22. — *Calcolo approssimato delle radici di una equazione.*

In molte questioni applicative si presenta il caso di ricercare, se esistono, le radici o soluzioni di una equazione del tipo:

$$f(x) = 0\,, \tag{26}$$

ove $f(x)$ è una assegnata funzione reale della variabile reale x [1].

Si osservi innanzi tutto che se sulla funzione reale di variabile reale $f(x)$ non viene fatta alcuna ipotesi, il problema della ricerca delle radici della (26) è troppo generale, potendosi presentare tutte le circostanze: mancanza di radici, radici in numero finito, radici costituenti un insieme infinito.

Ai fini però delle applicazioni interessano sostanzialmente le equazioni, i cui primi membri sono funzioni continue e derivabili piú volte e che ammettono un numero finito di radici in ogni intervallo finito.

Si osservi ancora che la determinazione delle *radici reali* della (26) equivale alla ricerca dei punti d'intersezione del grafico della $f(x)$ con l'asse delle x.

Studiando tale grafico con il metodo indicato nel numero precedente ed eseguendo con cura il relativo disegno si può avere un'idea abbastanza precisa sul valore delle radici reali della (26), sempre, s'intende, che esistano e che ne cada un numero finito in ogni intervallo finito.

In altre parole, si riuscirà certamente a *separare le radici*, vale a dire a determinare degli intervalli $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., privi a due a due di punti comuni e tali che in ognuno di essi cada una ed una sola radice reale dell'equazione proposta.

Considerato uno di questi intervalli $[a, b]$, non esistono, salvo casi particolari, metodi generali per calcolare la radice ξ che cade in esso.

Però nelle questioni applicative è sufficiente la conoscenza di un valore approssimato di ξ, con approssimazione prefissata.

Ora ci proponiamo appunto di esporre due procedimenti per il cal-

---

[1] Ad esempio, nella ricerca dei punti di massimo e minimo relativo di una funzione reale derivabile, si richiede appunto la risoluzione di un'equazione del tipo (26).

colo approssimato delle radici di una equazione: i cosiddetti metodi delle *tangenti* e delle *secanti*.

Premettiamo però la dimostrazione del seguente:

Teorema. — *Sia $f(x)$ una funzione reale definita nell'intervallo $[a, b]$ e ivi derivabile due volte. Inoltre in $[a, b]$ la $f''(x)$ sia sempre positiva o sempre negativa e la $f(x)$ assuma, agli estremi di $[a, b]$, valori di segno opposto.*

In tali ipotesi, l'equazione:

$$f(x) = 0\,,$$

ammette una ed una sola radice ξ interna all'intervallo $[a, b]$.

Dimostrazione. — Sia, ad esempio:

$$f''(x) > 0\,, \qquad f(a) > 0\,, \qquad f(b) < 0\,.$$

Essendo $f''(x) > 0$, la $f'(x)$ è *crescente in senso stretto in* $[a, b]$ e quindi si presentano come possibili tre casi:

1°) la $f'(x)$ è sempre positiva in $a \rightharpoonup b$; 2°) la $f'(x)$ è sempre negativa in $a \leftharpoonup b$; 3°) esiste un punto c interno ad $[a, b]$ tale che $f'(c) = 0$, essendo $f'(x) < 0$ in $a \leftharpoonup c$, e $f'(x) > 0$ in $c \rightharpoonup b$.

Il primo caso non può presentarsi, perché la $f(x)$ sarebbe crescente in $[a, b]$, e ciò contro l'ipotesi $f(a) > 0$, $f(b) < 0$.

Nel secondo caso la $f(x)$ è *decrescente in senso stretto in* $[a, b]$ e passando dal valore $f(a) > 0$ al valore $f(b) < 0$, deve annullarsi *una ed una sola volta* in un punto ξ interno ad $[a, b]$.

Nel terzo caso, in $[a, c]$ la $f(x)$ decresce in senso stretto, mentre in $[c, b]$ cresce passando dal valore $f(c)$ al valore $f(b) < 0$. Deve quindi essere $f(c) < 0$, e perciò la $f(x)$ deve annullarsi una ed una sola volta in un punto ξ interno all'intervallo $[a, c]$, e con ciò il teorema è provato.

6. Approssimazione delle radici di un'equazione

Approfondiamo ulteriormente lo studio delle equazioni, affrontando il problema dell'approssimazione numerica delle radici di un'equazione non risolvibile algebricamente.
Presenteremo tre metodi di approssimazione differenti.

