Cinematica

1. Il tempo

Orologi, calendari, libri di storia: tutto ci racconta del trascorrere del tempo. Uno dei misteri più affascinanti e misteriosi dell'universo. Fino all'inizio del secolo si pensava che il tempo scorresse ovunque in modo lineare. Ora sappiamo che il tempo può accelerare, o rallentare e, forse, persino invertire il suo cammino. Nel mondo della scienza si discute sulla possibilità di viaggiare nel tempo e s'ipotizza l'esistenza di macchine del tempo cosmiche, legate alla struttura dei buchi neri. La storia della misurazione del tempo parte dall'antica osservazione dei corpi celesti per arrivare oggi ai pulsar, stelle di neutroni, gli orologi più precisi dell'intero universo. Ventimila anni fa i cacciatori, segnavano con tacche incise sulle ossa i passare dei giorni fra le varie fasi del ciclo lunare. Anche i calendari dei Sumeri, erano ancorati al periodico apparire e mutare del nostro satellite e così pure quelli Babilonesi del millennio successivo. L'osservazione degli astri ispirò anche gli uomini dell'antica Britannia che eressero il gigantesco cerchio di pietra di Sthonege per un fine più complesso: la previsione delle eclissi solari. Poi obelischi colonne di pietre trasformate in orologi ad ombra nel tentativo di individuare le scansioni del giorno. Il passaggio alle clessidre ad acqua e a sabbia, avvenne lentamente, ma dominarono tutto il periodo. Risale alla prima metà del XIV secolo l'apparizione sulle torri d'orologi meccanici, evoluzione delle suonerie destinate a svegliare i frati nei conventi. In questo periodo ci fu una vera e propria caccia alla precisione. L'orologio più preciso fu invenzione di Galileo Galilei e costruzione successiva olandese: dieci secondi al giorno di possibile errore; arrivati agli anni venti i secondi furono scanditi dagli orologi al quarzo che si basano sul fenomeno della piezoelettricità (in seguito al quale un cristallo sottoposto a tensione elettrica oscilla). Presto superati, in quando a precisione, dagli orologi atomici il cui primo esemplare risale al 1949. Per la loro grandezza, il loro posto è negli istituti di misura e negli osservatori, nella versione più aggiornata si sfrutta la frequenza di risonanza dell'atomo di cesio, che in un secondo compie ben nove miliardi, 192 milioni, 631 mila, 770 oscillazioni, unità ufficialmente riconosciuta. Nonostante ciò la caccia alla precisione continua. Alla precisione cosmica pensano particolari stelle chiamate pulsar, veri e propri `fari' che emettono onde elettromagnetiche di una regolarità assoluta. Nel corso dei millenni sulla terra il giorno, l'intervallo del tempo che va da un sorgere del sole all'altro si è allungato: in altri termini, il tempo che impiega la terra a girare intorno al proprio asse e

lentamente cresciuto. Il fenomeno è stato ampiamente spiegato e dimostrato.
Dalla nascita dell'universo, presumibilmente e secondo la conoscenza umana, inizia il trascorrere del tempo. I cambiamenti materiali e spaziali regolati dalla chimica e dalla fisica determinano, secondo l'osservazione, il corso del tempo. Tutto ciò che si muove e si trasforma è così descritto, oltre che chimicamente e fisicamente, anche a livello temporale. Alcuni esempi tra i più immediati della correlazione tra tempo e moto sono la rotazione della Terra attorno al proprio asse, che determina la distinzione tra il giorno e la notte, ed il suo percorso ellissoidale intorno al Sole (la cosiddetta rivoluzione), che determina le variazioni stagionali.

Il dato certo dell'esperienza è che tutto ciò che interessi i nostri sensi è materia, ovvero trasformazione di materia, visto che tutti gli oggetti materiali si modificano. Alcuni impiegano tempi brevi, altri in modo lento; ma tutti sono destinati a trasformarsi. La materia è, e (contestualmente) diviene (ossia assume altra forma). L'ovvietà di questa asserzione non tragga in inganno: essa sottende una contraddizione, perché l'essere di un oggetto è certificato dalla sua identità (nel tempo), ovvero dal suo permanente esistere; il divenire, invece, presuppone la trasformazione, ovvero la diversità (della forma), per cui impone un "prima" e un "dopo", vale a dire un (intervallo di) "tempo". Il tempo "origina" dalla trasformazione della materia.
La percezione del "tempo" è la presa di coscienza che la realtà di cui siamo parte si è materialmente modificata. Se osservo una formica che si muove, la diversità delle posizioni assunte certifica che è trascorso un "intervallo di tempo". Si evidenzia "intervallo" a significare che il tempo è sempre una "durata" (unico sinonimo di tempo), ha un inizio ed una fine.
Il tempo dunque è forse la più antica invenzione dell'uomo; tale idea nasce dagli eventi, cioè dai fatti accaduti, o che stanno accadendo, o che potranno accadere. È quindi corretto parlare di intervalli di tempo, anche se per comodità ne facciamo di solito a meno e parliamo semplicemente di tempo. Dire che sono le 8 del mattino equivale infatti a dire che 8 ore è l'intervallo di tempo tra l'istante in cui l'orologio segnava l'ora zero (primo evento) e quello in cui segna l'ora 8 (secondo evento); analogamente: dire che l'America è stata scoperta nel 1492 equivale a dire che 1492 anni è l'intervallo di tempo tra la nascita di Cristo (primo evento) e la scoperta dell'America (secondo evento).
L'intervallo di tempo (simbolo Δt), o semplicemente il tempo (simbolo t), è una grandezza fondamentale del S.I. e il campione scelto come unità è il secondo (simbolo s), così definito

nella 13a conferenza generale dei pesi e misure del 1967:

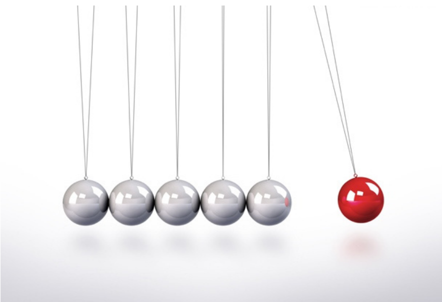
> Il secondo è un intervallo di tempo uguale alla durata di 9˙192˙631˙770 oscillazioni di una particolare radiazione emessa dall'isotopo 133 del cesio.

Il secondo equivale circa alla 86˙400a parte del giorno solare medio. I multipli del secondo non appartengono al sistema decimale; infatti:

- 1 minuto = 60 secondi
- 1 ora = 60 minuti
- 1 giorno = 24 ore

Gli intervalli di tempo inferiori al secondo seguono invece il sistema decimale; infatti si esprimono in decimi, centesimi, ecc.

Per misurare il tempo si possono usare comuni orologi da polso o da tasca (sensibilità 1s), pendoli o altri dispositivi capaci di scandire intervalli di tempo costanti, come contasecondi manuali, cronometri elettrici, strumenti elettronici (sensibilità 10–3s).



Un normale pendolo si realizza legando un oggetto piccolo e pesante (di solito una sferetta metallica) a un sottile filo non elastico . È facile verificare che più il pendolo è corto e più oscillazioni compie in uno stesso intervallo di tempo, il che consente, regolando opportunamente la lunghezza del filo, di realizzare pendoli che impiegano intervalli di tempo determinati per compiere una oscillazione completa. Se la lunghezza del pendolo (distanza tra il centro della pallina e l'estremità superiore del filo) è circa 25cm, il periodo di oscillazione è un secondo; in tal caso si dice che il pendolo batte il secondo.

