



Complementi su curve e superfici

Corso di Matematica 2

2014/2015

Corso di studi in Ingegneria meccanica

Teorema della divergenza

Teorema

Siano D un dominio regolare del piano e $F = (F_1, F_2)$ una applicazione da D verso R^2 di classe $C^1(D)$. Allora:

$$\iint_D \operatorname{div} F \, dx \, dy = \int_{\partial D} (F, N) \, ds$$

dove $\operatorname{div} F$ è la divergenza del vettore, $F(x, y) = (F_1(x, y); F_2(x, y))$ definito da

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

e (F, N) è il prodotto scalare tra il vettore F e il versore N normale a ∂D , rivolto verso l'esterno di D e s è l'ascissa curvilinea sulla frontiera di D

Dimostrazione

Se la frontiera di D è costituita da una curva regolare a tratti di equazioni parametriche $x = x(t)$ e $y = y(t)$, con $t \in [a; b]$, e se il verso indotto da tale rappresentazione coincide con quello positivo della frontiera ∂D , il versore normale esterno N , quindi per la definizione di integrale curvilineo

$$\begin{aligned} \int_{+\partial D} (F, N) \, ds &= \int_a^b \left(\frac{F_1 y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - \frac{F_2 x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) \sqrt{x'^2 + y'^2} \, dt = \int_a^b (F_1 y' - F_2 x') \, dt \\ &= \int_{+\partial D} F_1 \, dy - F_2 \, dx \end{aligned}$$

Teorema della divergenza

Dimostrazione

Dimostriamo questo caso utilizzando la prima formula di Gauss-Green con F_1 al posto di F e la seconda formula con F_2 al posto di F , abbiamo

$$\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial x} dx dy = \int_{\partial D} F_1 dy$$
$$\iint_D \frac{\partial F_2}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial D} F_2 dx$$

da cui, sommando membro a membro, si ha

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} -F_2 dx + F_1 dy = \iint_D \operatorname{div} F dx dy$$

Ma essendo

$$\int_{+\partial D} (F, N) ds = \int_{+\partial D} F_1 dy - F_2 dx$$

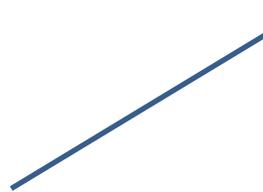
si ha la tesi.

Se la frontiera $di D$ è unione di un numero finito di curve regolari a tratti (come ad esempio in una corona circolare) si ragiona suddividendo D nell'unione di domini normali regolari privi di punti interni in comune.

Teorema della divergenza

Il teorema della divergenza, anche detto teorema di Ostrogradskij per il fatto che la prima dimostrazione è dovuta a Michail Ostrogradskij, è la generalizzazione a domini n-dimensionali del teorema fondamentale del calcolo integrale. A sua volta, esso è un caso speciale del più generale teorema di Stokes.

Da non confondere col teorema di Gauss-Green, che invece è un caso speciale (ristretto a 2 dimensioni) del teorema del rotore, o con il teorema del flusso.



Il teorema della divergenza nello spazio è simile a quello nel piano e trasforma un integrale triplo in un integrale superficiale

Teorema della divergenza nello spazio

Sia D un dominio regolare di \mathbb{R}^3 e sia

$$\mathbf{F}(x; y; z) = F_1(x; y; z)\mathbf{i} + F_2(x; y; z)\mathbf{j} + F_3(x; y; z)\mathbf{k}$$

un campo vettoriale di classe $C^1(D)$. Allora, l'integrale su D della divergenza del campo \mathbf{F} è pari al flusso del campo uscente da D si ha

$$\iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}(x, y, z) dx dy dz = \int_{\partial D} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) d\sigma$$

dove \mathbf{n} è il campo normale alla frontiera di D orientato verso l'esterno del dominio D

Teorema del rotore

Il teorema del rotore afferma che il flusso del rotore di determinati campi vettoriali attraverso superfici regolari dotate di bordo è uguale alla circuitazione del campo lungo la frontiera della superficie. Si tratta pertanto di un caso particolare del teorema di Stokes. Il teorema di Green è un caso speciale del teorema del rotore che considera superfici appartenenti a R^2