Il metodo di bisezione

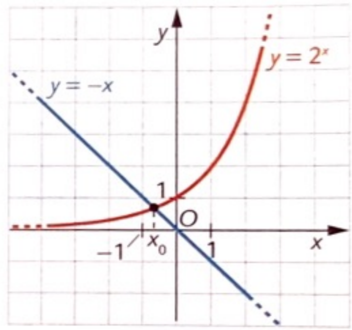
Il metodo più elementare per approssimare una radice di un'equazione è basato sul *teorema degli zeri* che abbiamo presentato nell'**Unità 4** (**Paragrafo 3**).

ESEMPIO Il metodo di bisezione

Consideriamo l'equazione $2^x + x = 0$. Dopo aver verificato graficamente che ammette una soluzione e aver trovato un intervallo cui appartiene, determiniamo una sua approssimazione con una cifra decimale esatta.

- **Interpretazione grafica dell'equazione**

L'equazione $2^x + x = 0$ equivale a $2^x = -x$, quindi le sue eventuali soluzioni sono le ascisse dei punti d'intersezione tra i grafici delle funzioni $y = 2^x$ e $y = -x$.
Dalla figura si vede che i due grafici hanno in comune un solo punto, la cui ascissa x_0 è compresa tra -1 e 0. Possiamo quindi prevedere che l'equazione data avrà una soluzione, appartenente all'intervallo $[-1, 0]$.



- **Dimostrazione dell'esistenza della soluzione**

Dimostriamo rigorosamente quanto intuito dal grafico. Consideriamo la funzione: $f(x) = 2^x + x$. Osserviamo che essa è continua e calcoliamo i valori assunti dalla funzione agli estremi dell'intervallo $[-1, 0]$:

$$f(-1) = 2^{-1} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$$

$$f(0) = 2^0 + 0 = 1 > 0$$

Poiché tali valori sono discordi, per il teorema degli zeri possiamo affermare che esiste $x_0 \in [-1, 0]$ tale che $f(x_0) = 0$, cioè che esiste una soluzione dell'equazione $2^x + x = 0$ appartenente all'intervallo $[-1, 0]$.
Osservando che la funzione $f(x) = 2^x + x$ è strettamente crescente (in quanto somma di due funzioni strettamente crescenti), possiamo anche affermare che la soluzione dell'equazione è unica.

- **Il metodo di bisezione**

Possiamo localizzare più accuratamente la soluzione dell'equazione ragionando come segue.

1. Consideriamo i due intervalli $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ e $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ in cui l'intervallo $[-1, 0]$ resta suddiviso dal suo punto medio.
2. Osserviamo che uno di essi deve certamente contenere la soluzione dell'equazione; per stabilire quale, calcoliamo il valore della funzione per $x = -\frac{1}{2}$. Con l'aiuto di una calcolatrice possiamo verificare che:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \simeq 0,21 > 0$$

3. Poiché sappiamo che $f(-1) < 0$ (lo abbiamo calcolato in precedenza) e abbiamo appena visto che $f\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$, riconosciamo che la funzione f assume valori discordi agli estremi dell'intervallo $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$, quindi la soluzione dell'equazione appartiene a esso.

Il metodo di bisezione consiste nel ripetere questo processo finché non si giunge a un intervallo «sufficientemente piccolo» che consenta di determinare x_0 con la precisione voluta. Questo esempio chiede di determinare la soluzione con una cifra decimale esatta, quindi dobbiamo ripetere il procedimento fino a determinare un intervallo i cui estremi coincidono fino alla prima cifra decimale. I vari passi da svolgere sono schematizzati nella seguente tabella.

Intervallo	Punto medio	Valori della funzione	Conclusioni
$\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$	$-\frac{3}{4}$	$\underbrace{f\left(-\frac{3}{4}\right) \simeq -0{,}16}_{<0}$ $\underbrace{f\left(-\frac{1}{2}\right) \simeq 0{,}21}_{>0}$	La soluzione appartiene all'intervallo $\left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right] = [-0{,}75, -0{,}5]$
$\left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right]$	$-\frac{5}{8}$	$\underbrace{f\left(-\frac{5}{8}\right) \simeq 0{,}02}_{>0}$ $\underbrace{f\left(\frac{3}{4}\right) \simeq -0{,}16}_{<0}$	La soluzione appartiene all'intervallo $\left[-\frac{3}{4}, -\frac{5}{8}\right] = [-0{,}75, -0{,}625]$
$\left[-\frac{3}{4}, -\frac{5}{8}\right]$	$-\frac{11}{16}$	$\underbrace{f\left(-\frac{11}{16}\right) \simeq -0{,}07}_{<0}$ $\underbrace{f\left(-\frac{5}{8}\right) \simeq 0{,}02}_{>0}$	La soluzione appartiene all'intervallo $\left[-\frac{11}{16}, -\frac{5}{8}\right] = [-0{,}6875, -0{,}625]$

