezza del cammino poligonale non può superare, ovvero è l'estremo superiore della lunghezza del cammino della poligonale, al variare delle poligonali



Lunghezza di una curva

Definizione 4

Sia $\gamma: [a, b] \to R$ una curva continua, si consideri una partizione $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ dell'intervallo $[a, b]$. La poligonale P, inscritta nel sostegno della curva e di vertici $\gamma(a), \gamma(t_1), \dots, \gamma(b)$ ha (per definizione) lunghezza pari a:

$$l(P) = \sum_{1=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$$

Si definisce lunghezza della curva γ il valore:

$$L(\gamma) = \sup_{P} l(P)$$

dove P rappresenta tutte le possibili poligonali inscritte.

Lunghezza di una curva

Teorema

Se γ: $[a, b] \to R^n$ è una curva di classe C^1 allora essa è rettificabile e la sua lunghezza $L(\gamma)$ è data dall'integrale:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

dove $\|v\|$ rappresenta la norma euclidea di un generico vettore v.

La forma

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

può anche essere espressa come:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

Lunghezza di una curva

In particolare, se γ è una curva piana rappresentata, nell'intervallo [a,b] dall'equazione $y = f(x)$, con $f(x)$ continua con la sua derivata prima, la lunghezza $L(\gamma)$ è espressa da:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

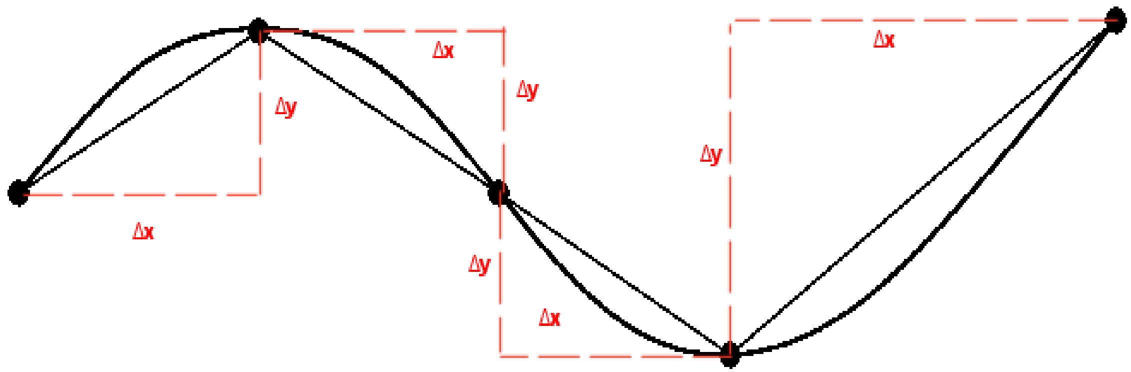
Infine, se la curva γè rappresentata, nell'intervallo $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ dall'equazione polare

$$\rho = \rho(\theta)$$

con $\rho(\theta)$ continua con la sua derivata prima, allora si ha:

$$L(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}d\theta$$

Dimostrazione



Supponiamo che esista una curva rettificabile data da una funzione $f(x)$. Per approssimare la lunghezza dell'arco S tra due punti possiamo costruire una serie di triangoli rettangoli come mostrato in figura. Per comodità, le basi di tutti i triangoli possono essere posti uguali a Δx, in modo che ad ognuno di essi sia associato un Δy. La lunghezza di ogni ipotenusa è data dal teorema di Pitagora:

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

La somma delle lunghezze delle n ipotenuse approssima S:

$$S \sim \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

Moltiplicando il radicando da $\Delta x^2/\Delta x^2$ produce:

$$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)\frac{\Delta x^2}{\Delta x^2}}=\sqrt{1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}\Delta x=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$$

Poi, il nostro risultato precedente diventa:

$$S\sim\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i$$

Se la lunghezza Δx di questi segmenti viene presa sempre più piccola, l'approssimazione migliora. Il limite dell'approssimazione, quando Δx va a zero, è pari a S:

$$S=\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

Si può dimostrare che tale lunghezza non dipende né dagli assi di riferimento né dalla particolare rappresentazione parametrica ma dipende soltanto dalla curva γ.