Teorema

Siano S una superficie regolare avente il contorno chiuso e regolare orientato γ^+ e $V \subset R^3$ un dominio contenente la superficie S : Sia

$$F(x; y; z) = F_1(x; y; z)\mathbf{i} + F_2(x; y; z)\mathbf{j} + F_3(x; y; z)\mathbf{k}$$

un campo vettoriale di classe $C^1(V)$, allora sussiste la seguente formula

$$\oint_{\gamma^+} F \cdot dr = \iint_S \text{rot}F \cdot n d\sigma$$

o, equivalentemente,

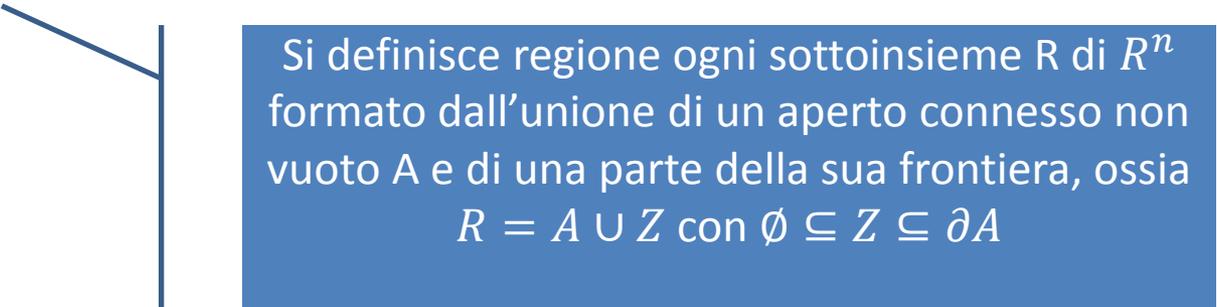
$$\begin{aligned} & \oint_{\gamma^+} F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz \\ &= \iint_S \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] d\sigma \end{aligned}$$

dove la curva γ^+ è percorsa nel verso corrispondente alla superficie orientata S^+ cioè un osservatore che si muove sulla curva C deve avere sempre a sinistra la faccia positiva della superficie considerata

Superfici

Definizione

Le superfici sono funzioni continue definite su particolari sottoinsiemi di R^2 , ossia sulle regioni piane; tali sottoinsiemi svolgono lo stesso ruolo degli intervalli I nella definizione delle curve.



Si definisce regione ogni sottoinsieme R di R^n formato dall'unione di un aperto connesso non vuoto A e di una parte della sua frontiera, ossia
$$R = A \cup Z \text{ con } \emptyset \subseteq Z \subseteq \partial A$$

Definizione

Sia $R \subseteq R^2$ una regione. Una funzione continua $\sigma : R \rightarrow R^3$ dicesi **superficie**. L'immagine $\Sigma = \sigma(R) \subseteq R^3$ è detta **sostegno della superficie**.

La rappresentazione cartesiana di una superficie può essere espressa come

$$\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = x(u, v)i + y(u, v)j + z(u, v)k$$

