

I vettori



1. Grandezze scalari e vettoriali

Tra le grandezze fisiche ve ne sono alcune che sono espresse solo da un valore numerico, accompagnato da un'unità di misura. Queste grandezze sono dette scalari.

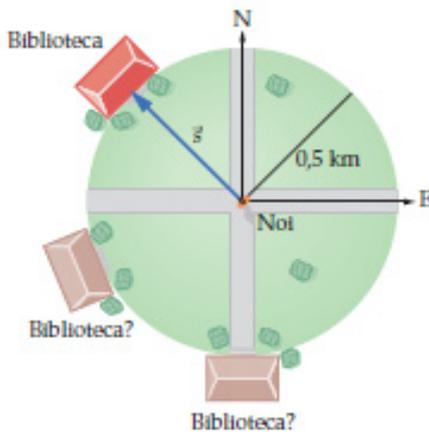


Figura 1 - Spostamento: distanza, direzione e verso

Se sappiamo che la biblioteca è a 0,5 km a nord-ovest da noi, conosciamo esattamente la sua posizione. Il vettore rappresenta lo spostamento dalla nostra posizione iniziale alla biblioteca.

Grandezza scalare

Una grandezza scalare è una grandezza fisica espressa da un numero accompagnato da un'unità di misura.

Esempi di grandezze scalari sono la massa di un oggetto, il volume di un recipiente, la durata di un evento, la densità di un materiale, la temperatura di un corpo.

Talvolta, invece, un numero non è sufficiente a descrivere una grandezza fisica ed è necessario associare a esso anche una direzione. Ad esempio, supponiamo di essere in una città che non conosciamo e di voler andare in biblioteca.

Chiediamo a un passante: «Sa dov'è la biblioteca?» Se il passante risponde «Sì, si trova a mezzo kilometro da qui» non ci è di grande aiuto, perché la biblioteca potrebbe essere in qualsiasi punto di una circonferenza di raggio 0,5 km, come mostrato in figura 1. Per conoscere esattamente dove è situata la biblioteca, abbiamo bisogno di una risposta del tipo: «Sì, la biblioteca è a mezzo kilometro a nord-ovest da qui.» Conoscendo la distanza e la direzione, sappiamo esattamente dove è situata la biblioteca. Lo spostamento dalla nostra posizione iniziale al punto in cui si trova la biblioteca è una grandezza fisica determinata non solo dalla distanza percorsa, ma anche dalla direzione (nord-ovest) e dal verso del movimento. In figura 1 lo spostamento è rappresentato da una freccia che punta nella direzione e nel verso del moto e la cui lunghezza, che chiameremo modulo o intensità (0,5 km, in questo caso), rappresenta la distanza in linea d'aria tra la posizione iniziale e la biblioteca. Lo spostamento è un esempio di grandezza vettoriale.

Grandezza vettoriale

Una grandezza vettoriale è una grandezza fisica rappresentata matematicamente da un vettore.

Un vettore è un ente matematico definito da un modulo (che è un numero non negativo), una direzione e un verso.

In generale, una grandezza fisica specificata da un modulo, che è un numero non negativo con un'unità di misura, da una direzione e da un verso è detta grandezza vettoriale.

Nell'esempio precedente abbiamo incontrato il vettore sposta-

mento. Altre grandezze vettoriali sono, ad esempio, la velocità e l'accelerazione di un oggetto, e le forze, cui è dedicato questo capitolo.

Per rappresentare graficamente un vettore useremo una freccia, come in figura 1. Il simbolo di un vettore sarà una lettera (maiuscola o minuscola) in corsivo con una piccola freccia sopra. La stessa lettera senza freccia indicherà il modulo del vettore. Ad esempio, in figura 1 il vettore spostamento dalla posizione iniziale alla biblioteca è contrassegnato dal simbolo \vec{s} e il suo modulo è $s = 0,5 \text{ km}$.

Prime nozioni di calcolo vettoriale

I vettori sono elementi astratti che possono però essere rappresentati nel piano e nello spazio attraverso segmenti orientati la cui lunghezza e direzione sono proporzionali a quelle dei vettori rappresentati.

Scelta un'unità di misura, ad ogni segmento $[AB]$ si può associare un numero reale non negativo AB , la misura della lunghezza di $[AB]$, che rappresenta il modulo o intensità del vettore.

Il passo successivo consiste nel definire un segmento orientato come quel segmento di estremi A e B nel quale si sia assegnato un ordine e quindi si possa distinguere un punto iniziale ed uno finale. A tal fine si sceglie il simbolo \underline{AB} convenendo di considerare A come il punto iniziale e B come quello finale. Graficamente ciò si esprime tramite una freccia che parte da A e giunge in B .

