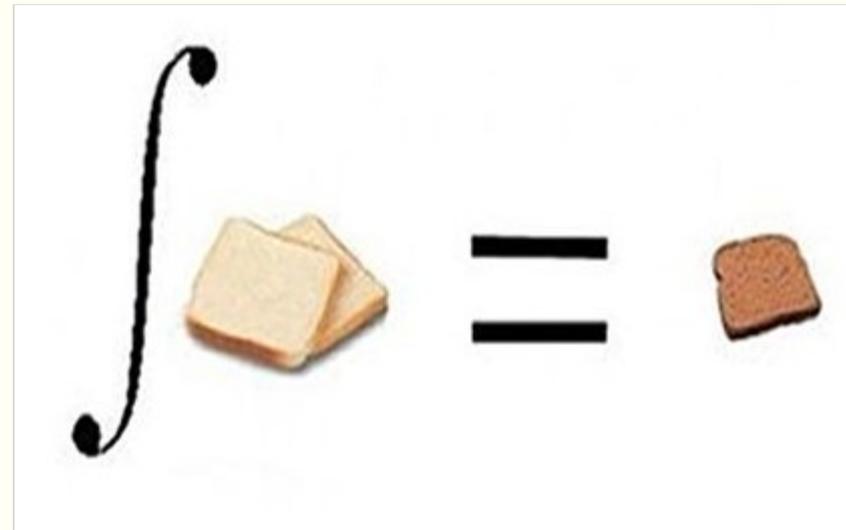




# CALCOLO INTEGRALE

Prof. Roberto Capone  
A.A. 2020/21  
Corso di Laureai in Scienze Ambientali

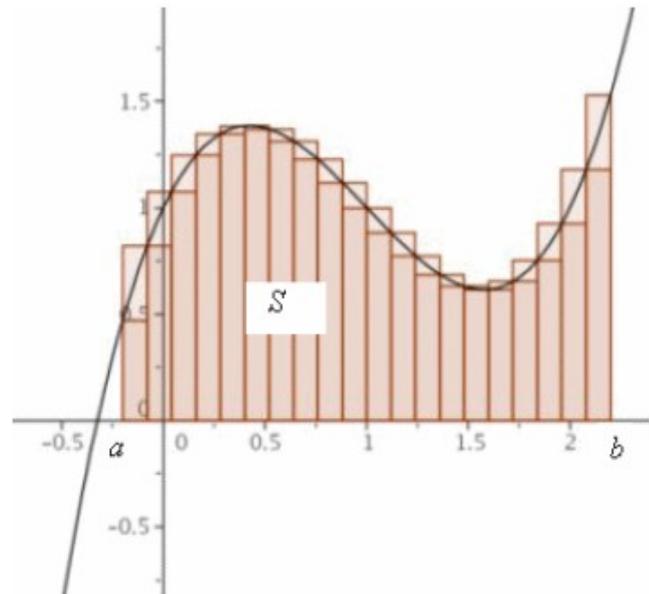


# Il calcolo integrale: intro

Le applicazioni del calcolo integrale sono svariate: esistono, infatti, molti campi, dalla fisica alla ingegneria, dalla biologia alla economia, in cui si fa largo uso degli integrali.

Per fornire l'idea intuitiva del concetto cardine del calcolo differenziale, ossia la derivata, abbiamo introdotto il problema della tangente; allo stesso modo, per presentare l'idea di integrale tratteremo il problema del calcolo dell'area.

Si immagini di dover calcolare l'area della regione  $S$  sottostante la curva  $y = f(x)$  da  $a$  a  $b$ , rappresentata in figura.

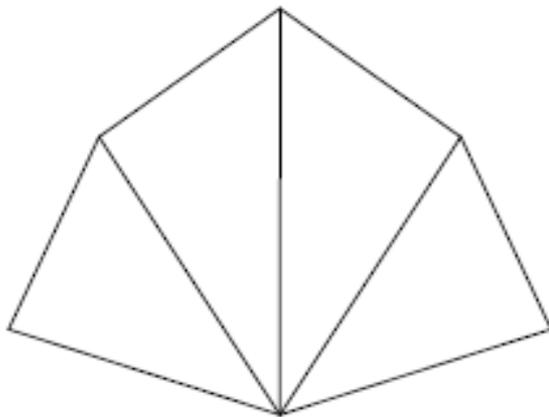


# Il calcolo integrale: intro

Come si evince dalla precedente figura  $S$  rappresenta la regione compresa tra il grafico della funzione  $f$  e le rette verticali  $x = a$  e  $x = b$ :

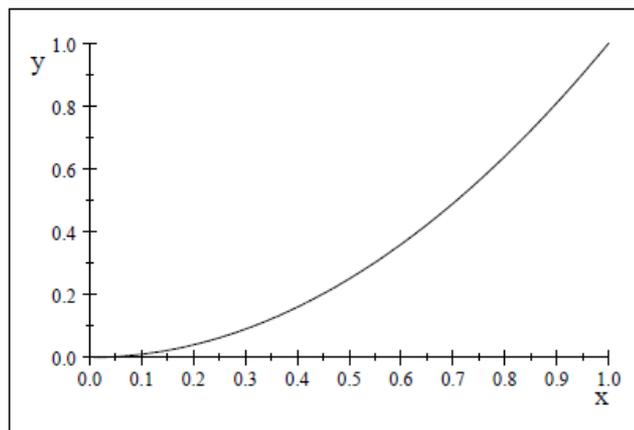
Nel tentativo di calcolare l'area della regione  $S$ , ci domandiamo: qual è il significato della parola area? La domanda è semplice per regioni con i lati rettilinei; ad esempio per un rettangolo l'area è semplicemente il prodotto della base per l'altezza. Per un poligono, l'area si trova suddividendolo in triangoli, come in figura, e sommando l'area dei triangoli così ottenuti.

Invece, non è affatto semplice trovare l'area di regioni delimitate da contorni curvilinei.



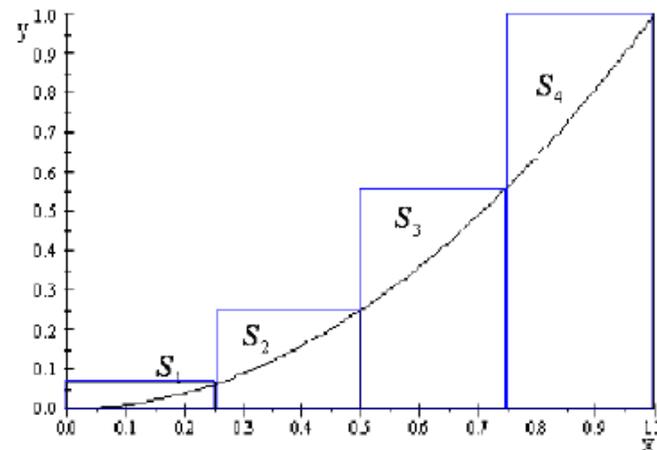
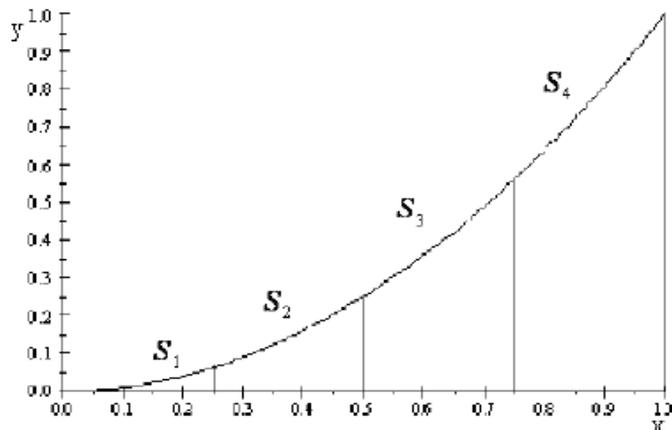
# Il calcolo integrale: intro