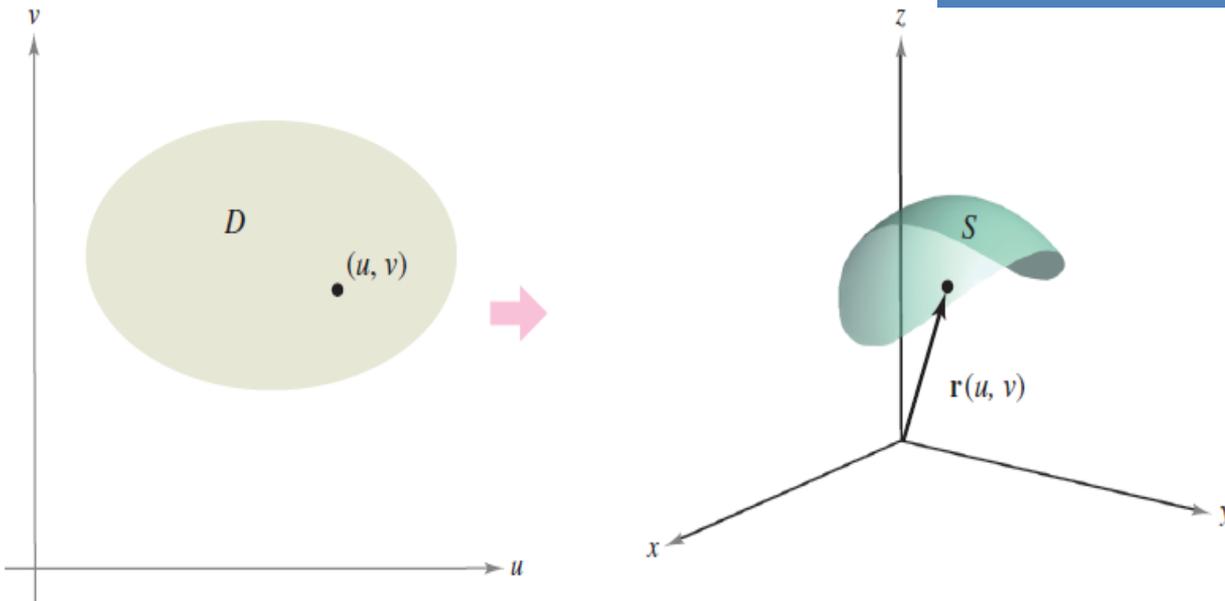
Superfici

Definizione

Una superficie si dice semplice se la restrizione di σ all'interno della regione R è iniettiva.

Una superficie è una calotta se è definita su una regione compatta R

Il concetto di calotta è l'analogo per le superfici del concetto di arco per le curve.



Superfici

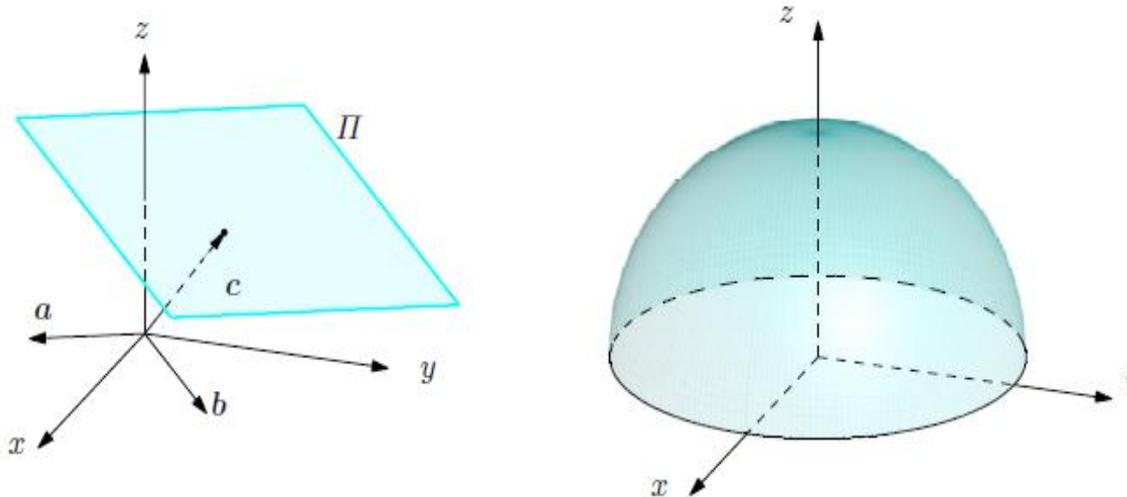
Esempio

Siano $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^3$ due vettori tali che $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{0}$, e sia $\mathbf{c} \in R^3$ un terzo vettore.

La superficie $\sigma : R^2 \rightarrow R^3$ data da

$$\begin{aligned}\sigma(u, v) &= \mathbf{a}u + \mathbf{b}v + \mathbf{c} \\ &= (a_1u + b_1v + c_1)\mathbf{i} + (a_2u + b_2v + c_2)\mathbf{j} + (a_3u + b_3v + c_3)\mathbf{k}\end{aligned}$$

costituisce la parametrizzazione del piano Π passante per il punto \mathbf{c} e parallelo ai vettori \mathbf{a} e \mathbf{b}



Superfici

Per determinare l'equazione cartesiana di tale piano, poniamo $\mathbf{x} = (x, y, z) = \boldsymbol{\sigma}(u, v)$ ed osserviamo che si ha

$$\mathbf{x} - \mathbf{c} = \mathbf{a}u + \mathbf{b}v$$

ossia il vettore $\mathbf{x} - \mathbf{c}$ è una combinazione lineare dei vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} .

Pertanto, si ha

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}u + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}v = 0$$

ossia

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

Ne segue che il piano in questione ha equazione

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

dove α , β e γ sono le componenti del vettore $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, mentre $\delta = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

Ogni funzione scalare continua $\phi : R \rightarrow R$, definita su una regione del piano, definisce la superficie $\boldsymbol{\sigma} : R \rightarrow R^3$

$$\boldsymbol{\sigma}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \phi(u, v)\mathbf{k}$$

il cui sostegno è il grafico di ϕ . Una tale superficie si dice **superficie cartesiana** o **topografica** (rispetto all'asse z).