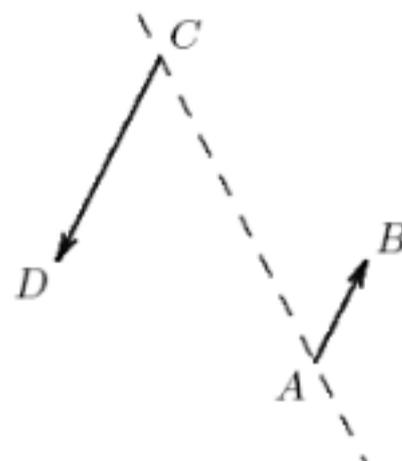
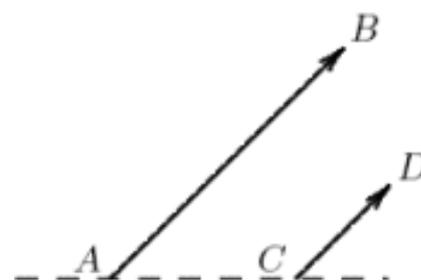
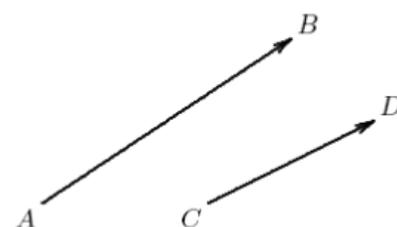
Il simbolo \underline{BA} individua il segmento orientato opposto ad \underline{AB} e si pone $\underline{BA} = -\underline{AB}$. La (misura della) lunghezza di entrambi è ancora la medesima, $AB = BA$, e risulta un numero positivo se $A \neq B$ mentre è nulla se $A = B$.

A questi nuovi enti si possono in modo del tutto naturale estendere i concetti di parallelismo e perpendicolarità. In particolare \underline{AB} risulta parallelo ad una retta r se lo sono le rette r e la retta AB cioè $r // AB$. Così i segmenti orientati \underline{AB} e \underline{CD} si dicono collineari (o paralleli, $\underline{AB} // \underline{CD}$) se esiste una linea retta r alla quale entrambi risultano paralleli.

Due segmenti orientati possono avere lo stesso verso oppure verso opposto.

Un segmento orientato \underline{AB} può quindi essere posto in corrispondenza con un altro segmento orientato \underline{CD} per mezzo della sua:

1. lunghezza;
2. collinearità;
3. verso;

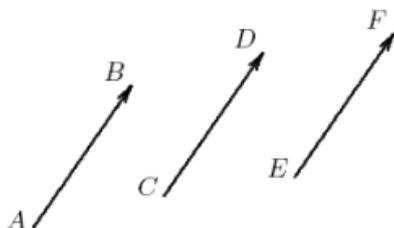


Pertanto sull'insieme dei segmenti orientati del piano è possibile definire una relazione che associ \underline{AB} con \underline{CD} se e solo se:

$$\begin{aligned}\underline{AB} // \underline{CD} \\ \underline{AB} \wedge \wedge \underline{CD} \\ \underline{AB} = \underline{CD}\end{aligned}$$

Tale relazione prende il nome di relazione di equipollenza. La definizione di vettore si basa sulla costruzione di una nuova algebra diversa da quella dei numeri (che viene utilizzata per le grandezze scalari) nella quale vengono definite le operazioni che coinvolgono questa nuova entità.

Alla base di tutto sta la definizione di vettore come insieme di tutti i segmenti orientati dotati della stessa lunghezza, direzione e verso. Per questa ragione si dice che i vettori si possono trasportare nello spazio rimanendo paralleli a se stessi.



Un vettore nel piano (o nello spazio) è definito come l'insieme di tutti i segmenti orientati equipollenti, ossia di tutti i segmenti orientati aventi la medesima direzione, verso e lunghezza.

Quando poi si passa dalla matematica alla fisica si scopre che esistono vettori che si possono tranquillamente spostare (vettori non applicati) e vettori che invece non si possono trasportare (vettori applicati).

Avere dato una rappresentazione del vettore non è però sufficiente a definirlo; fanno parte integrante della definizione anche le operazioni tra vettori. In altri termini saremo autorizzati ad affermare che una certa grandezza fisica definita operativamente è un vettore se tale grandezza, oltre che essere dotata di una direzione verso e intensità, si comporta nella sovrapposizione fisica rispettando le regole di calcolo del calcolo vettoriale.

2. Operazioni con i vettori

Somma di vettori

Curiosando in una vecchia cassa in soffitta trovi la mappa di un tesoro. La mappa dice che, per localizzare il tesoro, devi partire dall'albero di magnolia che si trova in cortile, fare 5 passi verso nord e poi 3 verso est. Se questi due spostamenti

sono rappresentati dai vettori A e B in figura 2, lo spostamento totale dall'albero al tesoro è dato dal vettore C . Diciamo che è il vettore somma di A e B e scriviamo:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

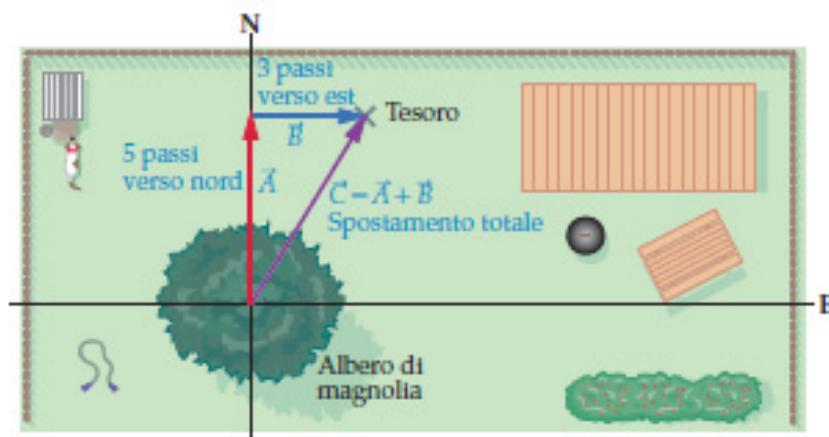


Figura 2 - Somma di due vettori

Per andare dall'albero di magnolia al tesoro, devi prima fare 5 passi verso nord (A) e poi 3 passi verso est (B). Lo spostamento totale dall'albero al tesoro è la somma degli spostamenti A e B , cioè $C = A + B$.