Forme differenziali lineari

Sia $\Omega \subset R^3$ un insieme aperto e siano $A, B, C: \Omega \to R$ funzioni continue in Ω. Si definisce forma differenziale ω in Ω l'espressione

$$\omega = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz$$

Data la curva orientata semplice e regolare γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad t \in [a,b] \\ z = z(t) \end{cases}$$

si chiama integrale della forma differenziale lineare (o anche integrale curvilineo di seconda specie), lungo la curva γ, il numero

$$\int_a^b (A\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + B\left(x(t),y(t),z(t)\right)y'(t) + C\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t))dt$$

Tale espressione viene anche indicata:

$$\int_\gamma A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz$$

o, anche

$$\int_\gamma \omega$$

Forme differenziali

Con queste operazione, l'insieme delle forme differenziali lineari, definite in un insieme Ω di R, è uno spazio vettoriale.

Per una forma differenziale si possono definire le seguenti operazioni:

I – Dato un vettore $r(r_1, r_2)$ e un punto $(x, y) \in \Omega$, il prodotto scalare tra ω ed r è: $\omega \cdot r = A(x, y)r_1 + B(x, y)r_2$

II – dato uno scalare $c \in R$ ed una funzione definita in Ω e a valori in R, si definisce la moltiplicazione della forma differenziale c per f nel modo seguente: $c \cdot \omega = cXdx + cYdy$ e $f \cdot \omega = (fX)dx + (fY)dy$;

III – date due forme differenziali ω_1 e ω_2 si definisce addizione di ω_1 e ω_2 la seguente forma:

$$\omega_1 + \omega_2 = (X_1dx + Y_1dy) + (X_2dx + Y_2dy) = (X_1 + X_2)dx + (Y_1 + Y_2)dy$$

Osservazione

Consideriamo, ora, il differenziale di una funzione $f(x, y)$. Si ha $df = f_x dx + f_y dy$. Quindi il differenziale di una funzione f si può vedere come una forma differenziale lineare.

Non vale, ovviamente, il viceversa: data una forma lineare, non è detto che ci sia una funzione f il cui differenziale coincida con la forma lineare stessa.

Indipendenza dalla parametrizzazione

Teorema - *La formula*

$$\int_a^b (A\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + B\,\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) + C\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t))dt$$

non dipende dalla parametrizzazione della curva orientata semplice e regolare γ ma dipendono dall'orientazione della curva stessa.

Dimostrazione
Vedi testo o appunti

Forme differenziali su curve generalmente regolari

Nel caso di una curve orientata, semplice regolare γ, poiché γ si può considerare come l'unione di curve regolari $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, l'integrale della forma differenziale esiste anche in questo caso e si ha:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \cdots + \int_{\gamma_n} \omega$$

Nel fare gli integrali curvilinei delle forme differenziali occorre prestare molta attenzione all'orientamento della curva. Per questo motivo, gli integrali curvilinei delle forme differenziali sono detti integrali orientati. Vale, infatti, il seguente teorema:

Teorema

Data una forma differenziale ω e una curva regolare γ si ha:

$$\int_{-\gamma} \omega = -\int_{+\gamma} \omega$$

Teorema fondamentale per gli integrali curvilinei

Assegnata una funzione $f(x,y)$, si consideri la forma differenziale data dal suo differenziale: $\omega = df = f_x dx + f_y dy$.
Data una curva regolare $+\gamma$ espressa mediante rappresentazione parametrica da $\big(x(t);\ y(t)\big)$(o mediante la funzione vettoriale r), si ha

$$\int_{+\gamma} df = f\big(x(b), y(b)\big) - f(x(a), y(a))$$

o, equivalentemente

$$\int_{+\gamma} \nabla f \cdot dr = f\big(x(b), y(b)\big) - f(x(a), y(a))$$

Su molti testi, l'integrale curvilineo delle forme differenziali viene denominato integrale curvilineo di seconda specie.

Forme differenziali esatte

Definizione
Una forma differenziale $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)dx_i$ definita in un aperto $A \subset R^n$ si dice esatta se è il differenziale di qualche funzione, in altre parole, se esiste una funzione detta primitiva della forma ω:

$$f: A \to R$$

di classe C^1 tale che:

$$\omega = df$$

o più esplicitamente se $\forall x \in A$:

$$a_k(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}, \qquad \forall k = 1,2, \dots, n$$

Formula fondamentale per gli integrali curvilinei
Sia ω una forma differenziale, definita in A ed esatta e sia f una sua primitiva.
Allora

$$\int_{\gamma} \omega = f(P_2) - f(P_1)$$

dove P_1 e P_2 sono rispettivamente il primo e il secondo estremo della curva γ

Forme differenziali chiuse

Definizione
Una forma differenziale $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)dx_i$ definita in un aperto $A \subset R^n$ e di classe $C^1(A)$, si dice chiusa se verifica la seguente relazione:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_k} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i}$$

Osservazione
Se una forma differenziale di classe C^1 è esatta, allora è chiusa; in generale non vale il viceversa. La condizione di essere chiusa, senza opportune ipotesi sul dominio della forma differenziale, non assicura che la forma sia esatta.