Illustriamo l'idea nell'esempio seguente: sia  $y = x^2$  la parabola rappresentata in Figura; supponiamo di voler calcolare l'area della regione sottostante la curva delimitata dalle rette  $x = 0$  e  $x = 1$ , utilizzando dei rettangoli.



Si noti subito che essendo  $S$  la regione sottostante il grafico e delimitata dalle rette  $x = 0$  e  $x = 1$ , ammetterà area compresa tra 0 e 1; a tale risultato si poteva anche giungere immaginando di racchiudere  $S$  in un quadrato di lato 1; a partire da tale riflessione, cerchiamo una stima migliore. Supponiamo di dividere  $S$  in quattro strisce  $S_1$ ;  $S_2$ ;  $S_3$ ; ed  $S_4$  disegnando le rette verticali  $x = 1/4$ ;  $x = 1/2$ ; e  $x = 3/4$  come in Figura

# Il calcolo integrale: intro



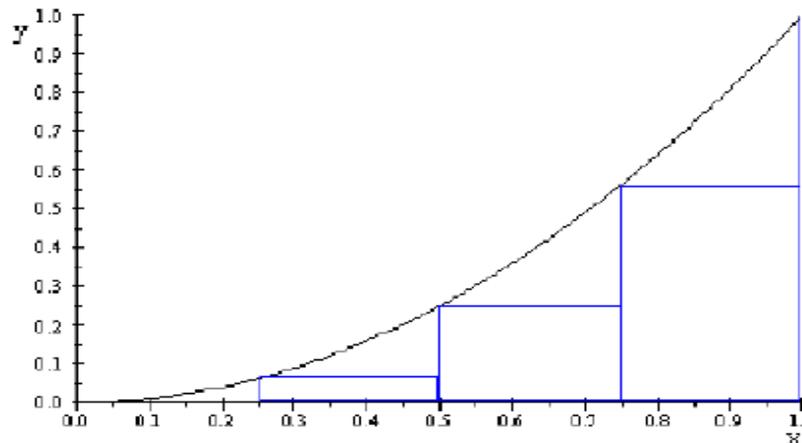
Possiamo approssimare ogni striscia con un rettangolo avente la stessa base della striscia e altezza pari al lato destro della striscia, così come mostrato in Figura.

In altre parole, le altezze di questi rettangoli sono i valori della funzione  $f(x) = x^2$  nell'estremo destro dei sotto intervalli  $[0; 1/4]$ ;  $[1/4; 1/2]$ ;  $[1/2; 3/4]$  e  $[3/4; 1]$ :

# Il calcolo integrale: intro

Ogni rettangolo ha base  $\frac{1}{4}$  e le altezze sono  $(\frac{1}{4})^2, (\frac{1}{2})^2, (\frac{3}{2})^2$  e  $1^2$ . Se indichiamo con  $R_4$  la somma delle aree di questi rettangoli approssimati, otteniamo  $R_4=0,46875$ . Ma dalla figura è chiaro che l'area  $A$  di  $S$  è minore di  $R_4$  e dunque  $A<0,46875$ .

Se, invece di usare questo tipo di approssimazione, ne usassimo un'altra caratterizzata da rettangoli le cui altezze sono i valori di  $f$  nell'estremo sinistro dei sotto intervalli, come mostrato in figura



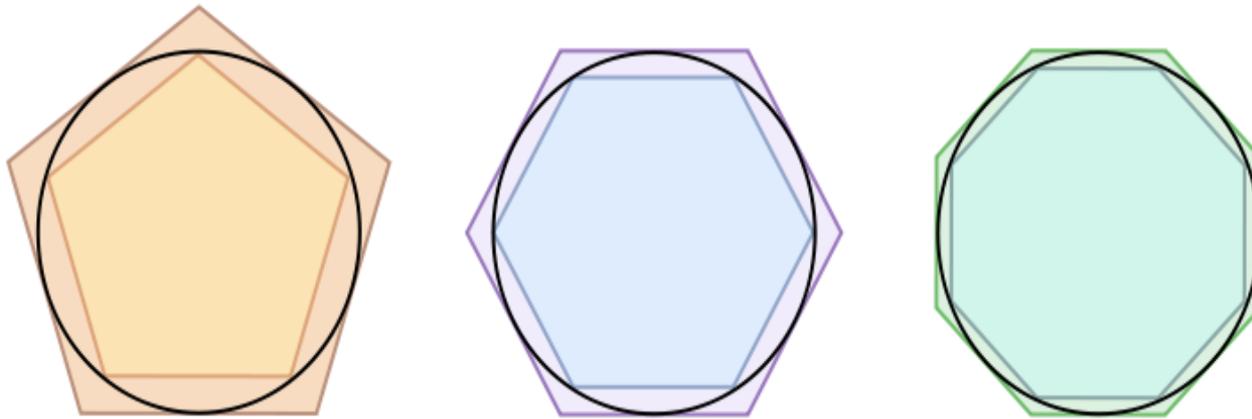
La somma delle aree di questi rettangoli approssimanti è  $L_4=0,21875$ ; inoltre, essendo l'area di  $S$  maggiore di  $L_4$  otteniamo una stima per difetto ed una per eccesso di  $A$ :

$$0,21875 < A < 0,46875.$$

Ripetendo questa procedura con un numero maggiore di strisce, si ottiene una stima sempre migliore di  $A$ .

# Il metodo di esaustione

L'idea di base del concetto di integrale era nota ad Archimede di Siracusa, vissuto tra il 287 ed il 212 a.C., ed era contenuta nel metodo da lui usato per il calcolo dell'area del cerchio o del segmento di parabola, detto metodo di esaustione.



L'area del cerchio è determinata costruendo una successione di poligoni che assomigliano sempre di più al cerchio. Ad esempio, una successione di poligoni regolari con numero crescente di lati: in figura, un pentagono, un esagono e un ottagono. A seconda che si scelgano poligoni iscritti o circoscritti nella circonferenza, l'area di questa risulterà essere approssimata inferiormente o superiormente. Entrambe le scelte portano comunque al limite all'area del cerchio.

# ∫∫∫ Introduzione storica

Nel XVII secolo alcuni matematici trovarono altri metodi per calcolare l'area sottesa al grafico di semplici funzioni, e tra di essi figurano ad esempio Fermat (1636) e Nicolaus Mercator(1668).