In generale i vettori si sommano graficamente secondo la seguente regola (il cosiddetto metodo punta-coda):

Somma di due vettori (metodo punta-coda)

Per sommare i vettori A e B , si dispone la coda di B sulla punta di A : la somma $C = A + B$ è il vettore che va dalla coda di A alla punta di B .

Per applicare il metodo punta-coda è necessario spostare i vettori. Questa operazione non comporta alcun problema se i vettori vengono spostati parallelamente a se stessi, senza modificarne la lunghezza e il verso. Rette parallele rappresentano infatti la stessa direzione e, poiché un vettore è definito solo dal suo modulo, dalla sua direzione e dal suo verso, se questi non cambiano, non cambia neanche il vettore. Ad esempio, nella figura 3 tutte le frecce hanno la stessa lunghezza e la stessa direzione orientata e quindi rappresentano lo stesso vettore, anche se sono collocate in punti diversi.

Nel caso particolare in cui si sommano due vettori che hanno uguale direzione, il vettore somma ha la stessa direzione. Per ciò che riguarda il suo modulo e il suo verso, la regola è la seguente:

- se i due vettori hanno versi uguali (figura 4a), il vettore somma ha come modulo la somma dei moduli dei due vettori e lo stesso verso;
- se i due vettori hanno verso opposto (figura 4b), il vettore somma ha come modulo la differenza dei moduli dei due

vettori e come verso quello del vettore che ha modulo maggiore.

Figura 3 - Somma di vettori aventi la stessa direzione

- a) I due vettori hanno verso uguale.
- b) I due vettori hanno verso opposto.

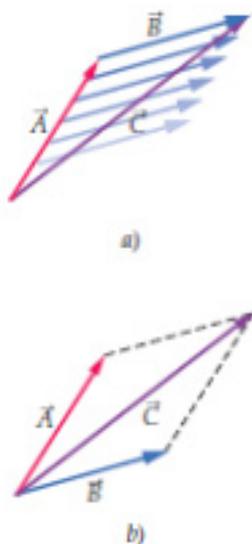
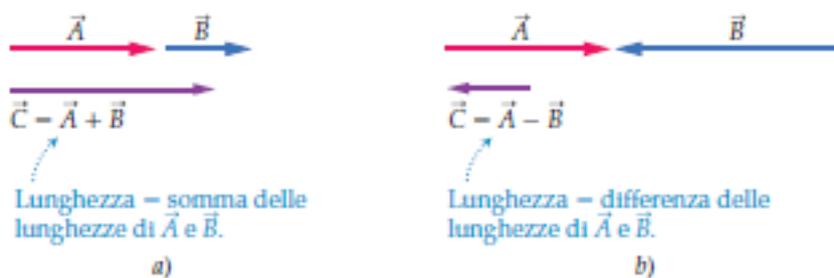


Figura 4 - Regola del parallelogramma

Il vettore somma $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ ottenuto con il metodo punta-coda (a) oppure, facendo coincidere la coda di \vec{B} con quella di \vec{A} , mediante la regola del parallelogramma (b).

Consideriamo ora i due vettori \vec{A} e \vec{B} in figura 4a e il loro vettore somma $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ ottenuto con il metodo punta-coda. Se spostiamo parallelamente a se stessa la freccia che rappresenta \vec{B} in modo che la sua coda coincida con quella di \vec{A} , troviamo che \vec{C} è la diagonale del parallelogramma che ha come lati \vec{A} e \vec{B} (figura 4b). Abbiamo scoperto così un altro metodo per costruire la somma di due vettori, noto come regola del parallelogramma:

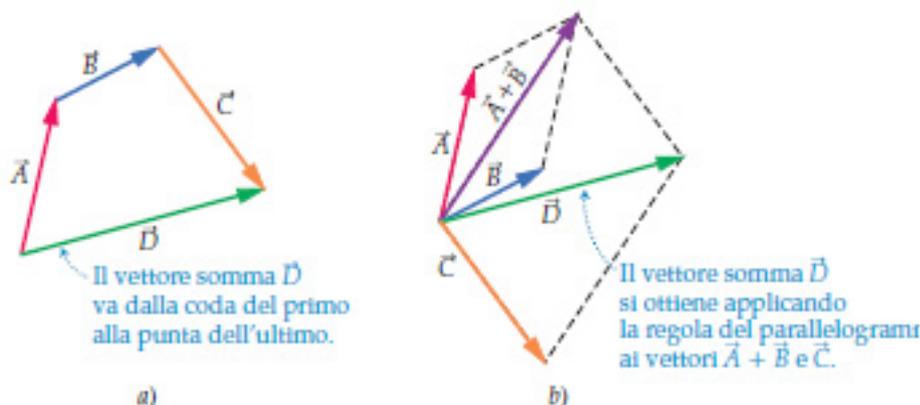
Somma di due vettori (regola del parallelogramma)

Per sommare i vettori \vec{A} e \vec{B} si fanno coincidere le loro code e si disegna il parallelogramma che ha i due vettori come lati: la somma $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ è la diagonale di questo parallelogramma.