Superfici

Ad esempio, la superficie $\sigma: R = \{(u, v) \in R^2: u^2 + v^2 \leq 1\} \rightarrow R^3$

$$\sigma(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \sqrt{1 - u^2 - v^2}\mathbf{k}$$

ha come sostegno l'emisfero superiore della sfera di centro l'origine e raggio unitario

Superfici di rotazione

Se ho una curva piana $\gamma: I \subseteq R \rightarrow R^3$ tale che il suo sostegno Γ giaccia nel semipiano xz con $x \geq 0$, facendo ruotare Γ intorno all'asse z , si ottiene il sostegno Σ della superficie di rotazione $\sigma: I \times [0, 2\pi] \rightarrow R^3$ data da

$$\sigma(u, v) = \gamma_1(u)\cos v \mathbf{i} + \gamma_2(u)\sin v \mathbf{j} + \gamma_3(u)\mathbf{k}$$

L'arco della curva che genera la superficie si chiama meridiano.

Esempio:

La superficie dell'ellissoide centrato in \mathbf{x}_0 e avente semiassi $a, b, c > 0$, definita dall'equazione cartesiana

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

è parametrizzata da

$$\sigma(u, v) = (x_0 + a \sin u \cos v) \mathbf{i} + (y_0 + b \sin u \sin v) \mathbf{j} + (z_0 + c \cos u) \mathbf{k}$$

Superfici di rotazione

Se ci limitiamo a considerare le possibilità consentite da $a \geq b \geq c > 0$, abbiamo la seguente casistica:

$a > b > c$ si ha un **ellissoide scaleno**;

$a > b = c$ si ha uno **sferoide prolato** (a forma di pallone da rugby);

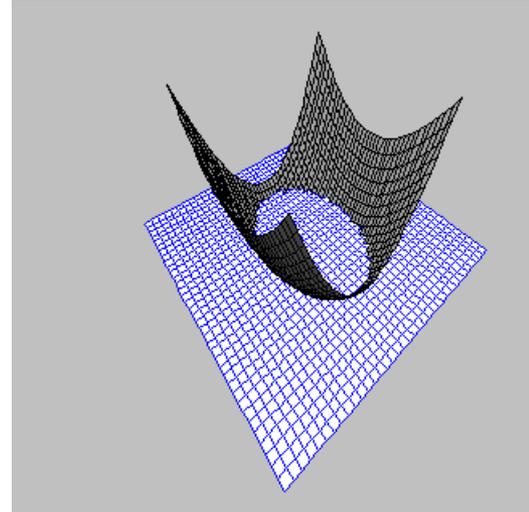
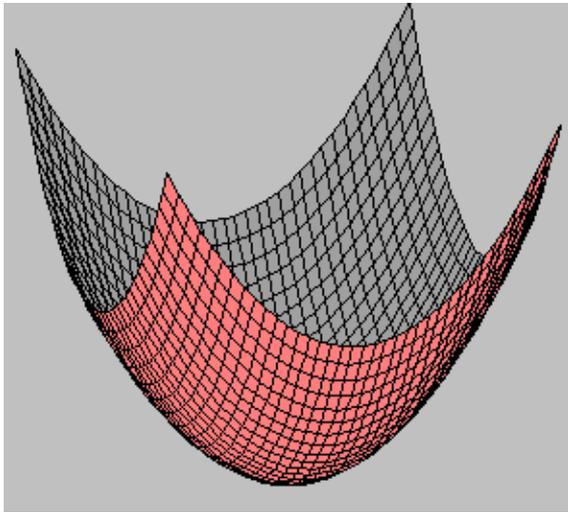
$a = b > c$ si ha uno **sferoide oblato** (a forma di lenticchia);

$a = b = c$ si ha una sfera, come già segnalato.