Nel linguaggio di tutti i giorni spesso si usa il tempo come misuratore di distanze, per indicare la durata di un percorso (come ad esempio: "mezz'ora d'automobile", "un giorno di viaggio", "10 minuti di cammino"). Dato che la velocità è uguale a spazio percorso diviso l'intervallo di tempo impiegato a percorrere quello spazio, si può fare un'inferenza implicita sulla velocità media tenuta dal corpo in movimento. Si valorizza così in modo approssimato la distanza a livello temporale, in relazione al fatto che lo spazio percorso può essere espresso come la velocità media (all'incirca nota), moltiplicata per l'intervallo di tempo interessato.

Tecnicamente, però, espressioni come "un anno luce" non esprimono un intervallo di tempo, ma una distanza avendo-

ne nota la velocità: infatti più precisamente l'anno luce si può esprimere come "la distanza percorsa dalla luce in un anno", conoscendone esattamente la velocità (appunto la Velocità della luce). In questi casi particolari, una locuzione contenente riferimenti al tempo indica quasi sempre distanze precise nello spazio, al punto da assurgere al ruolo di unità di misura.
Eventi distinti tra loro possono essere simultanei oppure distanziarsi in proporzione a un certo numero di cicli di un determinato fenomeno, per cui è possibile quantificare in che misura un certo evento avvenga dopo un altro. Il tempo misurabile che separa i due eventi corrisponde all'ammontare dei cicli intercorsi. Convenzionalmente tali cicli si considerano per definizione periodici entro un limite di errore sperimentale. Tale errore sarà percentualmente più piccolo quanto più preciso sarà lo strumento (orologio) che compie la misura. Nel corso della storia dell'uomo gli orologi sono passati dalla scala astronomica (moti del Sole, della Terra) a quella quantistica (orologi atomici) raggiungendo progressivamente precisioni crescenti.
Uno dei modi di definire il concetto di dopo è basato sull'assunzione della causalità. Il lavoro compiuto dall'umanità per incrementare la comprensione della natura e della misurazione del tempo, con la creazione e il miglioramento dei calendari e degli orologi, è stato uno dei principali motori della scoperta scientifica.
L'unità di misura standard del Sistema Internazionale è il secondo. In base ad esso sono definite misure più ampie come il minuto, l'ora, il giorno, la settimana, il mese, l'anno, il lustro, il decennio, il secolo ed il millennio. Il tempo può essere misurato, esattamente come le altre dimensioni fisiche. Gli strumenti per la misurazione del tempo sono chiamati orologi. Gli orologi molto accurati vengono detti cronometri. I migliori orologi disponibili (al 2010) sono gli orologi atomici.

Esistono svariate scale temporali continue di utilizzo corrente: il tempo universale, il tempo atomico internazionale (TAI), che è la base per le altre scale, il tempo coordinato universale (UTC), che è lo standard per l'orario civile, il Tempo Terrestre (TT), ecc. L'umanità ha inventato i calendari per tenere traccia del passaggio di giorni, settimane, mesi e anni.
Il concetto di tempo in geologia è un argomento complesso in quanto non è quasi mai possibile determinare l'età esatta di un corpo geologico o di un fossile. Molto spesso le età sono relative (prima di..., dopo la comparsa di...) o presentano un margine di incertezza, che cresce con l'aumentare dell'età dell'oggetto. Sin dagli albori della geologia e della paleontologia si è preferito organizzare il tempo in funzione degli organismi che

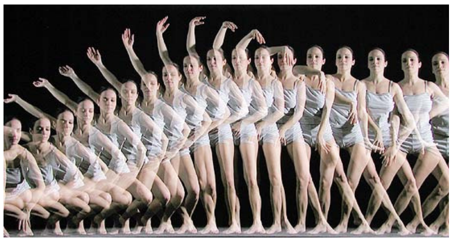
hanno popolato la Terra durante la sua storia: il tempo geologico ha pertanto struttura gerarchica e la gerarchia rappresenta l'entità del cambiamento nel contenuto fossilifero tra un'età e la successiva.
Solo nella seconda metà del XX secolo, con la comprensione dei meccanismi che regolano la radioattività, si è iniziato a determinare fisicamente l'età delle rocce. La precisione massima ottenibile non potrà mai scendere al di sotto di un certo limite in quanto i processi di decadimento atomico sono processi stocastici e legati al numero di atomi radioattivi presenti all'interno della roccia nel momento della sua formazione. Le migliori datazioni possibili si attestano sull'ordine delle centinaia di migliaia di anni per le rocce con le più antiche testimonianze di vita (nel Precambriano) mentre possono arrivare a precisioni dell'ordine di qualche mese per rocce molto recenti.
Un'ulteriore complicazione è legata al fatto che molto spesso si confonde il tempo geologico con le rocce che lo rappresentano. Il tempo geologico è un'astrazione, mentre la successione degli eventi registrata nelle rocce ne rappresenta la reale manifestazione. Esistono pertanto due scale per rappresentare il tempo geologico, la prima è la scala geocronologica, la seconda è la scala cronostratigrafica. In prima approssimazione comunque, le due scale coincidono e sono intercambiabili.

2. Lo spazio

Quando ci riferiamo ad un oggetto fisico è conveniente spesso schematizzarlo come un punto materiale. Si definisce punto materiale un corpo le cui dimensioni siano trascurabili rispetto al fenomeno in studio. Ad esempio un pianeta può essere considerato un punto materiale in un problema di meccanica celeste, un atomo in un problema di meccanica statistica e così via. Una nave nell'oceano è un punto materiale, perché le sue dimensioni sono trascurabili rispetto a quelle del riferimento (oceano) se la stessa nave sta attraccando in un porto non si può schematizzare come punto materiale perché le sue dimensioni sono paragonabili a quelle del sistema in cui la consideriamo, ovvero il porto.
La posizione di un punto materiale può essere univocamente determinata dalle tre coordinate spaziali, dalle relative velocità e dalla sua massa. Ciò significa che la schematizzazione di un corpo come punto materiale equivale a trascurare l'esistenza dei suoi gradi di libertà interni: un punto materiale non può immagazzinare energia ruotando su se stesso, scaldandosi o

comprimendosi elasticamente. Tutti questi fenomeni, infatti, per essere descritti necessitano di una modellizzazione del corpo più dettagliata: sempre rifacendoci ad un esempio concreto un pianeta può essere trattato come corpo rigido, piuttosto che come punto materiale, se si è interessati alla sua rotazione. L'utilità del concetto di punto materiale sta nel poter associare al corpo un punto geometrico e quindi poter operare nello spazio cartesiano con i metodi della geometria analitica.