Se i vettori da sommare sono più di due, basta estendere i metodi di addizione che abbiamo appena descritto. Ad esempio, disponendo tutti i vettori secondo il metodo punta-coda, il vettore somma è quello che va dalla coda del primo vettore alla punta dell'ultimo, come mostrato in figura 5a. Oppure, usando la regola del parallelogramma, si sommano dapprima due vettori qualunque, poi si somma il vettore risultante con il vettore successivo, e così via (figura 5b).

Figura 5 - Somma di più vettori

Il vettore somma $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ ottenuto con il metodo punta-coda (a) e con la regola del parallelogramma (b).



Differenza di vettori

Vediamo ora come si sottraggono i vettori. Vogliamo determinare il vettore D differenza di due vettori A e B , cioè:

$$D = A - B$$

dove A e B , ad esempio, sono i vettori rappresentati in figura 6. Possiamo scrivere nel modo seguente:

$$D = A + (-B)$$

cioè come somma di A e $-B$, dove il vettore $-B$ è il vettore opposto di B .

L'opposto di un vettore è rappresentato da una freccia della stessa lunghezza del vettore originale, ma orientata nel verso opposto.

Il vettore B e il suo opposto $-B$ sono mostrati in figura 6. Per sottrarre B da A , cioè per calcolare il vettore $D = A - B$, basta ribaltare il verso di B e sommare il vettore così ottenuto ad A , come indicato in figura. La regola generale è la seguente:

Differenza di due vettori

Per sottrarre un vettore B da un vettore A , si costruisce il vettore $-B$, l'opposto di B : la differenza $D = A - B$ è la somma di A e $-B$.

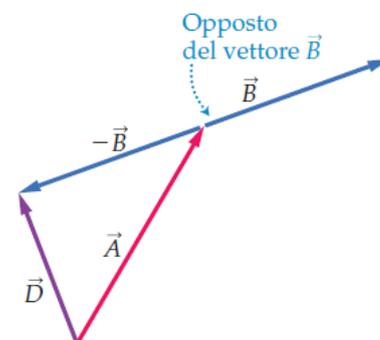


Figura 6 - Sottrazione di vettori

Costruzione grafica che permette di determinare il vettore $D = A - B$ come somma del vettore e del vettore A opposto di B .

Prodotto di un vettore per uno scalare

Un'altra operazione che può essere effettuata su un vettore è la sua moltiplicazione per un numero. Come mostrato in figura 8, ad esempio, moltiplicando un vettore per 3 si aumenta di un fattore 3 il suo modulo, ma non si cambiano direzione e verso; moltiplicando il vettore per -3 , invece, si aumenta il suo modulo di un fattore 3 e si inverte il verso del vettore.

La regola generale è la seguente:

Prodotto di un vettore per un numero

Moltiplicando un vettore per un numero, la direzione del vettore non cambia, il suo modulo viene moltiplicato per il valore assoluto di quel numero e il verso rimane lo stesso se il numero è positivo, mentre si inverte se il numero è negativo.

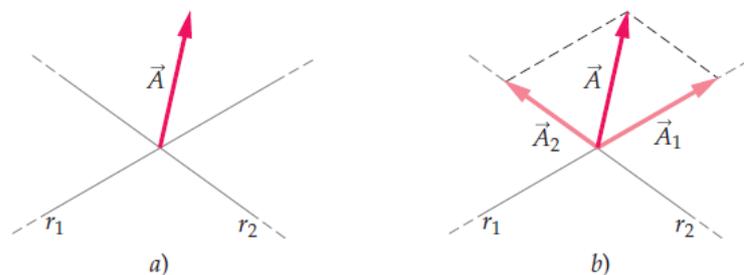
2. Componenti cartesiane di un vettore

Scomposizione di un vettore lungo due rette qualsiasi

Capita talvolta di dover scomporre un vettore lungo due rette assegnate, cioè di dover trovare due vettori diretti lungo queste rette e la cui somma sia uguale al vettore dato. Per fare questo si ricorre alla regola del parallelogramma. Il procedimento è illustrato in figura 9.

Figura 7 - Scomposizione di un vettore lungo due rette

- a) Per scomporre il vettore A lungo le rette r_1 ed r_2 si pone la coda di A nel punto di intersezione delle rette.
- b) Si tracciano le parallele a r_1 ed r_2 passanti per la punta di A . I due lati orientati A_1 e A_2 del parallelogramma sono i vettori, diretti rispettivamente lungo r_1 ed r_2 , la cui somma è A .



Se A è il vettore da scomporre lungo le rette r_1 ed r_2 , cominciamo con il porre la sua coda nel punto di intersezione di r_1 ed r_2 , quindi tracciamo le parallele a r_1 ed r_2 passanti per la punta di A . Si forma così un parallelogramma, i cui due lati orientati a partire dalla coda di A rappresentano i vettori cercati, cioè i vettori A_1 e A_2 che hanno come somma A .