Nel diciassettesimo e diciottesimo secolo Newton, Leibniz, Johann Bernoulli scoprirono indipendentemente il teorema fondamentale del calcolo integrale, che ricondusse tale problema alla ricerca della primitiva di una funzione.

La definizione di integrale per le funzioni continue in tutto un intervallo, introdotta da Pietro Mengoli ed espressa con maggiore rigore da Cauchy, venne posta su base diversa da Riemann in modo da evitare il concetto di limite, e da comprendere classi più estese di funzioni. Nel 1875 Gaston Darboux mostrò che la definizione di Riemann può essere enunciata in maniera del tutto simile a quella di Cauchy, purché si intenda il concetto di limite in modo un po' più generale. Per questo motivo si parla di integrale di Cauchy-Riemann.

Il simbolo  $\int$  che rappresenta l'integrale nella notazione matematica fu introdotto da Leibniz alla fine del XVIII secolo. Il simbolo si basa sul carattere f (esse lunga), lettera che Leibniz utilizzava come iniziale della parola *summa*, in latino *somma*, poiché questi considerava l'integrale come una somma infinita di addendi infinitesimali.

# Primitive e integrazione indefinita

**Definizione:** Si dice che una funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  è dotata di primitiva, se esiste una funzione  $F$  definita in  $X$ , ivi derivabile, tale che:

$$F'(x) = f(x), \forall x \in X$$

**Proposizione:** Se  $F$  è una primitiva di  $f$ , allora,  $\forall c \in \mathbb{R}$ ,  $F + c$  è anch'essa una primitiva di  $f$

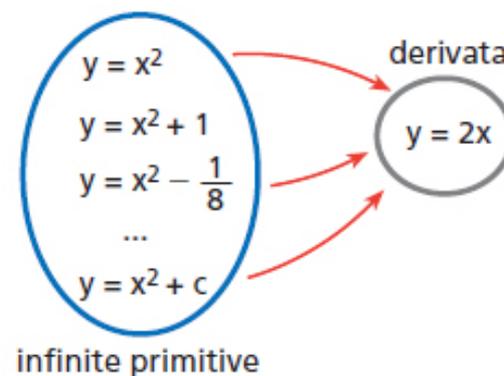
**Dimostrazione.** La dimostrazione di tale asserto è immediata se si tiene presente che una funzione costante in  $X$  ha derivata nulla in ogni punto di  $X$ .

**Proposizione:** Se  $f$  è definita in un intervallo  $X$ , allora due primitive di  $f$  differiscono per una costante.

**Dimostrazione:** Se  $F$  e  $G$ , infatti, sono due primitive di  $f$ , la funzione  $F - G$  è derivabile in  $X$  e risulta:

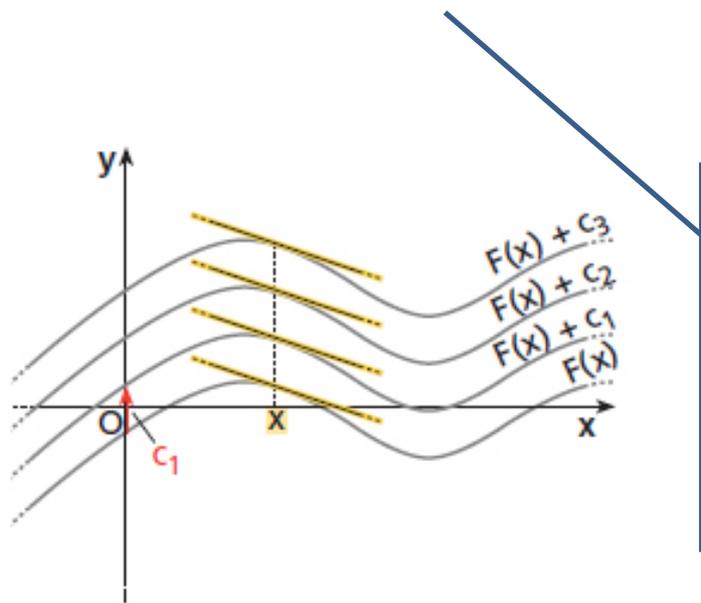
$$(F - G)'(x) = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in X$$

pertanto  $F - G$  è costante in  $X$  e la tesi è dimostrata.



**Definizione.** Sia  $I$  un intervallo di  $\mathbb{R}$  ed  $f$  una funzione definita nell'intervallo  $I$  di  $\mathbb{R}$ ; l'insieme di tutte le primitive della  $f$  in  $I$  si chiama integrale indefinito della  $f$  e si denota con

$$\int f(x)dx$$



**Osservazione.** L'operazione di integrazione indefinita può considerarsi come inversa dell'operazione di derivazione. Non bisogna, tuttavia, dimenticare che l'operazione di integrazione indefinita, quando è possibile, associa ad una funzione una classe di funzioni; mentre l'operazione di derivazione ad ogni funzione associa una sola funzione.

**Definizione.**

L'integrale indefinito è l'operatore inverso della derivata perché associa alla funzione integranda  $f(x)$  l'insieme di tutte e sole le funzioni primitive di  $f(x)$  stessa.

## Proposizione: L'integrale indefinito è un operatore lineare

Infatti gode delle seguenti due proprietà:

**Proprietà di linearità:** una costante moltiplicativa si può trasportare dentro o fuori del segno di integrale indefinito

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

**Proprietà di additività:** l'integrale di una somma algebrica di due o più funzioni è uguale alla somma algebrica degli integrali delle singole funzioni

$$\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$$

Combinando insieme le due proprietà si ha:

$$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)] dx = k_1 \int f_1(x) dx + k_2 \int f_2(x) dx$$

# Nozione di integrale per una funzione reale continua

Si consideri la partizione  $P$  di un intervallo chiuso  $[a;b]$  in  $n$  sottointervalli  $[x_{k-1};x_k]$  di uguale ampiezza, e si consideri una funzione continua  $f(x)$  definita su  $[a;b]$ .

Per ogni intervallo della partizione si possono definire due punti:

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \text{ e } M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

che corrispondono all'ordinata minore  $m_k$  nell'intervallo e all'ordinata maggiore  $M_k$  dell'intervallo. Si definisce *somma integrale inferiore* relativa alla partizione  $P$  il numero:

$$s(P) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$$

Ammettendo che  $f$  assuma valori positivi nell'intervallo, la somma integrale inferiore è la somma dei rettangoli inscritti alla regione del piano. Analogamente, si definisce *somma integrale superiore* relativa alla partizione  $P$  il numero:

$$S(P) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$$

La somma integrale superiore è quindi la somma delle aree dei rettangoli circoscritti alla regione. Si ponga:

$$m < f(x) < M, \quad \forall x \in [a, b]$$

si dimostra che per ogni coppia di partizioni P e Q di [a;b] si ha:

$$m(b - a) < s(P) < S(Q) < M(b - a)$$

Per ogni possibile partizione P di [a;b] si definiscono:

$$\delta = s(P), \quad \Sigma = S(P)$$

Dal lemma precedente si può dedurre che gli insiemi  $\delta$  e  $\Sigma$  sono separati cioè:

$s < S$

L'assioma di completezza di  $\mathbb{R}$  afferma che allora esiste almeno un numero reale  $\xi$  appartenente a  $\mathbb{R}$  tale che:

$$s \leq \xi \leq S$$

Se vi è un unico elemento di separazione  $\xi$  tra  $\delta$  e  $\Sigma$  allora si dice che  $f(x)$  è integrabile in  $[a, b]$  secondo Riemann. L'elemento  $\xi$  si indica con:

$$\xi = \int_a^b f(x) dx$$

e si chiama *integrale definito* di  $f$  in  $[a; b]$ . I numeri  $a$  e  $b$  sono detti estremi di integrazione ed  $f$  è detta funzione integranda. La variabile di integrazione è una variabile muta, e  $dx$  è detto differenziale della variabile di integrazione.