3. Il moto



Dalla finestra vediamo delle persone. Fissiamo l'attenzione su una di esse, quella ragazza con l'abito bianco, che, nell'istante in cui iniziamo l'osservazione, si trova di fronte al bar. Se, dopo un certo intervallo di tempo, la ragazza si trova a una certa distanza dal bar, diciamo che essa si è mossa; se invece la sua posizione rispetto al bar è rimasta sempre la stessa, diciamo che è rimasta ferma.
Dall'esempio fatto risulta che le idee di moto e di quiete nascono dalla possibilità di stabilire se la posizione di un corpo, rispetto a un altro che si considera fisso, varia o no nel tempo. Se l'universo fosse costituito da un solo corpo A, parlare di moto non avrebbe alcun senso, perché non avrebbe senso parlare di posizioni diverse tra loro. Se i corpi fossero due, A e B, avrebbe senso parlare di moto, ma non dire che A si muove e B sta fermo, o viceversa, a meno che, come nell'esempio fatto sopra, uno di essi (il bar) venisse considerato fisso. Se invece i corpi fossero tre, A, B, C, l'ultimo dei quali considerato fisso, allora avrebbe senso dire che A si muove e B è fermo (o viceversa), oppure che entrambi si muovono o che entrambi sono fermi.

- Dalla presenza di un solo corpo non possono nascere le idee di quiete e di moto.
- In presenza di un secondo corpo nascono tali idee, però non è possibile stabilire quale dei due si muove; per esempio: ci troviamo in una carrozza ferroviaria alla stazione e ci sembra che un treno stia muovendosi sul binario vicino al nostro; ma, dopo qualche istante, una lieve scossa provocata dalle giunture dei binari ci fa capire che è il nostro treno che si muove e non quello vicino.
- In presenza di un terzo corpo, che arbitrariamente si considera fisso, cioè che si assume come sistema di riferimento, non sussistono dubbi sullo stato di quiete o di moto

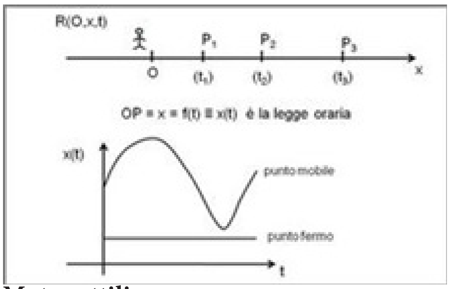
degli altri due. Infatti, se oltre a guardare il treno vicino al nostro, guardassimo anche la pensilina della stazione, ci renderemmo subito conto che il nostro treno sta muovendosi, mentre quello vicino è fermo.

Ma il sistema di riferimento del nostro esempio, la stazione ferroviaria, che si considera fisso, è veramente tale? Lo è rispetto alla Terra, ma non, per esempio, rispetto al Sole. E il problema si porrebbe anche se si assumesse come sistema di riferimento il Sole, perché esso si muove rispetto ad altre stelle. Anche le stelle fisse, alle quali si fa riferimento per studiare il moto dei pianeti del sistema solare, in realtà fisse non sono: esse ci appaiono tali solo a causa della loro enorme distanza dalla Terra (la più vicina si trova a circa 4,5 anni-luce).
Il fatto è che non esiste un sistema di riferimento fisso in senso assoluto, e quindi quiete e moto sono condizioni relative; esse dipendono dalla scelta del sistema di riferimento.
La relatività del moto viene utilizzata, per esempio, nella tecnica cinematografica, quando per dare la sensazione di un'automobile in corsa si fanno scorrere rapidamente al suo fianco (in secondo piano) le immagini del paesaggio.
Ma allora, come ci si deve comportare? Quale sistema di riferimento si deve scegliere, visto che non ne esiste uno che possa ritenersi privilegiato rispetto a tutti gli altri possibili? La risposta è facile: si deve sempre scegliere un sistema rispetto al quale il moto oggetto di studio sia il più semplice possibile. Per esempio: se una sfera rotola sul ponte di una nave, lo studio del suo moto è facile se lo si riferisce alla nave stessa, meno facile se lo si riferisce alla terraferma. Analogamente: è più facile studiare il moto di un treno rispetto alla Terra che rispetto al Sole.
Per rappresentare il moto di un corpo si usa come sistema di riferimento un asse, o un sistema di assi. Se il moto è unidirezionale, basta una retta orientata x; se il moto avviene su un piano, si adotta un sistema costituito da due assi cartesiani x e y; se il moto avviene nello spazio, si adotta un sistema costituito da tre assi cartesiani x, y, z.
Noi ci occuperemo soprattutto del moto bidimensionale e, come caso particolare, di quello unidimensionale

3. La cinematica

La cinematica è la descrizione del moto dei corpi indipendentemente dalle cause che lo provocano. Partiamo dal caso semplice del punto materiale, cioè un sistema descrivibile con le

sole tre coordinate di un punto.
Inizieremo dal caso del moto rettilineo, quello di un punto P che si muove su una retta. Per descriverne il moto dobbiamo individuare la sua posizione ad ogni istante di tempo; e cioè definire un osservatore che effettua le misure di spazio e di tempo. In generale si fissa un verso convenzionale sull'asse del moto ed un'origine O dalla quale si misurano le posizioni xi e un sistema di riferimento R(O,x,t).
La descrizione completa si ottiene fornendo la posizione ad ogni istante di tempo; cioè la funzione x=f(t) (a volte solo x(t)) . Questa funzione, o legge oraria, può essere data sotto forma di tabella, di relazione analitica, o in forma grafica riportando in ascisse t ed in ordinate x(t).
La legge oraria fornisce la descrizione completa del moto ma sovente non è disponibile, mentre si conoscono altre grandezze cinematiche di uso comune (e.g. la velocità) che dobbiamo definire. In generale parliamo di moto se il punto P cambia posizione (per un punto fermo x(t)=costante). Dati due istanti t1< t2 definiamo l'intervallo di tempo Δt=t2-t1, ed il corrispondente spostamento di P:

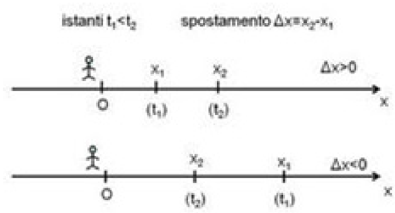


Moto rettilineo
Sistema di riferimento R(O,x,t) e legge oraria.

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = x_2 - x_1$$

Iindicheremo con il simbolo ΔA la variazione di una grandezza A.

Notiamo che lo spostamento Δx può essere sia positivo che negativo a secondo che il punto si muova nel verso crescente o decrescente dell'asse di riferimento; questa grandezza è più generale di quella usata comunemente di distanza percorsa cioè |Δx|.



Definizione di spostamento

I moti unidimensionali

Il primo passo nella descrizione del moto di una particella consiste nello stabilire un sistema di coordinate che definiscono la sua posizione.

Figura 1 - Sistema di coordinate in una dimensione
Quando stabilisci un sistema di coordinate in una dimensione puoi scegliere l'origine e il verso positivo che preferisci, ma, una volta fatta la scelta, devi attenerti a essa.

Un esempio di sistema di coordinate in una dimensione è mostrato in figura 1. Si tratta semplicemente di un asse x, sul quale è fissata un'origine (in cui x = 0) e una freccia che indica il verso positivo, cioè il verso nel quale x aumenta. Quando stabiliamo un sistema di coordinate, siamo liberi di scegliere l'origine e il verso positivo come desideriamo, ma, una volta fatta questa scelta, dobbiamo essere coerenti con essa in tutti i calcoli che seguiranno.

La particella in figura 1 è una persona che si è mossa verso destra da una posizione iniziale x_i a una posizione finale x_f. Poiché il verso positivo è a destra, segue che x_f è maggiore di x_i, cioè $x_f > x_i$.
Abbiamo visto come costruire un sistema di coordinate; usiamolo ora per esaminare la situazione mostrata in figura 2.