Scomposizione di un vettore lungo gli assi cartesiani

Di particolare importanza è la scomposizione di un vettore lungo i due assi perpendicolari di un sistema di coordinate cartesiane. Scegliamo un'origine, O , e un verso positivo per l'asse x (asse delle ascisse) e per l'asse y (asse delle ordinate), come mostrato in figura 10. Ponendo la coda di un vettore A nell'origine e disegnando le parallele agli assi x e y , si trovano due vettori perpendicolari A_x e A_y la cui somma è A :

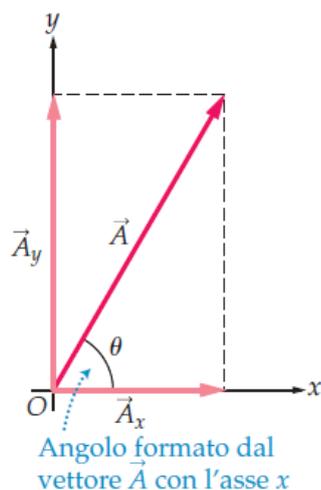


Figura 8 - Componenti cartesiane di un vettore

Scomposizione del vettore A nei due vettori perpendicolari A_x e A_y diretti lungo gli assi di un sistema di coordinate cartesiane.

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

Le componenti cartesiane del vettore sono le lunghezze A_x e A_y , alle quali è attribuito un segno positivo o negativo a secon-

da che i vettori A_x e A_y siano diretti nel verso positivo o nel verso negativo degli assi x e y , rispettivamente. La situazione è illustrata in figura 11.

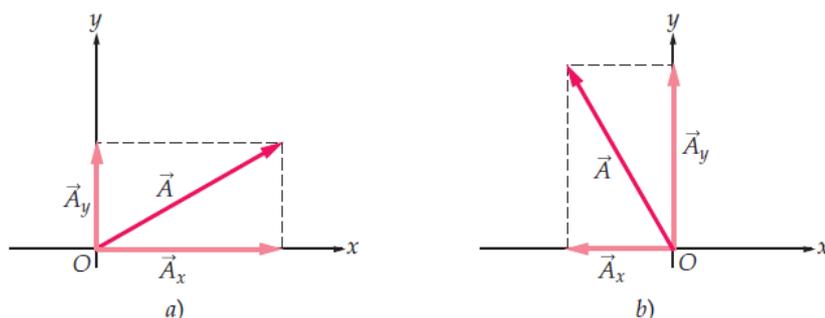


Figura 8 - Vettori con componenti di diverso segno

a) A_x e A_y puntano entrambi nel verso positivo, quindi $A_x > 0$ e $A_y > 0$.
b) A_x punta nel verso negativo dell'asse x , quindi $A_x < 0$.

Le componenti A_x e A_y possono essere calcolate a partire dal modulo e dalla direzione di A .

La direzione di A è individuata dall'angolo θ che il vettore forma con l'asse delle ascisse. Per ottenere una relazione tra θ e le componenti cartesiane di A dobbiamo introdurre due funzioni matematiche molto importanti: il seno e il coseno di un angolo.

Facendo riferimento al generico triangolo rettangolo di figura 12, il seno e il coseno sono definiti come segue:

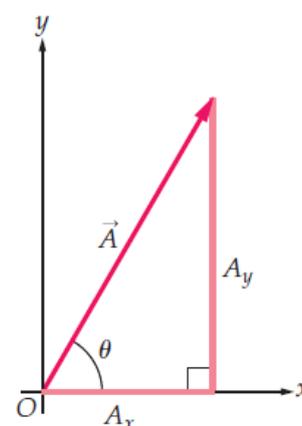


Figura 9

Seno e coseno di un angolo θ

Il seno dell'angolo θ è dato dal rapporto tra il cateto opposto all'angolo e l'ipotenusa:

$$\text{sen}\theta = \frac{b}{c}$$

Il coseno dell'angolo θ è dato dal rapporto tra il cateto adiacente all'angolo e l'ipotenusa:

$$\text{cos}\theta = \frac{a}{c}$$

Da qui si trova che il cateto b è uguale al prodotto dell'ipotenusa c per il seno dell'angolo opposto:

$$b = c \text{ sen } \theta$$

mentre il cateto a è uguale al prodotto dell'ipotenusa c per il coseno dell'angolo opposto:

$$a = c \text{ cos } \theta$$

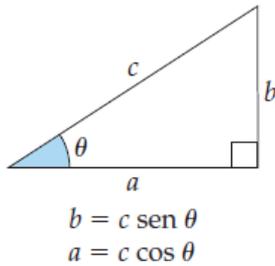


Figura 10 - Seno e coseno di un angolo

Applicando queste relazioni al triangolo rettangolo di figura 10, che ha come cateti A_x e A_y e come ipotenusa A , si possono scrivere le componenti del vettore A in funzione del suo modulo e dell'angolo θ :

$$A_x = A \cos \theta \quad A_y = A \text{ sen } \theta$$

Vediamo ora come si risolve il problema inverso, cioè come si calcola il modulo del vettore A e l'angolo θ che identifica la sua direzione conoscendo le componenti cartesiane A_x e A_y .