Osserva che le conclusioni raggiunte all'ultimo passo ci consentono di dire che:

$$-0{,}6875 < x_0 < -0{,}625$$

quindi $x_0 \simeq -0{,}6$, con la prima cifra decimale esatta. Al penultimo passo invece potevamo affermare soltanto che $-0{,}75 < x_0 < -0{,}625$, quindi la prima cifra decimale era ancora incerta fra 6 e 7.

Se indichiamo con $[a_n, b_n]$ l'intervallo ottenuto dopo avere applicato il metodo di bisezione n volte, con c_n il punto medio dell'intervallo e con α la radice che vogliamo approssimare, si ha che:

$$\underbrace{|c_n - \alpha|}_{\text{la distanza di } c_n \text{ da } \alpha} \underbrace{\leq}_{\text{è minore o uguale}} \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2^n}\right)}_{\text{alla metà dell'ampiezza dell'intervallo } [a_n, b_n]} \Rightarrow |c_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

Per stabilire il numero n di iterazioni sufficienti a ottenere un'approssimazione della radice con un errore minore o uguale a un prefissato numero ε, basta quindi risolvere rispetto a n la disequazione:

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$$

Come puoi notare dall'esempio precedente, il metodo di bisezione converge alla soluzione piuttosto «lentamente»; i metodi che presenteremo nei prossimi paragrafi hanno invece il pregio di convergere alla soluzione «più rapidamente».

Il metodo delle tangenti (o di Newton)

Consideriamo l'equazione $f(x) = 0$ e supponiamo di aver accertato che tale equazione ammette nell'intervallo $[a, b]$ un'unica soluzione, diciamola α. Spieghiamo intuitivamente l'idea alla base del metodo di Newton con riferimento alla **Fig. 29**.

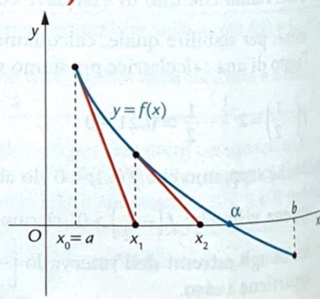


Figura 29

L'idea è di costruire una successione $x_0, x_1, ..., x_n$ che sia convergente ad α.
Partiamo da $x_0 = a$ e tracciamo la retta tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ in x_0; sappiamo che tale retta ha equazione:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad [1]$$

Definiamo il secondo termine della successione che vogliamo costruire, x_1, come l'ascissa del punto d'intersezione della retta tangente con l'asse x; nel punto x_1 sarà:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \qquad [2]$$

Risolvendo la [2] rispetto a x_1 (nell'ipotesi $f'(x_0) \neq 0$), otteniamo:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Ripetendo il procedimento con x_1 al posto di $x_0 = a$, conduciamo la retta tangente al grafico della funzione f nel punto di ascissa x_1 e indichiamo con x_2 l'ascissa del suo punto d'intersezione con l'asse x; sarà:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Iterando n volte il procedimento si costruisce la successione $x_0, x_1, ..., x_n$ che può quindi essere definita per ricorrenza dalla relazione:

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \end{cases} \qquad [3]$$

Con GeoGebra
Il metodo di Newton

È intuitivo che, nelle condizioni della **Fig. 29**, la successione x_n tende (per difetto) alla radice α dell'equazione quando $n \to +\infty$. Non sempre tuttavia ciò accade, come mostrato in **Fig. 30**.

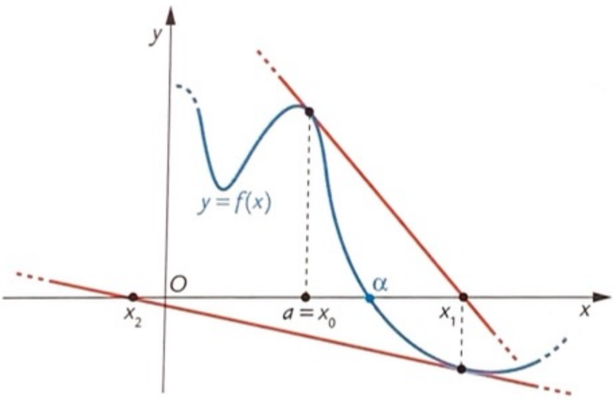


Figura 30 **La successione definita per ricorrenza dalla [3], con punto iniziale *a*, nel caso rappresentato non converge ad α; come puoi vedere, infatti, sia x_1 sia x_2 sono approssimazioni di α peggiori di *a*.**

È importante allora stabilire delle condizioni che garantiscano la convergenza della successione [3] alla soluzione dell'equazione che vogliamo determinare; tali condizioni sono espresse dal seguente teorema, che ci limitiamo a enunciare.