Figura 2 - Coordinate unidimensionali
La posizione della tua casa, di quella del tuo amico e della drogheria in un sistema di coordinate unidimensionali.

Definizione di distanza
La distanza è uguale alla lunghezza complessiva del tragitto.
Nel SI si misura in metri (m).

In un'automobile la distanza percorsa è indicata dal contakilometri. Osserviamo che la distanza è sempre positiva e, poiché non ha associata alcuna direzione, è una grandezza scalare.
Un altro modo utile per descrivere il moto di una particella consiste nell'esprimerlo in termini di spostamento, Δx, che rappresenta il cambiamento di posizione.

Definizione di spostamento Δx
Lo spostamento è uguale al cambiamento di posizione; è uguale alla posizione finale - posizione iniziale

$$\Delta x = x_f - x_i$$

Nel SI si misura in metri (m).

Osserviamo che Δx può essere positivo (se la posizione finale è a destra della posizione iniziale, $x_f > x_i$), negativo (se la posizione finale è alla sinistra della posizione iniziale, $x_f < x_i$) o nullo (se la posizione finale e quella iniziale coincidono, $x_f = x_i$).

In effetti lo spostamento è un vettore unidimensionale e il suo verso (destra o sinistra) è indicato dal suo segno (positivo o negativo, rispettivamente).
Nel SI lo spostamento si misura in metri, come la distanza, ma spostamento e distanza sono grandezze fisiche diverse. Ad esempio, nel tragitto da casa tua alla drogheria e ritorno, la distanza percorsa è 8,6 km, mentre lo spostamento è zero dal momento che x_f =2,1 km = x_i.
Supponi, invece, di andare da casa tua alla drogheria e quindi a casa del tuo amico.
In questo caso la distanza percorsa è 10,7 km, ma lo spostamento è:

$$\Delta x = x_f - x_i = 0 - 2{,}1 \text{ km} = -2{,}1 \text{ km}$$

dove il segno meno indica che il tuo spostamento è avvenuto nel verso negativo, cioè verso sinistra.

La velocità media

Il passo successivo è il concetto di quanto rapidamente avviene lo spostamento; il modo più semplice è di associare una quantità numerica a questa idea e, molto intuitivamente, definiamo la velocità media tramite il rapporto:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Questa nuova grandezza ha dimensioni fisiche $[v] = [L][T]^{-1}$, e si misura in m/s nel SI ma spesso nelle applicazioni pratiche in km/h.
Per esempio un velocista, che copre Δx = 100m in Δt = 10s, corre alla velocità media:

$$v_m = \frac{100}{10} = 10\frac{m}{s} = 36\frac{Km}{h}$$

Per passare da Km/h a m/s basta moltiplicare per 1000 e dividere per 360.

Interpretazione grafica della velocità media

Spesso è utile visualizzare il moto di una particella rappresentando la sua posizione in funzione del tempo.
Consideriamo ad esempio una particella che si muove avanti e indietro lungo l'asse x, come mostrato in figura 3a nella quale è riportata la posizione della particella in vari istanti. Questo modo di indicare la posizione di una particella e il tempo corrispondente è però un po' disordinato; proviamo perciò a rappresentare la stessa informazione con un diverso tipo di grafico.

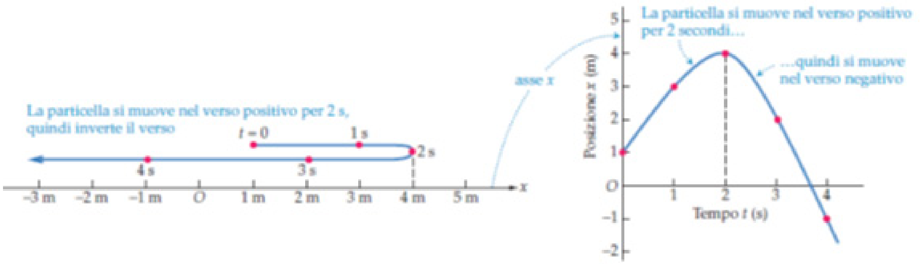


Figura 3 - Due modi per visualizzare un moto unidimensionale
a) Il cammino della particella mostrato su un asse coordinato.
b) Lo stesso cammino visualizzato in un grafico che riporta la posizione x in funzione del tempo t.

Sebbene in a) il percorso della particella sia mostrato come una U per chiarezza, in realtà la particella si muove in linea retta, lungo l'asse x.

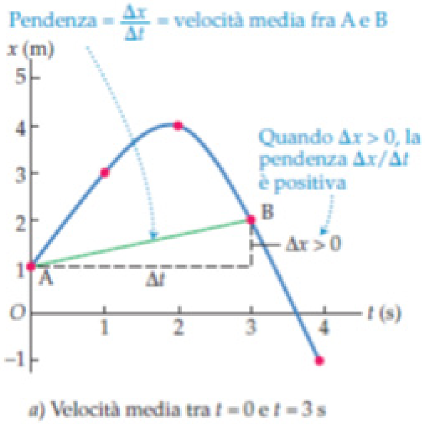
In figura 3b rappresentiamo lo stesso moto, ma questa volta su un piano cartesiano, riportando sull'asse orizzontale il tempo t e sull'asse verticale la posizione x.
Con un grafico spazio-tempo di questo tipo è molto più facile visualizzare il moto della particella.
La rappresentazione nel piano x-t permette di dare un'interpretazione particolarmente utile della velocità media. Supponiamo di voler determinare la velocità media della particella, il cui moto è illustrato nelle figure 3a e 3b, nell'intervallo di tempo fra t = 0 e t = 3s.
Applicando la definizione di velocità media:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2m - 1m}{3s - 0} = 0,3s$$

Per mettere in relazione questa definizione con il grafico spazio-tempo, disegniamo nel grafico il segmento che unisce la posizione della particella al tempo t = 0 (punto A) con la posizione al tempo t = 3 s (punto B), come mostrato in figura 4a. La pendenza della retta che congiunge i punti A e B è uguale all'incremento di x rispetto a t, cioè a$\Delta x/\Delta t$. Ma è la velocità media, perciò concludiamo che:

Definizione di pendenza
La pendenza della retta che congiunge due punti del grafico spazio-tempo è uguale alla velocità media nell'intervallo di tempo fra i due punti.

Come ulteriore esempio, calcoliamo la velocità media fra l'istante t = 2 s e l'istante t = 3 s della figura 3b. In figura 4b è riportata la retta che congiunge i due punti corrispondenti.
Osserviamo innanzitutto che questa retta ha una pendenza negativa; quindi $v_m < 0$, cioè la particella si sta muovendo verso sinistra. Notiamo inoltre che la retta è molto più inclinata rispetto a quella della figura 4a e pertanto la sua pendenza è maggiore. Infatti, se calcoliamo la pendenza in questo intervallo di tempo otteniamo $v_m = -2$ m/s.
Quindi, congiungendo i punti in un grafico x-t abbiamo un'informazione immediata sulla velocità media in un determinato intervallo di tempo.