Superfici di rotazione

Paraboloide ellittico

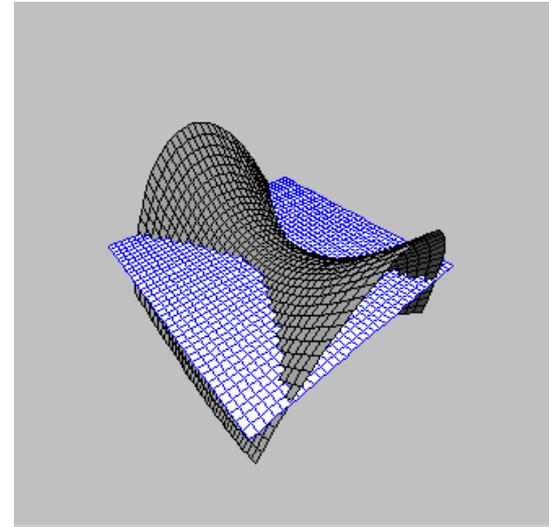
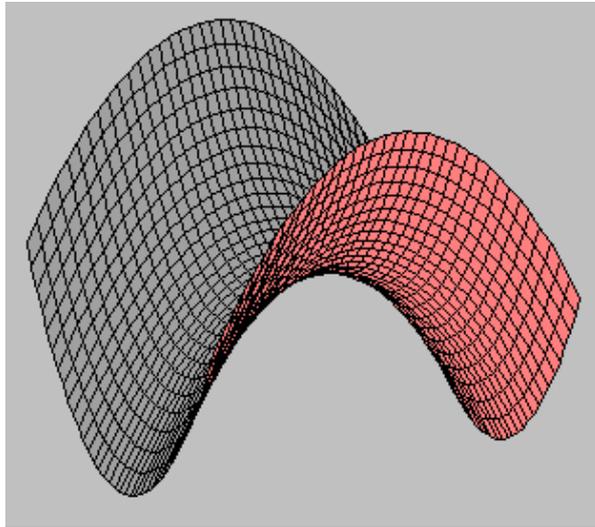
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{z}{c}$$



Superfici di rotazione

Paraboloide iperbolico

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{z}{c}$$

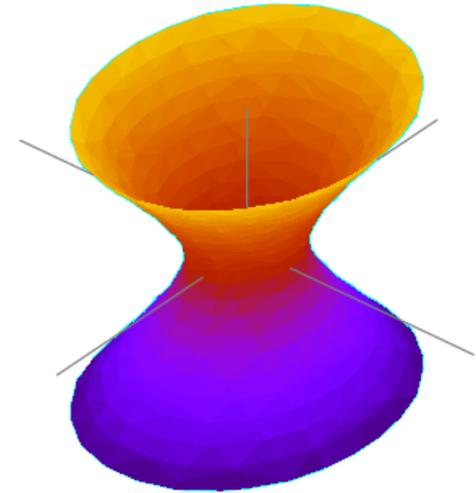


Dove **a** e **b** rappresentano il grado di curvatura nel piano $x - z$ e $y - z$, mentre **c** rappresenta la direzione di apertura del paraboloide, verso l'alto per $c > 0$ (per il paraboloide ellittico) e verso il basso lungo l'asse x per $c > 0$ (per il paraboloide iperbolico).

Superfici di rotazione

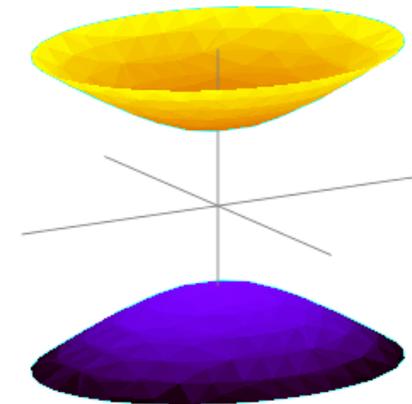
Iperboloide a una falda (iperbolico)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Iperboloide a due falde (ellittico)

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

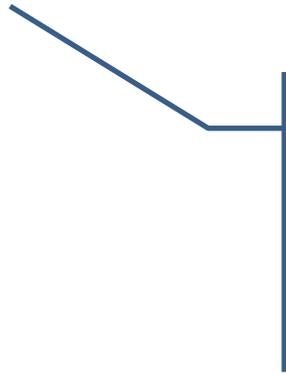


Superfici regolari

Definizione

Una **superficie** $\sigma : R \rightarrow R^3$ si dice **regolare** se σ è di classe C^1 su $A = \dot{R}$ e se la matrice jacobiana J_σ ha rango massimo (= 2) in ogni punto di A .

Una **calotta** (ossia una superficie definita su una regione R compatta) si dice **regolare** se è la restrizione a R di una superficie regolare definita su un aperto che contiene R .