# Integrale secondo Riemann

**DEFINIZIONE:** L'integrale secondo Riemann di  $f$  nell'intervallo chiuso e limitato  $[a;b]$  è definito come il limite per  $n$  che tende ad infinito della somma integrale:

$$\sigma_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k)$$

detta *somma integrale di Riemann*. Se tale limite esiste, è finito e non dipende dalla scelta dei punti  $t_k$ , si ha:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{b-a}{n} \sum_{s=1}^n f(t_s)$$

L'esistenza di un unico elemento separatore tra  $\delta$  e  $\Sigma$  nella definizione è equivalente a richiedere che:

$$s(P) = S(P) = \int_a^b f(x) dx$$

La funzione limitata  $f$  è integrabile in  $[a;b]$  se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una partizione  $P$  di  $[a;b]$  per cui si ha:

$$|S(P) - s(P)| < \varepsilon$$

Se la funzione integrabile  $f(x)$  è positiva allora l'integrale assume il significato di area della regione, mentre se la funzione  $f$  cambia segno su  $[a;b]$  allora l'integrale rappresenta una somma di aree con segno diverso

# Teorema della media

Il teorema della media integrale è un teorema che mette in relazione le nozioni di integrale e di funzione continua per le funzioni di una variabile reale. Una funzione continua  $f$  definita su un intervallo ha come immagine ancora un intervallo: il teorema della media integrale stabilisce che la media integrale di  $f$  è un valore incluso nell'intervallo immagine.

Il concetto di media integrale è una generalizzazione dell'idea di media aritmetica. L'idea è quella di calcolare il valore medio assunto da una funzione su un intervallo  $[a,b]$  calcolando la media aritmetica dei valori che la funzione assume su un insieme finito (molto grande) di punti distribuiti *uniformemente* nell'intervallo, cioè si suddivide l'intervallo in  $N$  sottointervalli  $[x_k, x_{k+1}]$  tutti di lunghezza  $(b-a)/N$  e si calcola la media:

$$\frac{f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_N)}{N}$$

questa può essere scritta anche come

$$\frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^N \frac{b-a}{N} f(x_i)$$

Dalla definizione di integrale di Riemann segue che considerando quantità  $N$  sempre maggiori di punti, questa espressione convergerà al valore  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  che viene chiamato media integrale di  $f$ .

## Teorema

Se  $f: [a, b] \rightarrow R$  è continua e integrabile allora esiste un punto  $z$  appartenente ad  $[a, b]$  tale che

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx = f(z)$$

o equivalentemente detto

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(z)$$

Essendo  $f$  continua in  $[a, b]$ , per il teorema di Weierstrass essa è dotata di massimo  $M$  e di minimo  $m$  su  $[a, b]$ , quindi si avrà

$$m \leq f(x) \leq M$$

Dalla proprietà di monotonia dell'integrale risulta

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

Nei membri a destra e a sinistra della disuguaglianza stiamo integrando una funzione costante, quindi abbiamo

$$\int_a^b m dx = m \int_a^b dx = m(b-a)$$

Analogamente

$$\int_a^b M dx = M \int_a^b dx = M(b-a)$$

Si ottiene quindi

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

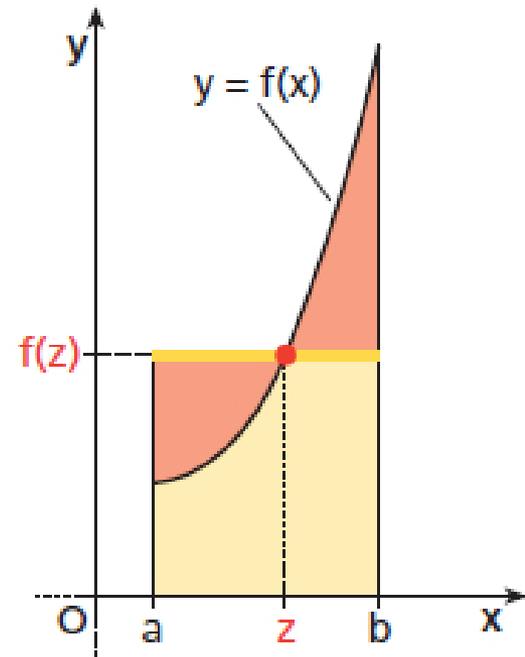
ovvero, se  $b > a$ ,

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Per il teorema dei valori intermedi,  $f$  deve assumere in  $[a, b]$  tutti i valori compresi tra  $\sup_{[a, b]} f(x) = M$  e  $\inf_{[a, b]} f(x) = m$

Quindi in particolare esisterà un punto  $z$  appartenente ad  $[a, b]$  tale che

$$f(z) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$



# Teorema fondamentale del calcolo integrale

Il **teorema fondamentale del calcolo** stabilisce un'importante connessione tra i concetti di integrale e derivata per funzioni a valori reali di variabile reale.

La prima parte del teorema è detta **primo teorema fondamentale del calcolo**, e garantisce l'esistenza della primitiva per funzioni continue. La seconda parte del teorema è detta **secondo teorema fondamentale del calcolo**, e consente di calcolare l'integrale definito di una funzione attraverso una delle sue primitive.

Una prima versione del teorema è dovuta a James Gregory, mentre Isaac Barrow ne fornì una versione più generale. Isaac Newton, studente di Barrow, e Gottfried Leibniz completarono successivamente lo sviluppo della teoria matematica in cui è ambientato il teorema

# Teorema di Torricelli-Barrow

o il teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia  $f(x)$  una funzione integranda, continua in un intervallo chiuso e limitato  $[a,b]$ , allora la funzione integrale con

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

è derivabile in  $[a,b]$  e la derivata della funzione integrale coincide con la funzione integranda; si ha cioè:

$$F'(x) = f(x)$$

## Dimostrazione

Ricordiamo che una funzione è derivabile se esiste ed è finito il limite del rapporto incrementale al tendere a 0 dell'incremento  $\Delta x$  della variabile indipendente.