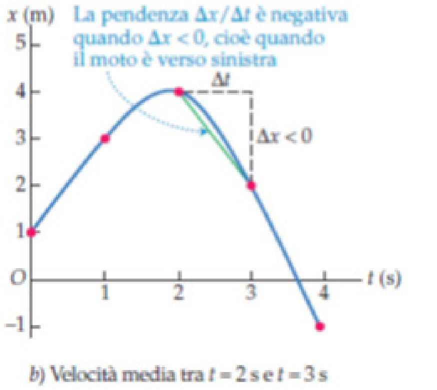


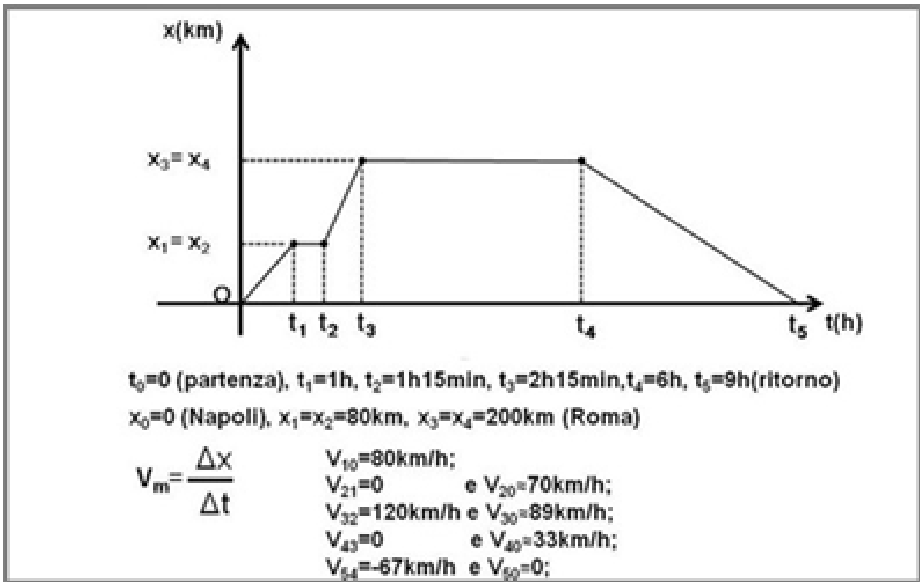
Figura 4 - Velocità media in un grafico spazio-tempo
La pendenza della retta fra due punti qualsiasi su un grafico spazio-tempo è uguale alla velocità media fra quei punti.
Una pendenza positiva indica un moto verso destra, una pendenza negativa indica un moto verso sinistra.

La velocità istantanea

La velocità media è molto comune anche se spesso non è sufficientemente rappresentativa del moto. Consideriamo il caso corrispondente ad una gita da Napoli a Roma; per le diverse frazioni determiniamo la velocità media e quella dall'inizio del viaggio:

- 0 → 1 viaggio in autostrada v_{10} = 80km/h;
- 1 → 2 sosta all'area di servizio, v_{22} = 0km/h (v_{20} = 70km/h);
- 2 → 3 viaggio a velocità maggiore per recuperare tempo v_{32} = 120km/h (v_{30} = 89km/h);
- 3 → 4 visita della città v_{21} = 0km/h (v_{40} = 33km/h);
- 4 → 5 rientro rallentato dal traffico, v_{54} = -67km/h (v_{50} = 0!);

Risulta, complessivamente, una velocità media nulla anche se siamo andati da Napoli a Roma (!); questo perché siamo ritornati al punto di partenza.
Serve una definizione appropriata della velocità capace di tenere conto delle varie fasi;



Per avere una rappresentazione più accurata del viaggio, dobbiamo calcolare la velocità media su intervalli di tempo più piccoli. Se calcoliamo la nostra velocità media ogni 15 minuti, otteniamo una migliore rappresentazione del viaggio; possiamo ottenere una rappresentazione ancora più realistica calcolando la velocità media ogni minuto o, addirittura, ogni secondo. Avendo a che fare con il moto di una qualsiasi particella, l'ideale sarebbe conoscere la velocità della particella in ogni istante. Questa idea di una velocità corrispondente a ogni istante di tempo è proprio ciò che intendiamo con velocità istantanea. Il modo più intuitivo è quello di rendere sempre più piccolo l'intervallo Δt considerato e definire dunque la velocità istantanea.
Con un formalismo matematico che sarà chiarito con studi più approfonditi di matematica possiamo scrivere che:

$$v_m = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Che cosa significa Δt→0?
Vuol dire che Δt è molto più piccolo dei tempi caratteristici del moto; nel caso della gita Δt=1s sarebbe sufficiente mentre dovendo misurare la velocità di una particella in un acceleratore servirebbe Δt~10-9 s!
Nella pratica riduciamo talmente l'intervallo di tempo Δt da poterlo considerare un istante.

$$\text{Velocità istantanea: } v = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Esempi di velocità caratteristiche:

- spostamenti geofisici (continenti, ecc): $V \sim (0,1 \div 1)$ cm/anno= $3.10^{-(11\div10)}$ m/s
- esseri viventi (animali, uomo, ecc): $V \sim (10 \div 100)$ km/h= $(3 \div 30)$ m/s
- mezzi meccanici (auto, treni,ecc) $V \sim (50 \div 300$ km/h = $(15 \div 90)$ m/s
- mezzi aerei (jet, missili, ecc) $V \sim 1000$km/h= $3{,}0.10^2$ m/s
- velocità di fuga dalla Terra $V \approx 11$km/s = $1{,}4.10^4$ m/s
- velocità della Terra intorno al Sole $V \approx 30$km/s = $4{,}2.10^4$ m/s
- velocità di fuga dal sistema solare $V \approx 600$ km/s = $8{,}5.10^5$ m/s
- velocità elettroni orbitanti $V \sim 2000$ km/s = 2.10^6 m/s
- velocità prodotti nucleari $V \sim 20000$ km/s = 2.10^7 m/s
- velocità della luce nel vuoto $V \approx 300000$ km/s= 3.10^8 m/s

Man mano che l'intervallo Δt diventa piccolo, anche Δx diminuisce, ma il rapporto tende a un valore definito. Consideriamo, ad esempio, il semplice caso di una particella che si muove con una velocità costante di 1 m/s. Se essa parte dal punto x = 0 nell'istante t = 0, la sua posizione nell'istante t = 1 s corrisponde a x = 1 m, nell'istante t = 2 s a x = 2 m e così via. Riportando questo moto in un grafico spazio-tempo otteniamo una linea retta (fig. 5).
Ora, supponiamo di voler determinare la velocità istantanea nell'istante t = 3 s. Calcoliamo la velocità media su piccoli intervalli di tempo centrati intorno a 3 s, riducendo l'intervallo di tempo, come mostrato in figura. Poiché il grafico è una linea retta, è evidente che $\Delta x/\Delta t=(\Delta x_1)/(\Delta x_2)$, indipendentemente dall'ampiezza dell'intervallo Δt. Più piccolo diventa Δt, più lo diventa anche Δx, ma il rapporto, essendo la pendenza della retta, rimane costante ed è uguale a 1 m/s. Perciò, la velocità istantanea nell'istante t = 3 s è 1 m/s.
Osserviamo inoltre che in questo caso la velocità istantanea è uguale a 1 m/s in qualsiasi istante e non solo per t = 3 s. Pertanto possiamo concludere che:

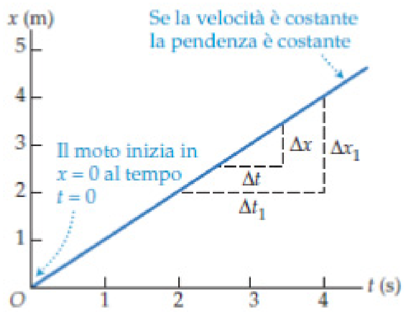
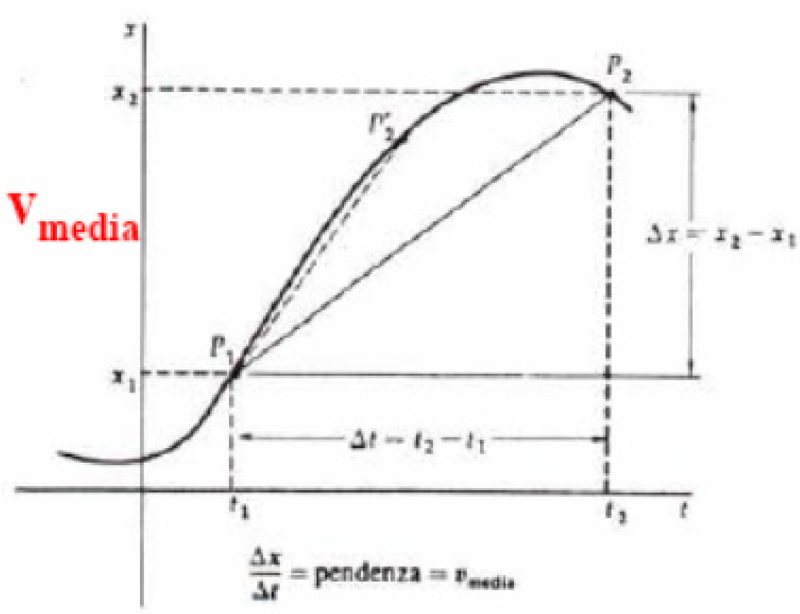
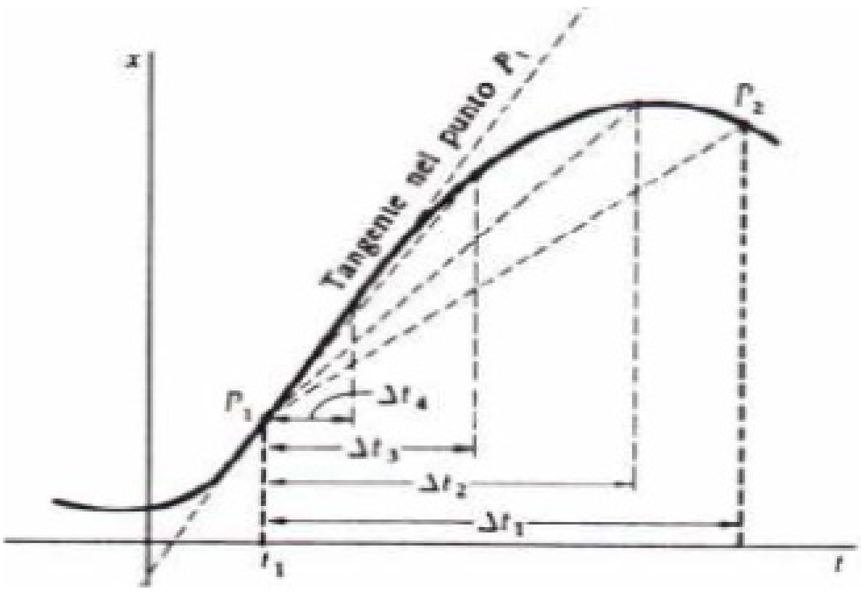


Figura 5 - Una velocità costante corrisponde a una pendenza costante in un grafico x-t
La pendenza $\Delta x_1/ \Delta t_1$ è uguale a (4 m - 2 m) / (4 s - 2 s) = (2 m)/(2 s) = 1 m/s. Poiché il grafico è una linea retta, la pendenza è uguale a 1 m/s per qualsiasi valore di Δt.

> Quando la velocità è costante, la velocità media in qualunque intervallo di tempo è uguale alla velocità istantanea in ogni istante.



Geometricamente, pertanto, la velocità media rappresenta la pendenza della retta secante la curva che rappresenta la traiettoria percorsa dal punto materiale da P_1 a P_2. Tale pendenza è dunque il coefficiente angolare della retta stessa.



Prendendo intervalli di tempo Δt via via sempre più piccoli, anche l'incremento Δx diviene via via sempre più piccolo fino a che il punto P_2 viene a sovrapporsi al punto P_1. La retta da secante diviene tangente. Matematicamente, come visto, si ha che:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

cioè la velocità istantanea coincide con il limite del rapporto incrementale $\Delta x/\Delta t$ ovvero con la derivata rispetto al tempo della variabile x.

Moto di caduta libera

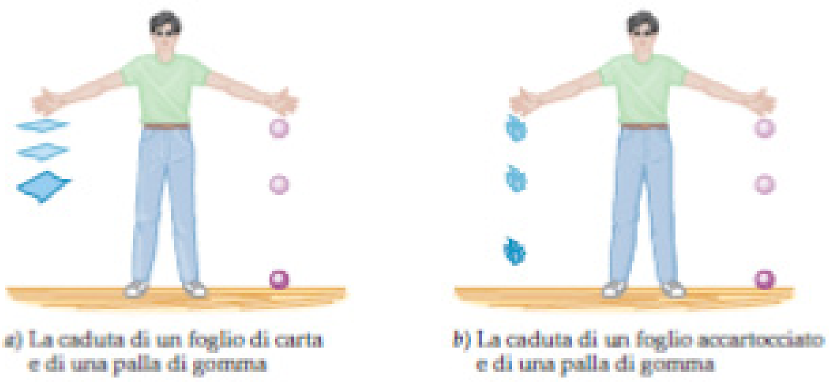
Il più famoso esempio di moto uniformemente accelerato è la caduta libera, cioè il moto di un oggetto che cade liberamente sotto l'influenza della gravità. Galileo (1564-1642) mostrò per primo che gli oggetti che cadono si muovono con accelerazione costante. Le sue conclusioni si basavano su due esperimenti eseguiti con sfere che rotolavano lungo piani inclinati di varia altezza; utilizzando il piano inclinato, Galileo riuscì a ridurre l'accelerazione delle sfere, ottenendo un moto abbastanza lento da poter essere misurato, anche con gli strumenti disponibili a quel tempo.

Galileo, inoltre, dimostrò che oggetti di differente peso cadono con la stessa accelerazione costante, purché la resistenza dell'aria sia tanto piccola da poter essere ignorata. Se, come dice la storia, per dimostrare questo fatto egli abbia lasciato cadere gli oggetti dalla torre pendente di Pisa, probabilmente non lo sapremo mai con certezza, ma sappiamo che, per confermare le proprie affermazioni, condusse molti esperimenti.

Oggi è facile verificare le affermazioni di Galileo facendo cadere oggetti in un recipiente in cui è stato fatto il vuoto e nel quale gli effetti della resistenza dell'aria sono praticamente nulli. In una classica dimostrazione in laboratorio, una piuma e una moneta vengono lasciate cadere nel vuoto ed entrambe cadono con la stessa velocità. Nel 1971 una rinnovata versione di questo esperimento fu eseguita sulla Luna dall'astronauta David Scott; nel vuoto quasi perfetto attorno alla superficie lunare egli lasciò cadere una piuma e un martello e mostrò al mondo intero che essi

raggiungono il suolo nello stesso istante.