Un particolare tipo di insieme ci permette di stabilire alcune importanti proprietà per le forme differenziali, se definite su questi insiemi. Si tratta degli **insiemi connessi.**

Domini connessi

Definizione
Un insieme aperto $A \subset R^2$ si dice connesso se, qualunque siano i punti P e Q presi in A, esiste una linea poligonale che è contenuta tutta in A e che ha P e Q come estremi.

Lemma 1
Sia f una funzione di classe C^1 definita in un insieme aperto e connesso A di R^2. Se, $\forall(x, y) \in A$ risulta $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$, allora f è una funzione costante in A.

Lemma 2
Se F e G sono primitive, di classe C^1, definite in un insieme aperto e connesso, della stessa forma differenziale lineare ω, allora differiscono per una costante.

Lemma 3
Data $\omega = Xdx + Ydy$ una forma differenziale lineare, di classe C^0 e definita in un insieme aperto e connesso, se F è una sua primitiva, allora ogni primitiva di ω è del tipo $F + cost$.

Forme differenziali esatte: caratterizzazione

Dato un aperto connesso $A \subset R^2$ e data una forma differenziale lineare ω di classe C^0in A, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

I - ω è esatta;

II – Se P_0 e P sono due punti qualunque in A e γ_1 e γ_2 sono due curve generalmente regolari orientate contenute in A, che hanno entrambe come primo estremo P_0 e come secondo estremo P, allora:

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

vale a dire che l'integrale curvilineo dipende solo dagli estremi e non dal cammino percorso;

III – se γ è una qualunque curva generalmente regolare, chiusa e contenuta in A, allora

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

Chiusura ed esattezza

Teorema:
Data $\omega = Xdx + Ydy$ una forma differenziale lineare di classe C^1 in un insieme aperto A di R^2.
ω esatta $\Longrightarrow$ ω chiusa

Dimostrazione
Se ω è esatta, vuol dire che esiste una primitiva F tale che $F_x = X$
E $F_y = Y$. Per ipotesi ω è di classe C^1, cioè le derivate parziali di X e Y sono continue. Di conseguenza F è di classe C^2 (poiché le sue derivate parziali del secondo ordine coincidono con le derivate parziali prime di X e Y). Inoltre si ha

$$\frac{\partial F^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial F^2}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

Per il teorema di Schwartz, le derivate parziali miste di F coincidono, quindi risulta

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

L’asserto è provato.

Domini semplicemente connessi

Definizione
Un sottoinsieme di R^2, A aperto, si dice semplicemente connesso se:
1. è connesso
2. ogni curva generalmente regolare, chiusa e semplice contenuta in A è la frontiera di un insieme limitato contenuto in A.

Osservazione
Dire che A è un insieme semplicemente connesso vuol dire che l'insieme è "senza buchi", in quanto ogni curva chiusa e semplice, generalmente regolare, può essere deformata con continuità fino a ridursi ad un singolo punto.
Una corona circolare ha "buchi" e, infatti, non è semplicemente connesso. Il piano privato di un punto non è semplicemente connesso.
L'interno di un cerchio è semplicemente connesso. La circonferenza non è semplicemente connesso.

Teorema
Sia ω una forma differenziale lineare di classe C^1 in A aperto e semplicemente connesso. Allora se ω è chiusa è esatta

Lavoro di una forza

Un esempio in cui vediamo applicata una forma differenziale in fisica è il lavoro compiuto da un campo di forze. Se consideriamo una particella che si muove lungo una curva, indicando con $\bar{s}$ la distanza percorsa dalla particella lungo la curva +γ, e con $\bar{F} = (X, Y)$ una forza che agisce sulla particella mentre essa si sposta di un tratto $d\bar{s}$, si definisce lavoro elementare eseguito da $\bar{F}$ il prodotto scalare:

$$dL = \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

In coordinate cartesiane, e limitandoci al caso bidimensionale, si può scrivere

$$dL = Xdx + Ydy$$

Il lavoro elementare è dunque una forma differenziale.