Determiniamo il rapporto incrementale

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

e osserviamo che

$$F(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Si ha allora:

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x}$$

Per la proprietà additiva dell'integrale:

$$\begin{aligned} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} &= \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} \\ &= \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} \end{aligned}$$

Per il teorema della media esiste un  $\bar{x} \in [x, x+\Delta x]$  tale che

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \Delta x \cdot f(\bar{x}) = \frac{\Delta x \cdot f(\bar{x})}{\Delta x} = f(\bar{x})$$

Calcoliamo il limite del rapporto incrementale per  $\Delta x$  che tende a zero e si ha, per l'ipotesi di continuità,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\bar{x}) = f(x)$$

Da cui si può concludere che

$$F'(x) = f(x)$$

# Formula di Newton-Leibnitz

## o secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia  $f: [a, b] \rightarrow R$  una funzione che ammette una primitiva  $F$  su  $[a, b]$ . Se  $f$  è integrabile si ha:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Tale relazione è detta *formula fondamentale del calcolo integrale*.

### Dimostrazione

Per il primo teorema fondamentale, la funzione  $F(x) = \int_a^x f(t) dt, \forall x \in [a, b]$  è una primitiva di  $f$ : precisamente la primitiva nulla in  $a$ . D'altro canto, se  $\psi(x) = F(x) + c$ .

Ma, essendo  $F(a) = 0$ , si ottiene  $\psi(a) = c$  e quindi  $\psi(x) - \psi(a) = F(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Da qui l'asserto ponendo  $x = b$ .

# La nozione di integrale in alcuni concetti di fisica

## *Calcolo della massa di un corpo rettilineo sottile con densità lineare variabile*

Si consideri un corpo rettilineo  $C$  tanto sottile rispetto alla lunghezza che esso possa essere schematizzato in un intervallo  $[a,b]$  e la distribuzione della massa di  $C$  possa essere supposta lineare, ossia dipendente solo dalla lunghezza. In tale situazione, la distribuzione della massa di  $C$  è nota se in ogni tratto di  $C$ , schematizzabile in un intervallo  $I = [a', b'] \subseteq [a, b]$  si conosce la massa.

Possiamo definire una funzione reale  $\mu$  nell'insieme degli intervalli chiusi e limitati inclusi in  $[a,b]$  che soddisfi le seguenti proprietà:

1. Se  $I$  e  $J$  sono due intervalli aventi in comune un estremo, allora  $\mu(I) + \mu(J) = \mu(I \cup J)$  (proprietà di finita additività della massa)
2.  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \mu(I) < \varepsilon$  (proprietà di continuità della massa)

### **Definizione**

Il **corpo**  $C$  si dice **omogeneo** se, per ogni tratto  $I$  di  $C$  è costante il rapporto tra la massa di  $I$  e la lunghezza del tratto  $I$

$$\frac{\mu(I)}{m(I)}$$

Densità lineare

Il rapporto

$$\frac{\mu(I)}{m(I)}$$

Fornisce la massa di un qualunque tratto del corpo C di lunghezza unitaria.

Se il corpo C è omogeneo, nota la densità lineare  $\rho$ , la massa di un qualunque suo tratto I è il prodotto tra  $\rho$  e la lunghezza di I.

In particolare

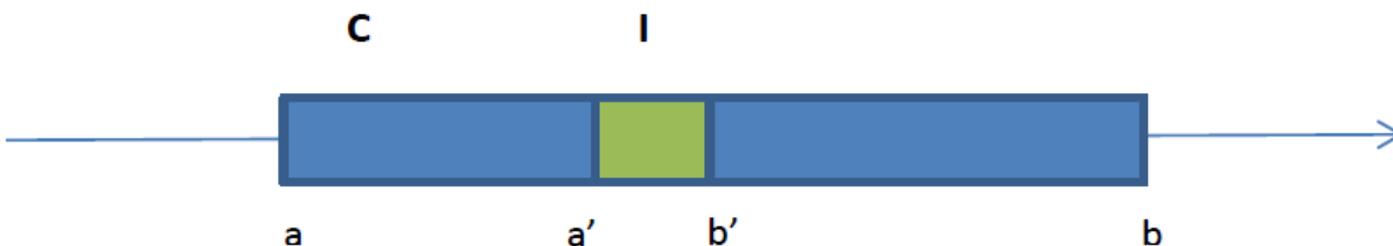
$$\mu(C) = \rho(b - a)$$

Se il corpo C non è omogeneo, al variare del tratto I di C varia il rapporto  $\frac{\mu(I)}{m(I)}$

Fissato I, tale rapporto, che esprime la densità che il tratto I avrebbe se fosse omogeneo e avesse come massa  $\mu(I)$ , si chiama densità media del tratto I.

Spesso conviene riferirsi alla densità di un tratto infinitesimo. Per far ciò basta considerare il limite per  $m(I)$  che tende a 0, ottenendo così la densità lineare di C nel punto x.

$$\rho(x) = \lim_{m(I) \rightarrow 0} \frac{\mu(I)}{m(I)}$$



Nei casi migliori, la densità lineare di  $C$  è definita in tutto  $[a,b]$  ed è ivi una funzione continua.

Può anche accadere che essa non sia definita in qualche punto  $x \in [a,b]$ : per esempio quando il corpo presenta una saldatura in  $x$  e le parti a sinistra e a destra di  $x$  presenta una saldatura in  $x$  e le parti a sinistra e a destra di  $x$  sono di materiale diverso.

Nella maggior parte dei casi concreti, la densità lineare di  $C$  è una funzione generalmente definita in  $[a,b]$ , limitata ed è continua in tutti i punti in cui è definita.

Dal punto di vista matematico la distribuzione di massa ha l'espressione:

$$\mu(I) = \int \rho(x)dx$$

### **Proposizione**

Se un corpo  $C$  ha come densità lineare la funzione  $\rho(x)$ , generalmente definita in  $[a,b]$  limitata e continua in tutti i punti in cui essa è definita, necessariamente la distribuzione di massa di  $C$  è data dall'espressione

$$\mu(I) = \int \rho(x)dx$$

# La torre Eiffel

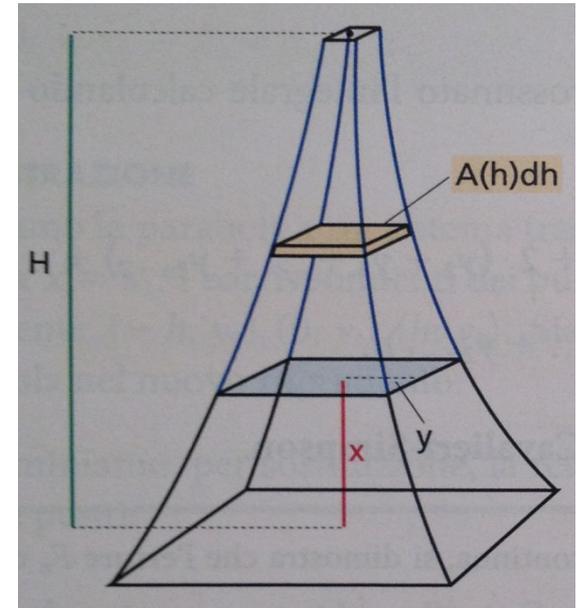
**Perché l'ingegnere Gustave Eiffel diede alla sua opera più famosa proprio quella forma?**

Nel 2004, due ricercatori statunitensi Patrick Weidman e Iosif Pinelis, hanno trovato una equazione a cui è legata l'eleganza e la perfezione dell'imponente opera architettonica.