TEOREMA 1 | Convergenza del metodo delle tangenti

Sia f una funzione che soddisfa le seguenti proprietà:

a. f è derivabile due volte nell'intervallo $[a, b]$, con derivate continue;
b. f' ed f'' sono non nulle e di segno costante in $[a, b]$;
c. $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Allora l'equazione $f(x) = 0$ ammette un'unica soluzione $\alpha \in [a, b]$ e inoltre:

- se $f(a) \cdot f''(a) > 0$, la successione definita dalla [3] con $x_0 = a$ converge ad α;
- in caso contrario risulta $f(b) \cdot f''(b) > 0$ e converge ad α la successione definita dalla [3] con $x_0 = b$.

È importante fare alcune osservazioni.

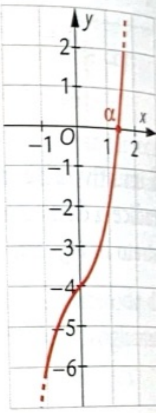
- Le ipotesi **a**, **b** e **c** insieme garantiscono sia l'esistenza sia l'unicità della soluzione dell'equazione $f(x) = 0$. Infatti, l'*unicità* segue dalla monotonia di f assicurata da **b** (precisamente, dal fatto che f' ha segno costante in $[a, b]$); l'*esistenza* segue dal teorema degli zeri, applicabile in forza delle ipotesi **c** e **a** (la derivabilità di una funzione, infatti, implica la sua continuità).
- Come regola pratica, si può osservare che come primo termine della successione approssimante bisogna assumere l'estremo dell'intervallo $[a, b]$ in cui la funzione f assume valore *concorde* con quello di f''.

ESEMPIO Approssimazione delle soluzioni di un'equazione con il metodo di Newton

Dimostriamo che l'equazione $x^3 + x - 4 = 0$ ha una sola soluzione e determiniamone un'approssimazione con il metodo di Newton.

- **Localizziamo la soluzione e individuiamo un intervallo che soddisfi le ipotesi del Teorema 1**

Con un breve studio della funzione $f(x) = x^3 + x - 4$ si arriva a tracciarne il grafico, che risulta quello nella figura qui proposta. Esso permette di intuire che l'equazione $f(x) = 0$ ammette una sola soluzione, appartenente all'intervallo $[1, 2]$.



Possiamo applicare il metodo di Newton a partire da questo intervallo, perché sono soddisfatte tutte le ipotesi richieste dal **Teorema 1**; infatti:

- la funzione f è polinomiale, quindi soddisfa l'ipotesi **a** del **Teorema 1**;
- poiché $f'(x) = 3x^2 + 1$ ed $f''(x) = 6x$, le due funzioni f' ed f'' risultano chiaramente positive nell'intervallo $[1, 2]$, quindi è soddisfatta l'ipotesi **b**;
- risulta $f(1) \cdot f(2) = -2 \cdot 6 = -12 < 0$, quindi è soddisfatta anche l'ipotesi **c**.

Il fatto che siano soddisfatte le ipotesi **a** e **b** del teorema *dimostra* tra l'altro l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione nell'intervallo $[1, 2]$ (esistenza e unicità che dal grafico avevamo solo potuto *intuire*).

- **Determiniamo la successione che approssima la soluzione**

Dobbiamo individuare anzitutto quale dei due estremi dell'intervallo $[1, 2]$ va assunto come primo elemento della successione; poiché $f(1) \cdot f''(1) = -2 \cdot 6 = -12 < 0$ dobbiamo assumere $x_0 = 2$. La successione sarà quindi definita ricorsivamente come segue:

$$x_0 = 2, x_n = x_{n-1} - \frac{\overbrace{x_{n-1}^3 + x_{n-1} - 4}^{f(x_{n-1})}}{\underbrace{3x_{n-1}^2 + 1}_{f'(x_{n-1})}}$$

$f'(x) = 3x^2 + 1$, quindi $f'(x_{n-1}) = 3x_{n-1}^2 + 1$

PER SAPERNE DI PIÙ

Nell'esempio qui a fianco si è ottenuto un «buon» risultato (otto cifre decimali esatte) dopo solo cinque iterazioni. Ciò mostra che il metodo di Newton converge rapidamente alla soluzione: addirittura si potrebbe dimostrare che se la successione [3] parte da un punto «sufficientemente vicino» ad α, l'errore $|x_n - \alpha|$ decresce, al crescere di n, con velocità più che esponenziale!