Per illustrare in modo semplice l'effetto della resistenza dell'aria, consideriamo la caduta di un foglio di carta e di una palla di gomma (fig. 16): la carta scende lentamente al suolo, impiegando molto più tempo a cadere rispetto alla palla. Se però accartocciamo il foglio di carta fino a farlo diventare una palla e ripetiamo l'esperimento, possiamo vedere che la palla di carta e quella di gomma raggiungono il suolo più o meno nello stesso istante. Che cos'è cambiato nei due esperimenti? Ovviamente, quando il foglio di carta è stato ridotto a una palla, l'effetto della resistenza dell'aria è notevolmente diminuito, così che entrambi gli oggetti cadono più o meno come se fossero nel vuoto.



Prima di considerare altri esempi, esaminiamo meglio che cosa intendiamo esattamente per "caduta libera".
Per cominciare, osserviamo che l'aggettivo libera significa "libera da qualsiasi altro effetto che non sia la gravità". Ad esempio, nella caduta libera assumiamo che il moto di un oggetto non sia influenzato da alcuna forma di attrito o di resistenza dell'aria.
Sebbene la caduta libera sia una idealizzazione, che non si può applicare a molte situazioni del mondo reale, è tuttavia un'approssimazione utile in molti casi. Negli esempi seguenti assumeremo che il moto possa essere considerato come una caduta libera.
In secondo luogo è necessario precisare che la parola caduta non significa necessariamente che l'oggetto si stia muovendo verso il basso. Con l'espressione caduta libera, intendiamo qualsiasi moto sotto l'influenza della sola gravità: se lasciamo cadere una palla, questa è in caduta libera, se lanciamo una palla verso l'alto o verso il basso essa è comunque in caduta libera non appena lascia la mano.
L'accelerazione prodotta dalla gravità sulla superficie terrestre è indicata con il simbolo g ed è detta accelerazione di gravità. Il valore di g varia al variare della posizione sulla superficie della Terra e al variare dell'altitudine. La tabella 1 riporta i valori di g in alcune località situate a diversa latitudine.

Località	Latitudine	g
Quito (Ecuador)	0°	9,780
Honk Kong	30°	9,793
Oslo (Norvegia)	60°	9,819
Polo Nord	90°	9,832

Tabella 1 - Valori di g (m/s^2) in alcune località della Terra

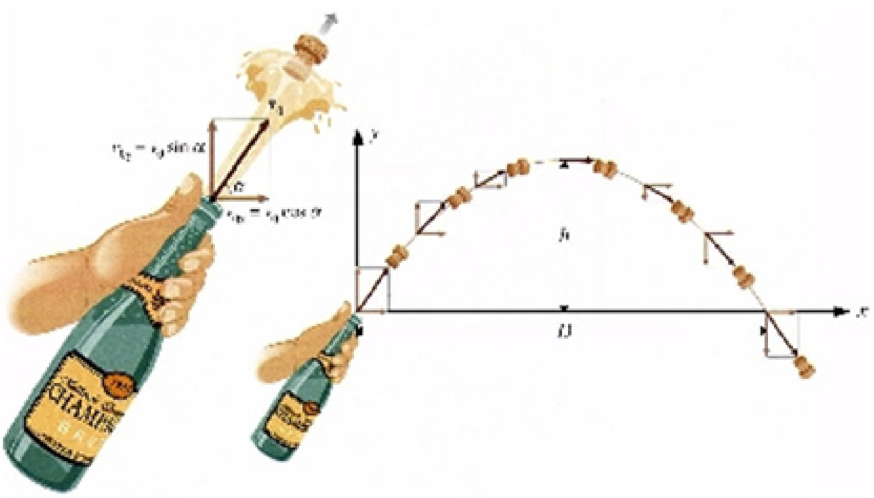
In tutti i calcoli in questo testo non terremo però quasi mai conto di questa variazione e utilizzeremo per l'accelerazione di gravità il valore $g = 9,81\ m/s^2$.
Sottolineiamo, in particolare, che g indica sempre il valore $+9,81\ m/s^2$, mai il valore $-9,81\ m/s^2$. Ad esempio, se scegliamo un sistema di coordinate con direzione positiva verso l'alto, l'accelerazione della caduta libera è $a = -g$; se scegliamo un sistema con direzione positiva verso il basso, allora l'accelerazione nella caduta libera è $a = g$. Tenendo presenti queste osservazioni, siamo pronti a esplorare esempi diversi di caduta libera.
Il caso particolare della caduta libera con partenza da fermo,

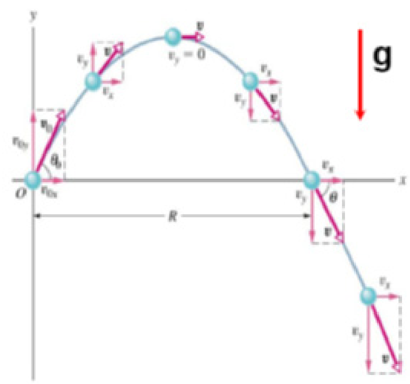
cioè con $v_0 = 0$, è così frequente e si incontra in così tanti contesti che merita una speciale attenzione.
Se poniamo $x_0 = 0$ e consideriamo il verso positivo in basso, la posizione in funzione del tempo è:

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Moti in due dimensioni

Le comuni leggi della fisica affermano che per lanciare un proiettile alla massima distanza è necessario inclinare il cannone a 45° rispetto al suolo. Questa regola non sembra però essere applicabile alle rimesse con le mani: i calciatori infatti, così come i lanciatori del disco e del giavellotto, solitamente utilizzano inclinazioni inferiori, tra i 30 e i 35°. I due ricercatori hanno analizzato centinaia di lanci, effettuati con inclinazioni diverse, misurandone potenza e lunghezza: un complesso sistema di equazioni ha consentito loro di determinare che l'inclinazione ottimale per un lancio lungo deve essere compresa tra i 20 e i 35°.
Per Linthorne e Everett, questa differenza tra le comuni regole della balistica e quelle della fisica sportiva risiede nella struttura scheletrica e muscolare dell'uomo, che rende più semplice applicare una maggior forza al pallone ad angoli bassi. I calciatori, pur non essendo, tranne rarissime eccezioni, esperti di fisica, giungono a questa conclusione semplicemente grazie all'esperienza: le rimesse di professionisti ma anche di semplici appassionati si discostano infatti pochissimo dall'angolo ottimale. (dalla rivista Focus)





Abbiamo analizzato finora moti che avvengono lungo una sola direzione: il moto di un oggetto che si muove lungo una retta orizzontale, il moto di un oggetto che cade liberamente da una certa altezza h sono esempi di moto cosiddetto unidimensionale.

Nella vita di tutti i giorni si ha spesso a che fare con moti in due dimensioni: una palla da basket che viene lanciata nel tentativo di far canestro, un calcio d'angolo battuto durante una partita di calcio, un paracadutista che si lancia da un aereo in movimento, un proiettile sparato da un cannone sono solo alcuni dei numerosi esempi il cui studio cinematica richiede la conoscenza del moto in due dimensioni.