Il monumento ha una base quadrata di 125m di lato da cui si innalzano 4 pilastri che confluiscono in un'unica colonna, via via più sottile e concava al crescere dell'altezza.

Eiffel studiò la sagoma sezione per sezione, calcolando per ciascuna il peso che la struttura doveva reggere.

Trascurando l'effetto del vento, per ogni sezione questo peso coincide con quello della porzione di edificio sovrastante la sezione stessa.



Se  $\rho$  è la densità del ferro e  $A(h)$  è l'area della sezione quadrata alla quota generica  $h$ , allora il volume infinitesimale di uno strato di altezza  $dh$  è  $A(h)dh$ .

Essendo  $g$  l'accelerazione di gravità, il peso della parte compresa tra  $x$  e l'altezza  $H$  della torre è

$$\int_x^H \rho \cdot g \cdot A(h) dh$$

Considerato il peso massimo che la struttura sottostante può reggere, vale l'equazione

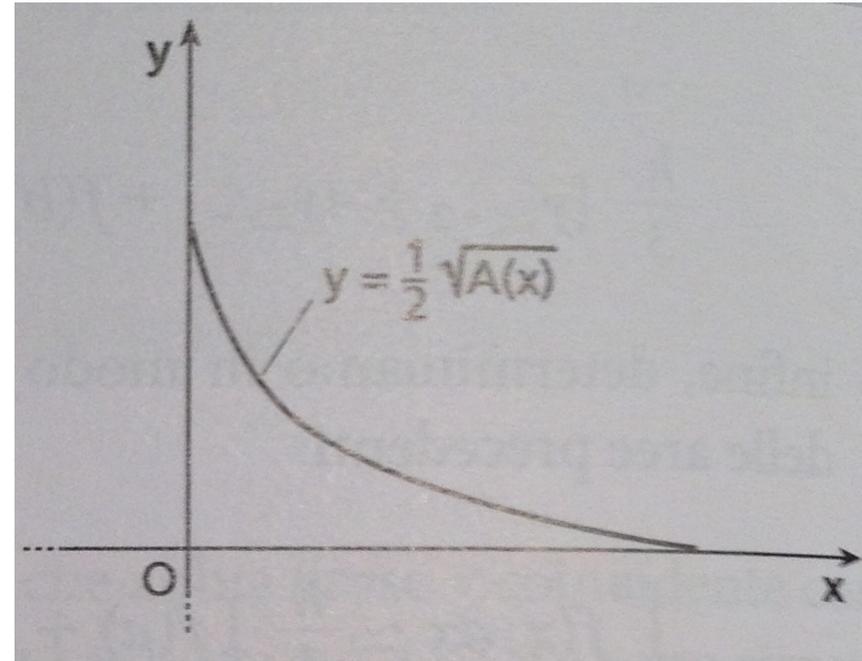
$$\int_x^H \rho \cdot g \cdot A(h) dh = P \cdot A(x)$$

dove  $P$  è la pressione massima che può essere sopportata.

Risolvendo l'equazione, si ottiene  $A(x)$  che è una funzione esponenziale.

$A(x)$  indica come varia la sezione orizzontale al variare dell'altezza e permette di ricavare il profilo della struttura, che può essere descritto dalla funzione di semilato  $y$  della sezione al variare della quota, ossia dalla funzione  $y =$

$$\frac{1}{2} \sqrt{A(x)}$$



Eppure la sagoma della torre Eiffel non è esattamente esponenziale anche se il suo profilo assomiglia a una curva esponenziale decrescente.

Questo perché Eiffel non trascurò la presenza del vento.

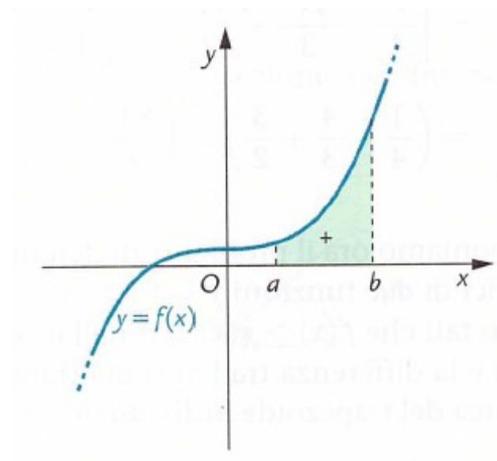
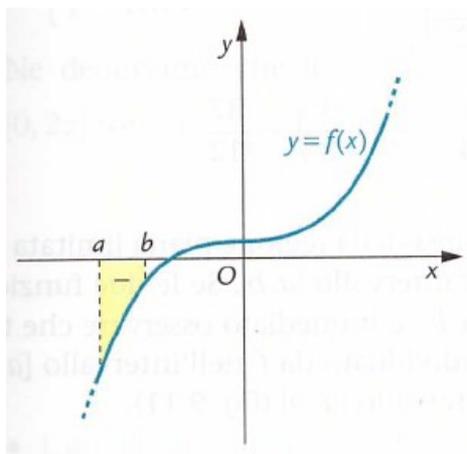
La pressione che il vento esercita sulla torre è un fattore molto importante per l'equilibrio del sistema. Infatti affinché la struttura sia in equilibrio è necessario che la pressione del vento sia controbilanciata dalla tensione tra gli elementi della costruzione.

Questo si traduce in una equazione integrale non lineare le cui soluzioni forniscono precisamente la sagoma della struttura, esponenziale a tratti con due differenti esponenti.

Uno studio pubblicato sulla rivista *Comptes rendus mecanique* ha spiegato anche perché la base della torre è così estesa: Eiffel non era proprio sicuro dei suoi calcoli e allora preferì esagerare un po' allargando la base.

# Il calcolo delle aree

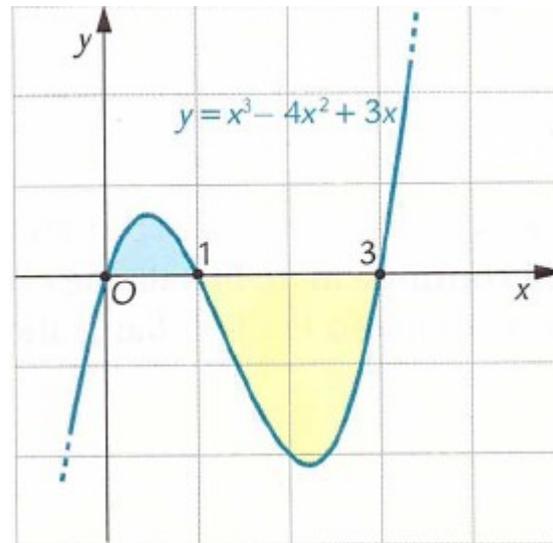
L'integrale definito  $\int_a^b f(x)dx$  rappresenta geometricamente l'area della regione di piano limitata dal grafico della funzione  $y=f(x)$  e dall'asse  $x$  nell'intervallo  $[a,b]$ . Dai due grafici si può vedere che il segno dell'area è negativo se la parte di piano si trova al di sotto dell'asse  $x$  mentre è positivo se la parte di piano è al di sopra dell'asse  $x$ .