- **Determiniamo alcune approssimazioni**

Con l'aiuto di un calcolatore si ottiene:

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 + x_0 - 4}{3x_0^2 + 1} = 2 - \frac{2^3 + 2 - 4}{3 \cdot 2^2 + 1} = \frac{20}{13} = 1{,}538461538...$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 + x_1 - 4}{3x_1^2 + 1} = 1{,}392819014...$$

Iterando il procedimento si ha:

$x_3 = 1{,}378916766...$ $\quad x_4 = 1{,}378796709...$ $\quad x_5 = 1{,}378796700...$

Dopo cinque iterazioni le prime *otto* cifre dopo la virgola si stabilizzano, quindi possiamo dire che la soluzione α, con otto cifre decimali esatte, è $\alpha = 1{,}378796$

Il metodo delle secanti (o di Lagrange)

Un metodo alternativo a quello di Newton per approssimare una radice di un'equazione è il cosiddetto **metodo delle secanti**. Similmente al metodo di Newton, esso si basa sulla costruzione di una successione che converge alla radice cercata. Per spiegare il principio su cui si basa il metodo, facciamo riferimento alla **Fig. 31**. Vogliamo approssimare la radice $\alpha \in [a, b]$. Poniamo come primo termine della successione approssimante $x_0 = a$; dopodiché definiamo come termine successivo della successione, x_1, l'ascissa del punto d'intersezione con l'asse x della retta AB (essendo A e B i punti del grafico della funzione di ascisse rispettivamente a e b).

La retta AB ha equazione:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

ossia, avendo posto $x_0 = a$:

$$y - f(x_0) = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}(x - x_0)$$

Ponendo $y = 0$, otteniamo l'equazione:

$$-f(x_0) = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}(x - x_0)$$

che, risolta rispetto a x, fornisce il valore di x_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{b - x_0}{f(b) - f(x_0)} f(x_0)$$

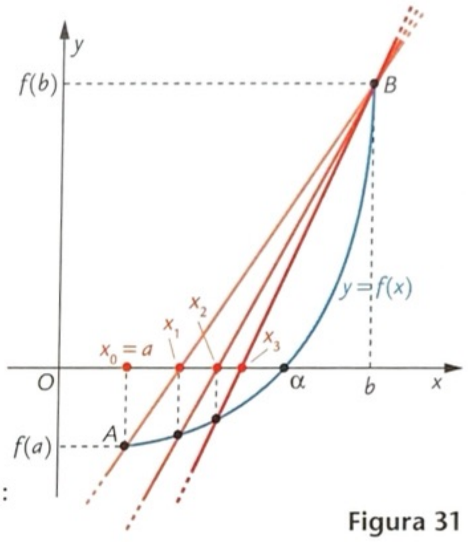


Figura 31

Ora ripetiamo lo stesso ragionamento a partire dall'intervallo $[x_1, b]$ anziché dall'intervallo $[a, b] = [x_0, b]$. Conduciamo la retta secante passante per i punti del grafico della funzione di ascisse x_1 e b e indichiamo con x_2 l'ascissa del punto d'intersezione di tale secante con l'asse x; sarà:

$$x_2 = x_1 - \frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)} f(x_1)$$

Iterando n volte il procedimento si costruisce la successione definita dalla relazione:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{b - x_{n-1}}{f(b) - f(x_{n-1})} f(x_{n-1}) \qquad [4]$$

Similmente a quanto già visto nel metodo di Newton, non sempre la successione x_n definita dalla [4] converge ad α per $n \to +\infty$; per esempio, ciò non accade nel caso in **Fig. 32**.

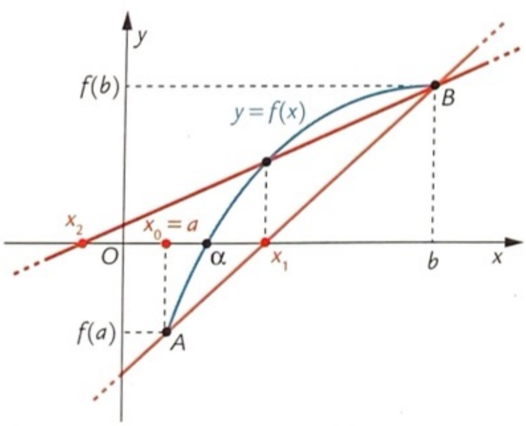


Figura 32 Il metodo delle secanti con il punto iniziale $x_0 = a$ non converge alla soluzione.