La condizione su J_σ equivale al fatto che i vettori $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$ sono linearmente indipendenti per ogni $(u_0, v_0) \in A$

Definizione

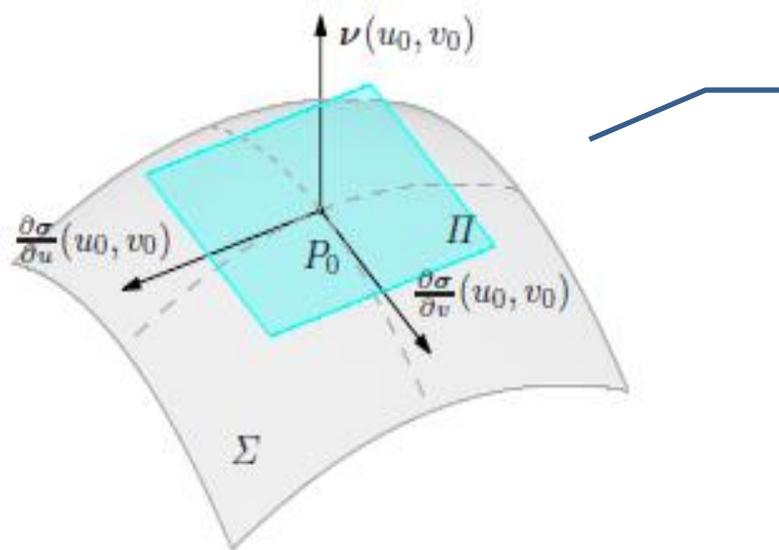
Un sottoinsieme Σ di R^3 è una **superficie regolare e semplice** (oppure una **calotta regolare e semplice**) se esiste una parametrizzazione $\sigma : R \rightarrow \Sigma$ di Σ avente tali proprietà.

Piano tangente

Sia $\Sigma \subset R^3$ una superficie regolare e semplice parametrizzata da $\sigma : R \rightarrow \Sigma$ e sia $P_0 = \sigma(u_0, v_0)$ un punto su Σ , immagine di un punto $(u_0, v_0) \in A = \dot{R}$. Ricordando che i vettori $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$ sono linearmente indipendenti per ogni $(u_0, v_0) \in A$ si può introdurre l'applicazione $\Pi: R^2 \rightarrow R^3$ data da:

$$\Pi(u, v) = \sigma(u_0, v_0) + \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0)(u - u_0) + \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)(v - v_0)$$

Che costituisce una parametrizzazione di un piano passante per P_0 . Chiamiamo tale piano il piano tangente alla superficie in P_0 .



I vettori tangenti a tali curve in P_0 sono rispettivamente i vettori $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$; pertanto, le rette tangenti alle curve in P_0 giacciono sul piano tangente a Σ in P_0 e precisamente lo generano attraverso tutte le loro combinazioni lineari. Più in generale, si può dimostrare che il piano tangente contiene il vettore tangente ad una qualsiasi curva regolare passante per P_0 e giacente sulla superficie Σ .

Piano tangente

Definizione

Il vettore

$$v(u_0, v_0) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$$

si dice vettore normale alla superficie Σ in P_0 . Il versore normale ad esso associato sarà indicato con

$$n(u_0, v_0) = \frac{v(u_0, v_0)}{\|v(u_0, v_0)\|}$$

Si può dimostrare che, come la retta tangente per le curve, così il piano tangente è intrinseco al sostegno della superficie, vale a dire indipendente dalla sua parametrizzazione. Conseguentemente, la direzione del vettore normale è intrinseca, mentre modulo e verso dipendono dalla particolare parametrizzazione.

Il piano tangente alla superficie Σ è invariante per parametrizzazioni congruenti. Due diverse parametrizzazioni congruenti generano vettori normali aventi la stessa direzione, mentre il verso è lo stesso se le parametrizzazioni sono equivalenti (cambiamento di variabili destrorso) ed è opposto altrimenti (cambiamento di variabile sinistrorso).

Superfici orientabili

Due diverse parametrizzazioni di una curva regolare e semplice Γ in R^n sono tra loro congruenti (e dunque possiamo definire due diverse orientazioni su di essa).