Il modulo del vettore A si ottiene applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo di figura 13:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

Per determinare θ , usando le relazioni date sopra scriviamo dapprima il coseno e il seno di θ :

$$\cos \theta = \frac{A_x}{A} \quad \text{sen} \theta = \frac{A_y}{A}$$

e poi calcoliamo le funzioni inverse del coseno e del seno (indicate, rispettivamente, con \cos^{-1} e sen^{-1}):

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{A_x}{A} \right) \quad \theta = \text{sen}^{-1} \left(\frac{A_y}{A} \right)$$

Queste formule significano che θ è l'angolo il cui coseno vale A_x/A e il cui seno vale A_y/A .

Non approfondiremo la matematica delle funzioni \cos^{-1} e sen^{-1} . Ci basterà sapere che possiamo determinare i loro valori con la nostra calcolatrice tascabile.

Somma vettoriale per componenti

La convenienza della rappresentazione cartesiana dei vettori sta nel fatto che usando le componenti cartesiane diventa piuttosto facile sommare i vettori. Per sommare due o più vettori, infatti, basta semplicemente sommare le loro componenti.

Il metodo è illustrato in figura 11.

Se C è la somma di A e B , cioè $C = A + B$, le componenti cartesiane di C sono date da:

$$\begin{aligned} C_x &= A_x + B_x \\ C_y &= A_y + B_y \end{aligned}$$

e per calcolare il modulo di C si applica la formula:

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$$

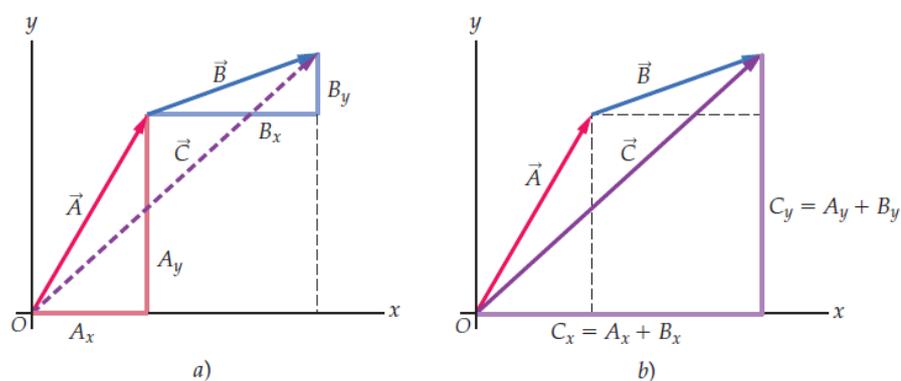


Figura 11 - Somma di vettori mediante le componenti

a) Le componenti x e y di A e di B.
b) Le componenti x e y di C. Notiamo che $C_x = A_x + B_x$ e $C_y = A_y + B_y$.

Prodotto di un vettore per uno scalare

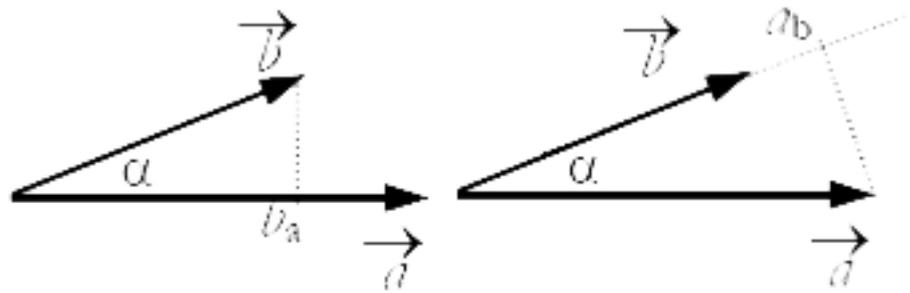
Dato uno scalare k (numero reale) e un vettore a è possibile definire una nuova operazione tale da associare a questi due un altro vettore. Vale la seguente definizione:

La moltiplicazione ka (o ak) di un vettore a con il numero reale k è un vettore $b = ka$, collineare ad a , di modulo $k|a|$, e verso coincidente con quello di a se $k > 0$, opposto a quello di a se $k < 0$.
Nel caso che sia $k = 0$ o $a = 0$ il vettore $b = 0$.

Prodotto scalare tra due vettori

Dati due vettori a e b e indicato con α l'angolo formato tra essi, si chiama prodotto scalare (dot product) il numero c così definito:

$$c = a \cdot b = ab \cos \alpha$$



Poiché moltiplicare per il coseno equivale a trovare la componente di un vettore lungo la retta rispetto a cui viene misurato l'angolo potremo anche scrivere che:

$$c = a \cdot b = a_b b = ab_a$$

Se conosciamo la rappresentazione cartesiana dei vettori possiamo anche definire il prodotto cartesiano nel modo seguente:

Siano:

$$a = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$b = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

due vettori dello spazio espressi nella loro decomposizione cartesiana.