Il teorema seguente esprime delle condizioni sufficienti per la convergenza.

TEOREMA 2 | Convergenza del metodo delle secanti

Sia f una funzione che soddisfi le seguenti proprietà:

a. f è derivabile due volte nell'intervallo $[a, b]$, con derivate continue;
b. f' ed f'' sono non nulle e di segno costante in $[a, b]$;
c. $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Allora l'equazione $f(x) = 0$ ammette un'unica soluzione $\alpha \in [a, b]$ e inoltre:

- se $f(a) \cdot f''(a) < 0$, la successione definita dalla [4] con $x_0 = a$ converge ad α;
- in caso contrario, risulta $f(b) \cdot f''(b) < 0$ e converge ad α la successione in cui $x_0 = b$, definita da una relazione analoga alla [4] in cui b è sostituito con a.

OSSERVA
Nota l'analogia tra gli enunciati dei due Teoremi 1 e 2, in particolare tra le ipotesi di applicabilità dei due metodi delle tangenti e delle secanti.

Come regola pratica, si può osservare che come primo termine della successione approssimante bisogna assumere l'estremo dell'intervallo $[a, b]$ in cui la funzione f assume valore *discorde* da quello di f''.

ESEMPIO Applicazione del metodo delle secanti

Determiniamo un'approssimazione dell'equazione $x^3 + x - 4 = 0$, applicando il metodo delle secanti.

- **Verifichiamo le ipotesi**

Nell'esempio precedente abbiamo già dedotto che sono soddisfatte tutte le ipotesi per potere applicare il **Teorema 2** nell'intervallo $[1, 2]$.

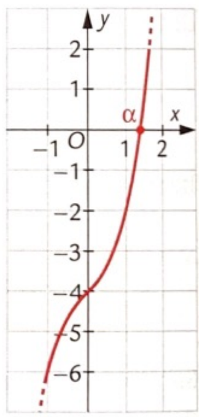
- **Determiniamo la successione approssimante**

Poiché:

$$f(1) = -2, f(2) = 6 \text{ e } f''(x) = 6x > 0 \text{ per ogni } x \in [1, 2]$$

dobbiamo scegliere come primo termine della successione $x_0 = 1$ (così che sia soddisfatta la condizione $f(1) \cdot f''(1) < 0$). La successione approssimante è dunque:

$$x_0 = 1 \qquad x_n = x_{n-1} - \frac{2 - x_{n-1}}{f(2) - f(x_{n-1})} f(x_{n-1})$$



ossia:

$$x_0 = 1 \qquad x_n = x_{n-1} - \frac{2 - x_{n-1}}{6 - f(x_{n-1})} f(x_{n-1})$$

- **Determiniamo alcune approssimazioni**

Abbiamo che:

$$x_1 = x_0 - \frac{2 - x_0}{6 - f(x_0)} f(x_0) = 1 - \frac{2 - 1}{6 - \underbrace{(-2)}_{f(1)}} \underbrace{(-2)}_{f(1)} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

Procedendo nelle iterazioni si trova:

$$x_2 = 1{,}337931034... \qquad x_3 = 1{,}366147290...$$
$$x_4 = 1{,}374912292... \qquad x_5 = 1{,}377606815...$$

Dopo cinque iterazioni le prime due cifre dopo la virgola appaiono essersi stabilizzate, quindi possiamo ritenere che la soluzione α, con due cifre decimali esatte, è $\alpha = 1{,}37...$

Come puoi osservare nell'ultimo esempio, la convergenza del metodo delle secanti è più lenta rispetto al metodo di Newton. Il metodo delle secanti offre tuttavia un importante vantaggio: non richiede il calcolo della derivata in corrispondenza dei termini della successione approssimante (il che, spesso, è oneroso dal punto di vista computazionale e induce a preferire quest'ultimo procedimento).

Esercizi p. 518

6. Approssimazione delle radici di un'equazione

Teoria p. 475

Metodo di bisezione

312 ESERCIZIO GUIDATO

Dopo avere individuato un intervallo cui appartiene la soluzione dell'equazione $x^3 + x - 1 = 0$, determina una sua approssimazione con una cifra decimale esatta.