# Esempio

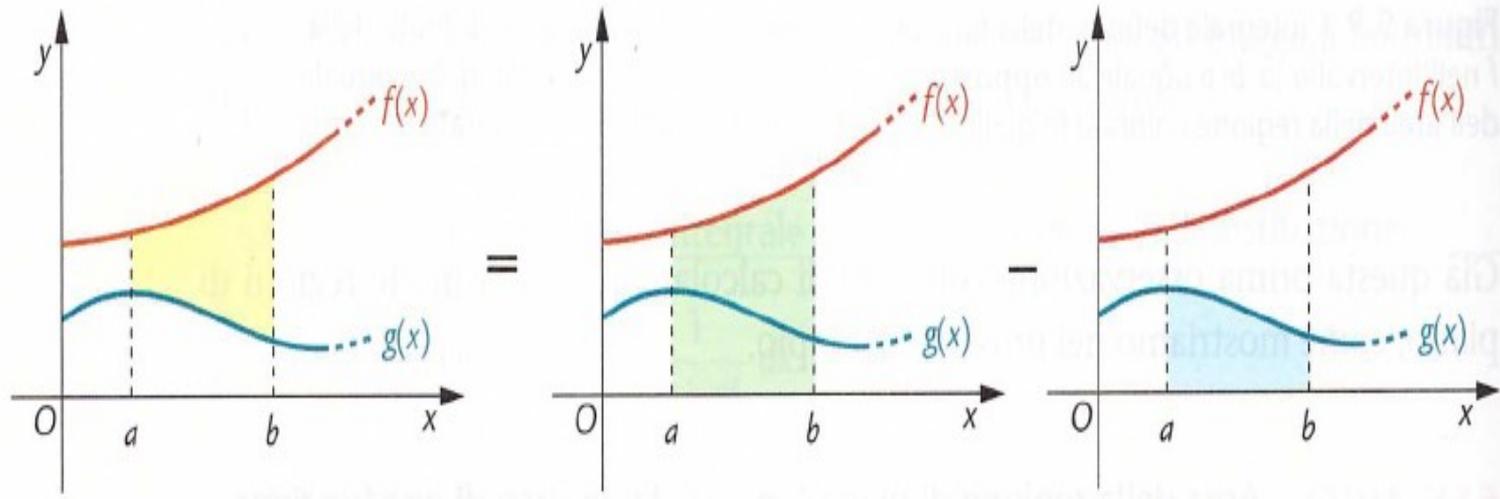
Ad esempio che vogliamo calcolare l'area della regione di piano raffigurata, compresa tra l'asse  $x$  e la curva di equazione  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$  dobbiamo considerare l'intervallo  $[0,3]$ . Questo intervallo deve essere diviso in due intervalli: nell'intervallo  $[0,1]$  la parte di piano si trova al di sopra dell'asse  $x$  e quindi ha segno positivo, mentre nell'intervallo  $[1,3]$  la parte di piano è al di sotto dell'asse  $x$  quindi assume segno negativo. Pertanto dobbiamo risolvere due integrali:

$$\int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)dx - \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)dx$$



# Area tra due curve

Ci poniamo ora il problema di determinare l'area della regione di piano limitata dai grafici di due funzioni  $y=f(x)$  e  $y=g(x)$  nell'intervallo  $[a,b]$



Come si vede dai grafici l'area si ottiene come differenza tra l'area del trapezoide individuato da  $f$  nell'intervallo  $[a,b]$  e l'area del trapezoide individuato da  $g$  nell'intervallo  $[a,b]$ . Pertanto, l'area cercata risulta essere espressa dalla formula

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

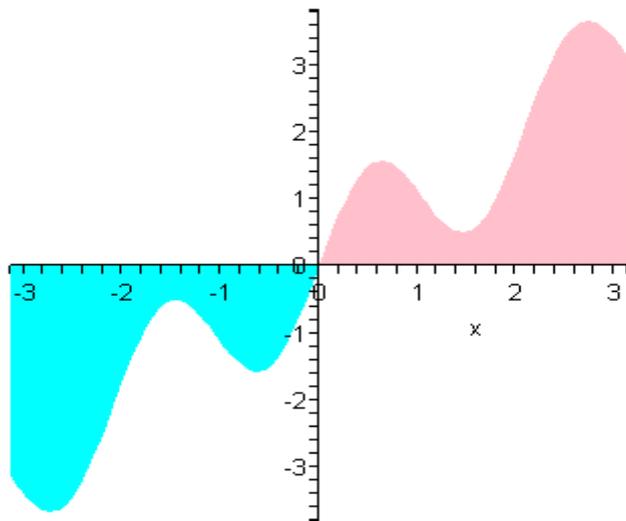
NB. Si noti che la formula vale se  $f(x)>g(x)$  altrimenti la differenza va invertita.

# Integrali delle funzioni pari e dispari

Sia  $f(x)$  una funzione dispari, ossia tale che  $f(-x)=-f(x)$  e si consideri il suo integrale in un intervallo simmetrico rispetto all'origine

$$\int_{-a}^a f(x)dx$$

Funzione Dispari: Annullamento dell' Area



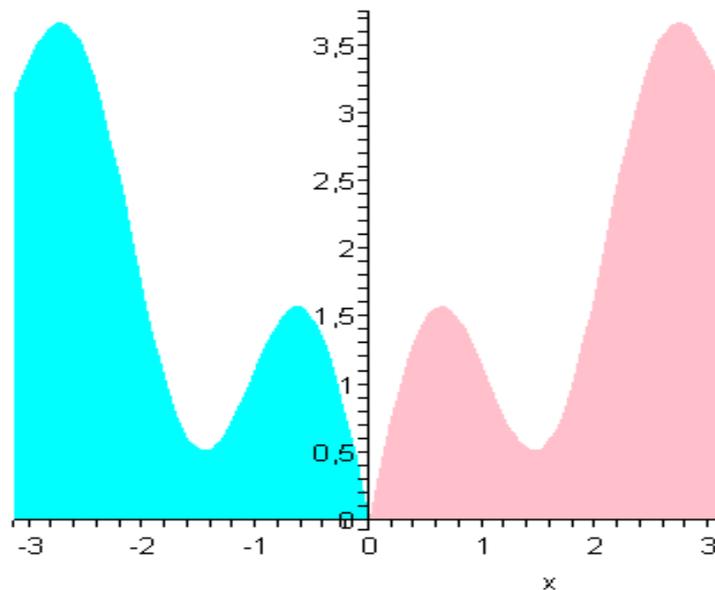
E' intuitivo e si potrebbe dimostrare che l'integrale risulta nullo: infatti ricordando il significato geometrico di integrale definito, l'integrale rappresenta la somma algebrica delle due aree (rosa e blu). Per la simmetria del grafico di  $f(x)$ , tali aree risultano equivalenti e quindi hanno, in valore assoluto, la stessa misura. Poiché una si trova al di sopra e una al di sotto dell'asse  $x$ , le loro misure avranno segni opposti e la loro somma algebrica sarà perciò zero.