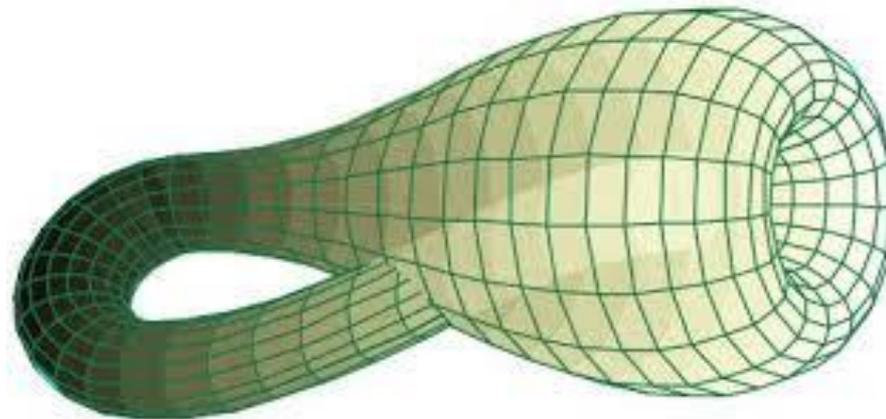
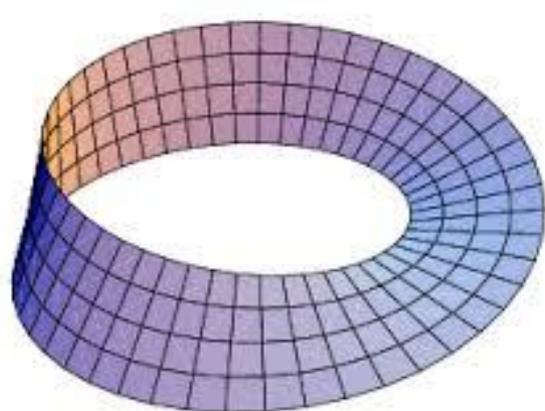
Un analogo risultato per le superfici non vale.

Alcuni controesempi sono il nastro di Mobius e la bottiglia di Klein.

Ha dunque senso dare la seguente definizione.

Definizione

*Una superficie regolare e semplice $\Sigma \subset R^3$ si dice **orientabile** se, prese due qualunque parametrizzazioni regolari e semplici, esse sono tra loro congruenti.*



Integrali superficiali di I specie

Sia S una *superficie regolare* definita nel dominio limitato e connesso D attraverso la rappresentazione parametrica $x = x(u; v)$ $y = y(u; v)$ $z = z(u; v)$ con $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Sia $\Delta = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ una suddivisione in superfici elementari, della superficie regolare S realizzata mediante le curve coordinate sulla superficie. Si denoti con ω_i l'area dell'elemento di superficie s_i e con d_i il diametro della più piccola sfera che contiene l'elemento di superficie S_i .

Siano

$$v(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$$

e $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ un punto qualsiasi di S_i .

Sia $f(x; y; z)$ una funzione continua in un assegnato dominio D dello spazio e sia S una superficie regolare la quale sia interamente contenuta in D . Il valore della somma

$$\sigma(f, \Delta, N) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \omega_i$$

dipende, in generale, sia dal modo in cui `e suddivisa la superficie S e sia dai punti $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ ($i = 1; 2, 3, \dots, n$) scelti ad arbitrio nelle singole superfici in cui `e stata suddivisa la superficie Σ .

La sommatoria ha per limite il numero reale I per $v(\Delta)$ tendente a zero, e si scrive

$$\lim_{v(\Delta) \rightarrow 0} \sigma(f, \Delta, N) = \lim_{v(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \omega_i = I$$

Integrali superficiali di I specie

La sommatoria ha per limite il numero reale I per $v(\Delta)$ tendente a zero, e si scrive

$$\lim_{v(\Delta) \rightarrow 0} \sigma(f, \Delta, N) = \lim_{v(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \omega_i = I$$

quando $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che, per tutte le suddivisioni Δ di S in elementi di superficie s_i tali che $v(\Delta) < \delta$ e comunque si scelgano i punti $N_i \in s_i$ risulti

$$|\sigma(f, \Delta, N) - I| < \varepsilon$$

Quando esiste tale limite, I si denota con il simbolo

$$I = \iint_S f(x, y, z) d\sigma$$

e si chiama *integrale di superficie di prima specie* esteso alla superficie S .