- Osserva che l'equazione $x^3 + x - 1 = 0$ equivale a $x^3 = 1 - x$, quindi le sue eventuali soluzioni sono le ascisse dei punti d'intersezione tra il grafico di $y = x^3$ e quello della retta di equazione $y = 1 - x$. Traccia i grafici delle due funzioni. Dall'analisi dei grafici puoi prevedere che l'equazione ha una sola soluzione, appartenente all'intervallo [0, 1].
- Dimostra ciò che hai intuito dall'analisi dei grafici, applicando il teorema degli zeri alla funzione $f(x) = x^3 + x - 1$ nell'intervallo [0, 1].
- Applica ora il metodo di bisezione, completando la tabella predisposta a pagina seguente. Tieni presente che $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$.
- Inoltre, dovendo trovare la soluzione x_0 con *una* cifra decimale esatta, dovrai continuare fino a individuare un intervallo i cui estremi hanno la *prima* cifra decimale *uguale*.

Passo	Intervallo	Punto medio	Valore della funzione nel punto medio	Conclusione
I	[0, 1]	$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}375 < 0$	Poiché $f(1) = 1 > 0$, la soluzione appartiene all'intervallo $\left[\frac{1}{2}, 1\right] = [0{,}5; 1]$
II	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	.....	....	Poiché $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, la soluzione appartiene all'intervallo $\left[\frac{1}{2}, ...\right] = [0{,}5; 0{,}75]$
			....	....
III	.....	.....	....	....
IV	.....	.....	....	....

Giunto al quarto passo, se hai svolto correttamente i calcoli, troverai che $0{,}625 < x_0 < 0{,}687$; puoi quindi affermare che $x_0 \simeq$ ..... con la prima cifra decimale esatta.

Per ciascuna delle seguenti equazioni, stabilisci il numero delle soluzioni e determina un intervallo cui appartiene ogni soluzione; determina quindi un'approssimazione di ciascuna soluzione con due cifre decimali esatte, mediante il metodo di bisezione.

313 $x^3 + 2x + 1 = 0$ $[x \simeq -0{,}45]$

314 $x^4 + x - 2 = 0$ $[x_1 \simeq -0{,}45; x_2 = 1]$

315 $x^3 + x^2 + 1 = 0$ $[x \simeq -1{,}46]$

316 $\sqrt{x} = x^2 - 1$ $[x \simeq 1{,}49]$

317 $e^{2x} + x = 0$ $[x \simeq -0{,}42]$

318 $e^{-2x} + x - 2 = 0$ $[x_1 \simeq -0{,}44; x_2 \cong 1{,}98]$

319 $2e^{-x} - x = 0$ $[x \simeq 0{,}8$

320 $\ln x + x = 0$ $[x \simeq 0{,}5$

321 $\ln x^2 + x - 2 = 0$ $[x \simeq 1{,}3$

322 $\sin x = x^2$ $[x_1 = 0; x_2 \simeq 0{,}8$

323 $\cos x = x^2 - 2x$ $[x_1 = -0{,}38; x_2 \simeq 1{,}8$

Metodo di Newton

324 ESERCIZIO GUIDATO

Dimostra che la seguente equazione ha un'unica soluzione e, applicando il metodo di Newton in un intervallo opportuno, determina un'approssimazione della soluzione con cinque cifre decimali:

$x^3 - x^2 + 1 = 0$

- Per individuare l'intervallo in cui è compresa la soluzione, puoi disegnare i grafici delle funzioni $y = x^3$ e $y = x^2 - 1$ e vedere qual è all'incirca l'ascissa del punto in cui si intersecano. Quest'ultima appartiene all'intervallo .... (usa estremi di coordinate intere, per ora).
- La funzione corrispondente all'equazione è $f(x) =$ ....
- Essa assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo?

  Sì, perché ....
- La derivata prima della funzione è $f'(x) =$ ....
- Essa, nell'intervallo scelto, è sempre ...., per cui la funzione risulta ....
- La derivata seconda della funzione è $f''(x) =$ ....
- Essa, nell'intervallo scelto, è sempre ...., per cui la funzione risulta ....
- Calcola il valore di $f(a) \cdot f''(a)$. Essendo $f(a) \cdot f''(a)$ ..... 0, scegli $x_0 =$ ....
- Applica per alcune volte la formula $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ e troverai la soluzione cercata. [−0,75488]

Dimostra che ciascuna delle seguenti equazioni ha un'unica soluzione e, applicando il metodo di Newton in un intervallo opportuno, determina una approssimazione di tale soluzione con cinque cifre decimali.