Il lavoro totale lungo tutta la curva $+\gamma$ è definito tramite l'integrale della forma differenziale dL:

$$L = \int_{+\gamma} dL \int_{+\gamma} F \cdot T \cdot ds = \int_a^b X\big(x(t), y(t)\big)dx + Y\big(x(t), y(t)\big)dy$$

Dove T è il versore tangente a γ

Circuitazione

Nel caso in cui γ sia una curva chiusa, l'integrale

$$\int_{\gamma} F \cdot T \cdot ds$$

viene anche detto *circuitazione* di ***F*** lungo γ, e indicato con il simbolo

$$\oint F \cdot T \cdot ds$$

Campo vettoriale

Definizione
Si dice campo vettoriale in R^3 un'applicazione continua

$$F: \Omega \subset R^3 \to R^3$$

ovvero

$$F(x, y, z) \in \Omega = (A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z))$$

con $(x, y, z) \in \Omega$ e con $A, B, C: \Omega \to R$ funzioni continue.

Il motivo del nome campo vettoriale è il seguente:
La funzione $F(x, y, z)$ associa ad ogni punto $\mathrm{P}(x, y, z) \in \Omega$ il punto $P' = F(x, y, z)$. Poiché il punto P'determina il vettore $\overline{OP'}$ applicato nell'origine, possiamo dire che la funzione $F(x, y, z)$ associa ad ogni punto P il vettore $\overline{OP'}$. Se poi consideriamo il vettore $\bar{v}$ applicato nel punto P ed equivalente al vettore $\overline{OP'}$, possiamo dire che la funzione $F(x, y, z)$ associa a ogni punto P di Ω uno ed un solo vettore $\bar{v}$ applicato in P

Campi conservativi

Teorema
Un campo vettoriale $F(a, b, c)$ è conservativo se e solo se la forma differenziale

$$\omega = a(x, y, z)dx + b(x, y, z)dy + c(x, y, z)dz$$

è esatta.

Definizione
Un campo vettoriale $F(a, b, c)$ è conservativo se esiste una funzione
U: $A \subset R^3 \rightarrow R$ di classe C^1 in A, tale che il gradiente di U coincida con F in A:

$$\nabla U(x, y, z) = F(x, y, z)$$

La funzione U è anche detta potenziale del campo.

Teorema
Il lavoro compiuto da un campo conservativo continuo ∇U lungo una curva regolare a tratti γè uguale alla variazione della funzione potenziale agli estremi della curva:

$$\int_\gamma \nabla U \cdot T \cdot ds = U(r(b)) - U(r(a))$$

Ne segue che l'integrale non dipende direttamente da γ ma solo dai suoi estremi

Caratterizzazione dei campi conservativi

Sia $F: A \subset R^3 \rightarrow R^3$ un campo vettoriale di classe C^1. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

I – F è conservativo (cioè ammette una funzione potenziale);

II – date due curve γ_1 e γ_2 continue in A e aventi gli stessi estremi (nell'ordine), si ha:

$$\int_{\gamma_1} F \cdot T \cdot ds = \int_{\gamma_2} F \cdot T \cdot ds$$

III – data una qualunque curva chiusa γ contenuta in A, la sua circuitazione è nulla:

$$\oint F \cdot T \cdot ds = 0$$

Il Rotore

Dato in R^3 il campo vettoriale $F = A\hat{\imath} + B\hat{\jmath} + C\hat{k}$ che supponiamo di classe C^1, indichiamo con rotF il campo vettoriale

$$rotF = (C_y - B_x)\hat{\imath} - (C_x - A_z)\hat{\jmath} + (B_x - A_y)\hat{k}$$

che si ottiene sviluppando il determinante della seguente matrice simbolica

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

Teorema
Il campo vettoriale $F = A\hat{\imath} + B\hat{\jmath} + C\hat{k}$ di classe C^1 è irrotazionale se esso ammette rotore nullo

Teorema
Il campo vettoriale $F = A\hat{\imath} + B\hat{\jmath} + C\hat{k}$ è irrotazionale se e solo se la forma differenziale

$$\omega = a(x,y,z)dx + b(x,y,z)dy + c(x,y,z)dz$$

è chiusa