Durante il suo moto in due dimensioni, il mobile (che chiameremo per uso comune proiettile) subisce una accelerazione verso il basso dovuta alla accelerazione di gravità g che ovviamente si mantiene costante in modulo e diretta verticalmente verso il basso mentre non possiede accelerazione orizzontale.

A un primo impatto lo studio del moto in due dimensioni potrebbe sembrare complicato ma possiamo semplificarlo analizzando singolarmente il moto lungo le due dimensioni perché

Il moto orizzontale e il moto verticale sono indipendenti l'uno dall'altro non influenzandosi a vicenda.

Lungo la direzione orizzontale l'accelerazione è nulla e così la componente orizzontale della velocità rimane costante durante il moto (si tratta di un moto uniforme).

Il moto verticale è quello analizzato per il moto di caduta libera ovvero di un oggetto che si muove sottoposto ad una accelerazione g costante. Si tratta, pertanto, di un moto uniformemente accelerato.

Possiamo così schematizzare le leggi del moto:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Possiamo per semplicità porre l'origine degli assi coordinati nel punto di lancio del proiettile avendosi così e possiamo

rappresentare graficamente il moto. Dal grafico si può notare che la componente orizzontale della velocità rimane costante mentre quella verticale varia con continuità. La componente verticale della velocità si comporta come per una palla lanciata verticalmente verso l'alto. E' diretta inizialmente verso l'alto e la sua intensità diminuisce fino ad annullarsi quando il proiettile raggiunge la posizione più elevata della traiettoria. Poi la componente verticale della velocità inverte la sua direzione e la sua intensità va aumentando sempre più rapidamente.
Analizziamo ora il moto nel dettaglio.

Equazione della traiettoria (Facoltativo)

Ci preoccupiamo inizialmente di trovare l'equazione della traiettoria.
Ricavo il tempo dall'equazione:

$$x = v_{0x} t$$

Si ha che:

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

Sostituendo tale valore della equazione:

$$y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

si ricava:

$$y = v_{0y} \frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}^2}$$

Indico con b la quantità:

$$\frac{v_{0y}}{v_{0x}}$$

e con a la quantità:

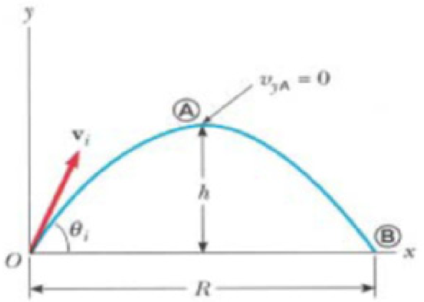
$$\frac{1}{2v_{0x}^2}g$$

Entrambe le quantità sono costanti avendosi così l'equazione:

$$y = -ax^2 + bx$$

che è l'equazione di una parabola che volge la concavità verso il basso.

La gittata



Si dice gittata la distanza orizzontale tra il punto di lancio del proiettile e il punto in cui tocca nuovamente il suolo (alla stessa quota di partenza).
Quando il proiettile tocca il suolo la componente y della sua traiettoria si annulla. Dall'equazione di II grado ottenuta ponendo y=0 ricavo il tempo. Ricavo $t_1 = 0$ che rappresenta l'istante del lancio e:

$$t_2 = \frac{2v_{0y}}{g}$$

Questo valore di t prende anche il nome di tempo di volo.
Sostituendo il valore ottenuto nella equazione ricavo:

$$x = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$$

che rappresenta il segmento cercato e detto Gittata R.

Le condizioni iniziali

Molte volte conosciamo il cosiddetto angolo di lancio ovvero l'inclinazione rispetto all'asse orizzontale del lancio del proiettile.
Applicando le relazioni già note che legano un vettore e le sue componenti possiamo esprimere v_{0x} e v_{0y} come segue:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$

Se conosciamo l'angolo di alzo possiamo riscrivere la relazione che ci permette di calcolare la gittata G come segue:

$$x = G = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

Si noti che la massima gittata si ha per $\alpha = 45°$.

La massima altezza raggiunta

Al vertice della traiettoria si ha $v_y = 0$ e cioè:

$$v_0 \sin\alpha - gt = 0$$

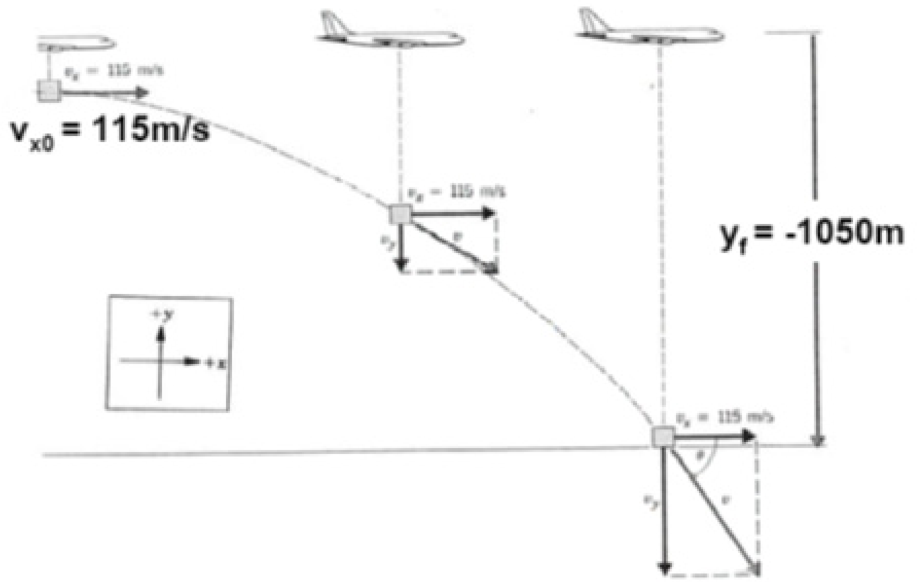
da cui ricavo il tempo:

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

La massima altezza raggiunta si ricava sostituendo nell'equazione della traiettoria il valore di t così ricavato avendosi:

$$y = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$$

Fisica e realtà: lancio di materiali da soccorso



Un aereo impiegato per il soccorso durante la guerra in Kosovo viaggia alla velocità di 115m/s e ad un'altezza dal suolo di 1050 metri. Il pilota deve lanciare un pacco contenente materiale per il pronto soccorso ma deve stare bene attento affinché il pacco arrivi proprio nell'accampamento distante circa 1600 metri dal punto in cui decide di sganciare il pacco. Riuscirà nell'ardua missione?

moto orizzontale: rettilineo ed uniforme
moto verticale: uniformemente accelerato

$$\begin{cases} x_f = x_i + v_{x0}t \\ y_f = y_i + v_{y0}t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

In questo caso, la velocità iniziale ha solo la componente lungo x , mentre la componente lungo y è nulla.
Dalla relazione scritta sopra è possibile ricavare il tempo che impiega il pacco di pronto soccorso per arrivare al suolo e a che distanza dal punto di lancio il pacco arriva.

$$\begin{cases} x_f = 0 + (115m/s)\cdot t \\ -1050m = 0 + 0\cdot t - \dfrac{1}{2}gt^2 = -\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$t^2 = \frac{2\times 1050\,m}{9.8\,m/s^2} = 214.3\,s^2$$

$$t = 14.6\,s$$

$$x_f = (115\,m/s)\times 14.6\,s = 1679\,m$$