325 $e^x + x + 1 = 0$ [−1,27846]

326 $x^2 + \ln x = 0$ [0,65292]

327 $\cos x + x - 3 = 0$ [3,79439]

328 $x^2 - \sqrt{x} - 1 = 0$ [1,49022]

329 $x^3 - x^2 - 4x - 5 = 0$ [2,93947]

330 $\arcsin x + x - 1 = 0$ [0,48903]

331 $\arctan x + 2x - \pi = 0$ [1,44465]

Dimostra che ciascuna delle seguenti equazioni ha due soluzioni e, applicando il metodo di Newton in intervalli opportuni, determina un'approssimazione di tali soluzioni con cinque cifre decimali.

332 $x^4 - 2x - 4 = 0$ [−1,14390; 1,64293]

333 $\ln x - x + 2 = 0$ [0,15859; 3,14619]

334 $e^x - x - 3 = 0$ [−2,94753; 1,50524]

335 $x^4 - (x-1)^2 = 0$ [−1,61803; 0,61803]

336 Matematica e storia **Metodo babilonese.** Il metodo babilonese per la determinazione (approssimata) della radice quadrata di un numero positivo k è basato sul calcolo dei termini della successione definita per ricorrenza da:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{k}{x_n}\right) \end{cases} \qquad \text{con } k > 0$$

Tale successione, infatti, converge rapidamente a $\sqrt{k}$ (come puoi constatare per esempio nel caso $k = 2$). Osservando che $\sqrt{k}$ è la soluzione positiva dell'equazione algebrica $f(x) = 0$, con $f(x) = x^2 - k$, verifica che la successione definita per ricorrenza dal metodo di Newton *coincide* con la formula ricorsiva del metodo babilonese. Il metodo babilonese anticipa dunque di secoli il metodo di Newton!

ESERCIZI

Metodo delle secanti

337 ESERCIZIO GUIDATO

Dimostra che la seguente equazione ha un'unica soluzione e, applicando il metodo delle secanti in un intervallo opportuno, determina un'approssimazione di tale soluzione con quattro cifre decimali:

$x^3 + x^2 - 1 = 0$

- Per individuare l'intervallo in cui è compresa la soluzione, puoi disegnare i grafici delle funzioni $y = x^3$ e $y = -x^2 + 1$ e vedere qual è all'incirca l'ascissa del punto in cui si intersecano. Quest'ultima appartiene all'intervallo .... (stai attento alla scelta: la derivata prima non si deve annullare).
- La funzione i cui zeri sono le soluzioni dell'equazione data è $f(x) =$ ....
- Essa assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo? Sì, perché ....
- La derivata prima della funzione è $f'(x) =$ ....
- Essa, nell'intervallo scelto, è sempre ...., per cui la funzione risulta ....
- La derivata seconda della funzione è $f''(x) =$ ....
- Essa, nell'intervallo scelto, è sempre ...., per cui la funzione risulta ....
- Calcola il valore di $f(a) \cdot f''(a)$. Essendo $f(a) \cdot f''(a)$ ..... 0, scegli $x_0 =$ ....
- Applica per alcune volte la formula $x_n = x_{n-1} - \dfrac{b - x_{n-1}}{f(b) - f(x_{n-1})} f(x_{n-1})$ e troverai la soluzione cercata. [0,7549

Dimostra che ciascuna delle seguenti equazioni ha un'unica soluzione e, applicando il metodo delle secanti in un intervallo opportuno, determina un'approssimazione di tale soluzione con quattro cifre decimali.

338 $x^2 + 2\ln x - 2 = 0$ [1,2479]

339 $x\ln x - 2 = 0$ [2,3458]

340 $xe^x - 1 = 0$ [0,5671]

341 $\sin x - x + 1 = 0$ [1,934

342 $x^2 - 2x - \sqrt{x-1} = 0$ [2,490

343 $x - 2 + \sqrt{x+1} = 0$ [0,697

Dimostra che ciascuna delle seguenti equazioni ha due soluzioni e, applicando il metodo delle secanti in intervalli opportuni, determina le approssimazioni di tali soluzioni con quattro cifre decimali.

344 $x^4 + x - 5 = 0$ [−1,6030; 1,3792]

345 $(x-3)\ln x - 1 = 0$ [0,6531; 3,7557]

346 $e^{x^2} - x - 2 = 0$ [−0,5875; 1,036

347 $\sin x - (x-1)^2 = 0$ [0,3862; 1,961