Dicesi prodotto scalare di due vettori a e b, la somma dei prodotti delle componenti omonime (e quindi relative agli stessi assi):

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Dimostrazione:

Basta osservare che, indicati con α e β gli angoli formati dai due vettori con l'asse x, l'angolo tra essi è $\beta - \alpha$, $a \cdot b = a b \cos(\beta - \alpha) = a b (\cos\beta \cos\alpha + \sin\beta \sin\alpha) = a_x b_x + a_y b_y$.

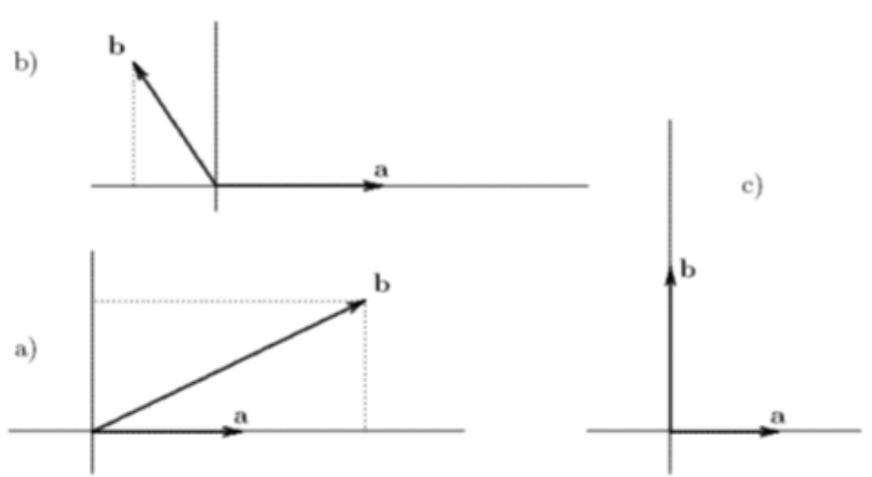
La dimostrazione si può svolgere elegantemente anche sfruttando le proprietà dei versori e ciò equivale a dimostrare indirettamente anche la formula del coseno della differenza (lasciamo la dimostrazione come esercizio).

Altre proprietà del prodotto scalare:

- Proprietà commutativa $a \cdot b = b \cdot a$
In effetti scambiando i due vettori si passa dall'angolo α all'angolo $-\alpha$ e il valore del coseno rimane lo stesso
- Ortogonalità $a \cdot b = 0 \cdot \alpha = 90^\circ$

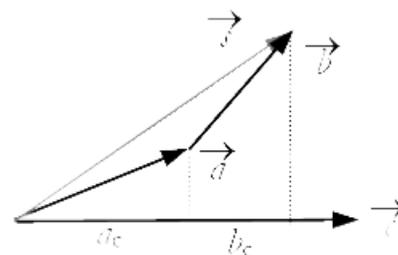
Infatti, quando l'angolo vale 90° , il coseno vale 0

- $a \cdot b > 0 \Leftrightarrow 0 < \hat{a}b < 90^\circ$
- $a \cdot b < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \hat{a}b < 180^\circ$



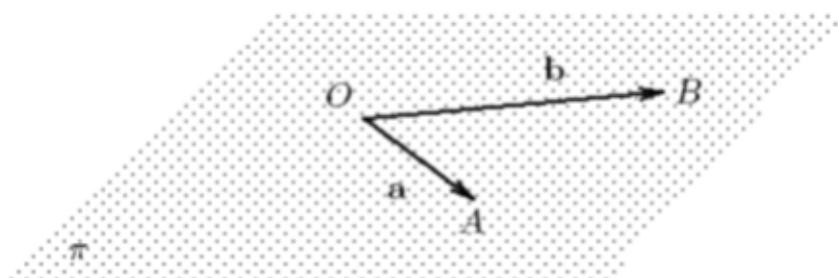
- Moltiplicazione per uno scalare k
 associativa $k(a \cdot b) = (k \cdot a) \cdot b = a \cdot (k \cdot b)$
- Versori
 $i \cdot j = 0$
 $i \cdot i = j \cdot j = 1$
- Distributiva
 $c \cdot (a + b) = (c \cdot a) + (c \cdot b)$

La dimostrazione di questa proprietà si basa sul fatto che nella somma vettoriale si sommano algebricamente le componenti e la lasciamo e per esercizio al lettore che utilizzerà l'immagine qui a lato.



Il prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale tra due o più vettori ci fornisce, al contrario del prodotto scalare, un nuovo vettore di cui dobbiamo caratterizzarne il modulo, la direzione e il verso.



Dati due vettori a e b e indicato con α l'angolo formato tra essi, si chiama prodotto vettoriale il vettore che ha per modulo il numero c così definito:

$$c = a \times b = a b \sin \alpha$$

Per definire completamente il prodotto vettoriale, tuttavia, è necessario stabilire anche la direzione e il verso del nuovo vettore che si ottiene moltiplicando vettorialmente i vettori a e b . Cominciamo col dire che i due vettori a e b individuano un piano. Assegnare una direzione in questo piano o in un piano ad esso parallelo riesce problematico mentre è immediato associare a π una direzione ad esso perpendicolare: difatti tutte le rette perpendicolari a π possiedono la medesima direzione, univocamente determinata appena sono dati i due vettori. Conveniamo quindi di assegnare a $a \times b$ la direzione perpendicolare al piano individuato dai due vettori, in tal modo si ha:

$$(a \times b) \perp a$$

$$(a \times b) \perp b$$

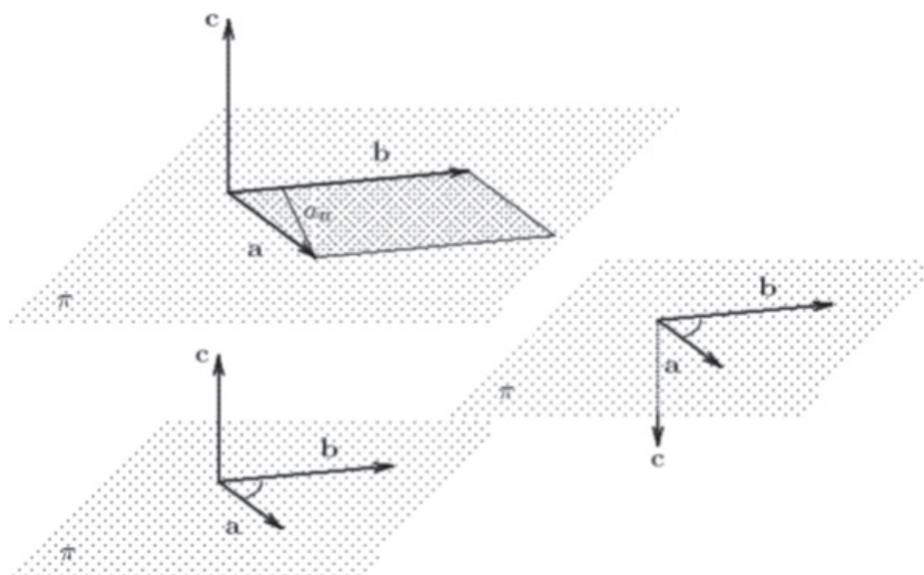
Si tratta ora di determinare il verso. A prima vista si potrebbe pensare di utilizzare le nozioni di rotazione oraria e antioraria: per esempio, il verso di $a \times b$ potrebbe essere uscente dal piano dei due vettori se la rotazione che porta il primo vettore a a sovrapporsi al secondo b attraverso l'angolo minore di 180° risultasse antioraria, o viceversa. Una tale convenzione non sarebbe comunque soddisfacente in quanto la nozione di rotazione oraria e antioraria dipende dal punto di osservazione: difatti se si osserva la rotazione da punti appartenenti a ciascuno dei due semispazi formati dal piano π , si ottengono risultati opposti.

Prendiamo invece una comune vite avvitata su una sottile tavola di legno. Questa, solo se ruotata in un certo modo avanza, mentre per estrarla la si deve ruotare nel verso opposto. Un tale comportamento rimane immutato se si guarda dall'altro lato della tavola: ancora per farla avanzare nello stesso verso di prima bisogna ruotarla nello stesso modo.

Un tale oggetto quindi permette di associare univocamente ad un verso di rotazione un verso di avanzamento. Poiché comunque esistono viti (poche) che si comportano diversamente (le prime si dicono destrorse, queste ultime sinistrorse), conviene rifarci ad un oggetto che, per ora esiste solo nella versione "destrorsa" ed è noto a tutti: il cavatappi.

Possiamo quindi in definitiva proporre la regola per il verso di $a \times b$:

$a \times b$ possiede il verso di avanzamento di un cavatappi fatto ruotare concordemente alla rotazione che sovrappone il primo vettore a sul secondo b , attraverso l'angolo convesso $\alpha < 180^\circ$.



Le conseguenze di una tale posizione sono immediate: osservando la figura risulta evidente che $(a \times b) \uparrow \downarrow (b \times a)$ e quindi che i due vettori possiedono versi opposti. Se quindi assegniamo ad essi lo stesso modulo l'operazione che stiamo definendo e che chiameremo prodotto vettoriale risulterebbe anticommutativa ossia tale che $a \times b = -b \times a$.

Ci chiediamo ora quale sia la decomposizione cartesiana di $a \times b$: i vettori a e b siano espressi dalle:

$$a = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$b = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

Come già detto, la risposta ad una tale domanda presuppone conoscenze di goniometria non ancora acquisite, pertanto l'espressione che ne risulta verrà data senza dimostrazione: il prodotto vettoriale in termini delle componenti cartesiane di a e b , si esprime comunque come:

$$c = a \times b = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}$$

per cui le componenti di c sono:

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y$$

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x$$

Una tale espressione risulta difficile da memorizzare per cui si ricorre ad una scrittura formale alternativa, detta determinante e del tipo:

$$c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Da cui le componenti si ottengono sviluppando il determinante rispetto agli elementi della prima riga:

$$c_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \quad c_y = - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \quad c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

Abbiamo già accennato a una proprietà del prodotto vettoriale, la proprietà anticommutativa:

$$a \times b = - b \times a$$

Altre proprietà di cui gode il prodotto vettoriale sono:

- Proprietà associativa rispetto al fattore scalare
 $\forall \alpha \in R \alpha \cdot (a \times b) = (\alpha \cdot a) \times b = a \times (\alpha \cdot b)$
- Proprietà distributiva rispetto alla somma vettoriale
 $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$