Se S ha una rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

allora sussiste la seguente *formula di riduzione ad un integrale doppio*:

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) d\sigma &= \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |r'_u \times r'_v| dudv \\ &= \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} dudv \end{aligned}$$

Integrali superficiali di I specie

Proposizione

Per gli integrali superficiali valgono le proprietà di linearità, additività, monotonia

Proprietà di linearità

Qualunque siano le funzione continue f_1 e f_2 in V (dove V è un dominio di \mathbb{R}^3 tale che $S \subset V$), allora

$$\int_S (c_1 f_1(x, y, z) + c_2 f_2(x, y, z)) d\sigma = c_1 \int_S (f_1(x, y, z)) d\sigma + c_2 \int_S f_2(x, y, z) d\sigma$$

Proprietà di additività

Per ogni funzione f continua in V e $S = S_1 \cup S_2$, allora

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma = \int_{S_1} f(x, y, z) d\sigma + \int_{S_2} f(x, y, z) d\sigma$$

Proprietà di monotonia

Date due funzioni reali f e g continue in V e tali che $f(x, y, z) \leq g(x, y, z) \forall (x, y, z) \in V$ allora

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma \leq \int_S g(x, y, z) d\sigma$$

Integrali superficiali di II specie

Definizione.

Sia S una superficie regolare. Se è possibile scegliere il versore normale in modo che, partendo da un punto $P_0 \in S$ e seguendo una qualsiasi curva regolare e chiusa sulla superficie, il versore normale vari con continuità e ritorni nella posizione iniziale, allora si dice che la superficie S è orientabile.

Il versore normale determina (localmente) l'orientamento della superficie.

Scelto un verso per la normale \mathbf{n} a S , si definisce *faccia positiva* della superficie regolare orientabile quella volta verso la normale positiva; l'altra faccia è detta *negativa*. Viceversa, fissata la faccia positiva di S , resta definita l'orientamento della normale

La frontiera di S si orienta positivamente (e in tal caso si scrive ∂S^+) scegliendo il verso di percorrenza della curva ∂S in modo da lasciare i punti di S a sinistra.

Ora, sia fissato l'orientamento della superficie S e sia positiva la faccia superiore rispetto al piano xy , cioè la faccia per cui il versore $\mathbf{n} (= \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k})$ della normale alla superficie forma un angolo $\gamma \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ con l'asse z :

Integrali superficiali di II specie

Definizione.

L'integrale di superficie di seconda specie esteso alla superficie regolare e orientata S è definito da

$$\iint_{S^+} F_1(x, y, z)dydz + F_2(x, y, z)dzdx + F_3(x, y, z)dxdy \\ = \iint_{S^+} [F_1 \cos\alpha + F_2(x, y, z) \cos\beta + F_3(x, y, z) \cos\gamma] d\sigma = \iint_{S^+} F \cdot n d\sigma$$

dove

$$F = F_1(x; y; z)\mathbf{i} + F_2(x; y; z)\mathbf{j} + F_3(x; y; z)\mathbf{k}$$

Il termine

$$\iint_{S^+} F \cdot n d\sigma$$

rappresenta il **flusso del campo vettoriale** F attraverso la superficie S .

Il flusso del campo vettoriale F cambia di segno se cambia l'orientamento di S (cioè il verso di n).

Integrali superficiali: applicazioni meccaniche

Sia

$$\rho: S \rightarrow [0, +\infty]$$

la densità di una distribuzione di massa sulla superficie S . La massa totale M è definita e definita da

$$M = \int_S \rho(x, y, z) d\sigma$$

mentre il centro di massa (baricentro) G di S è definito come il punto di coordinate

$$x_G = \frac{1}{M} \int_S x \cdot \rho(x, y, z) d\sigma$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int_S y \cdot \rho(x, y, z) d\sigma$$

$$z_G = \frac{1}{M} \int_S z \cdot \rho(x, y, z) d\sigma$$

Nel caso di una distribuzione uniforme di massa, cioè ρ costante, allora il baricentro G della superficie è dato da

$$x_G = \frac{1}{A(S)} \int_S x d\sigma$$

$$y_G = \frac{1}{A(S)} \int_S y d\sigma$$

$$z_G = \frac{1}{A(S)} \int_S z d\sigma$$

Integrali superficiali: applicazioni meccaniche

Definizione

Il momento d'inerzia della distribuzione assegnata rispetto a un dato asse r è

$$I_r = \int_S \rho(x, y, z) d^2(x, y, z) d\sigma$$

dove $d(x, y, z)$ è la distanza del punto $P(x, y, z)$ dall'asse r