Sia invece,  $y=f(x)$  una funzione pari il cui grafico, rappresentato in figura, è simmetrico rispetto all'asse  $y$ .

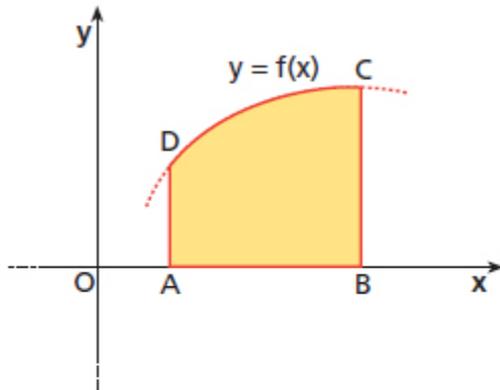
In questo caso le due aree equivalenti vanno sommate. Pertanto:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

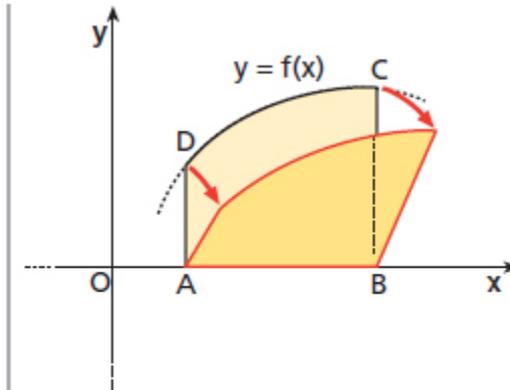
Funzione Pari: Uguaglianza delle Aree



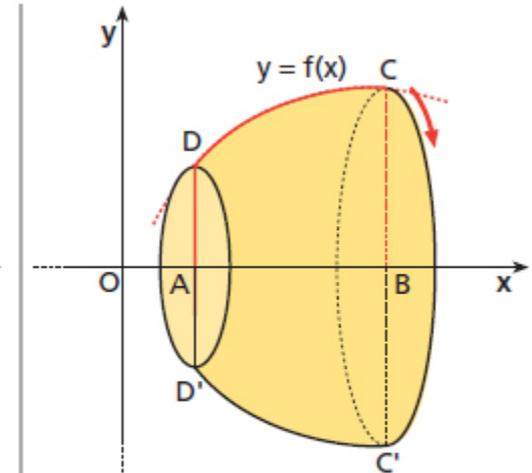
# Solidi di rotazione



a. È dato il trapezoide  $ABCD$ .



b. Ruotiamo il trapezoide attorno all'asse  $x$  (il lato  $AB$  rimane fisso).



c. Abbiamo ottenuto il solido generato dalla rotazione di  $360^\circ$  del trapezoide attorno all'asse  $x$ .

Data la funzione  $y = f(x)$  continua nell'intervallo  $[a,b]$  e non negativa e il trapezoide esteso all'intervallo  $[a,b]$ . Se facciamo ruotare il trapezoide attorno all'asse  $x$  di un giro completo otteniamo un solido di rotazione.

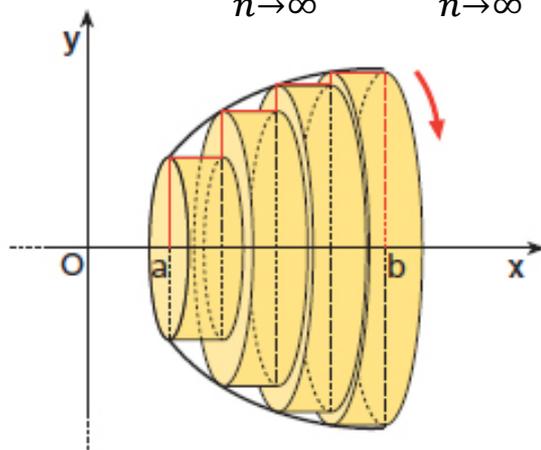
Dividiamo l'intervallo  $[a,b]$  in  $n$  parti uguali, ognuna di lunghezza  $h = \frac{b-a}{n}$ . In ogni intervallo consideriamo il minimo  $m_i$  e il massimo  $M_i$  di  $f(x)$  e disegniamo i rettangoli inscritti e circoscritti al trapezoide di altezze  $m_i$  e  $M_i$ .

Nella rotazione completa intorno all'asse delle  $x$ , ogni rettangolo descrive un cilindro circolare retto di altezza  $h$  e raggio di base  $m_i$  o  $M_i$ .

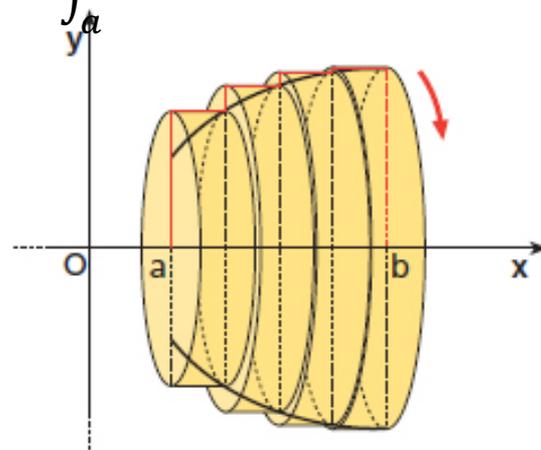
La somma dei volumi degli  $n$  cilindri con base il cerchio di raggio  $m_i$  approssima per difetto il volume del solido di rotazione iniziale e la somma dei volumi degli  $n$  cilindri con base il cerchio di raggio  $M_i$  approssima per eccesso il volume dello stato solido. Otteniamo così due valori approssimanti il volume  $v_n$  e  $V_n$ .

Quando  $n \rightarrow \infty$  i due valori sono uguali:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



a. Ogni cilindro per difetto ha per base un cerchio di raggio  $m_i$ , e per altezza  $h$ .



b. Ogni cilindro per eccesso ha per base un cerchio di raggio  $M_i$ , e per altezza  $h$ .

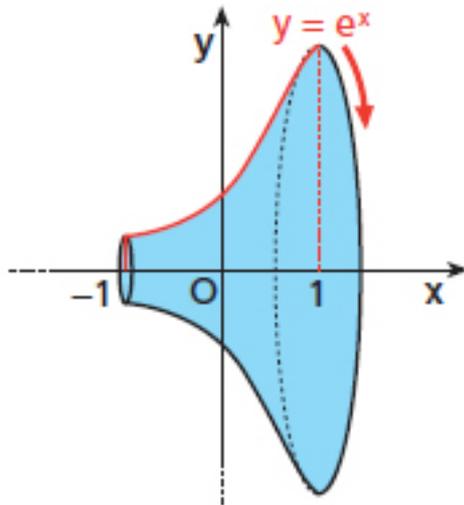
# Solidi di rotazione

## DEFINIZIONE

### Volume di un solido di rotazione

Dato il trapezoide esteso all'intervallo  $[a; b]$ , delimitato dal grafico della funzione  $y = f(x)$  (positiva o nulla), dall'asse  $x$  e dalle rette  $x = a$  e  $x = b$ , si chiama volume del solido che si ottiene ruotando il trapezoide intorno all'asse  $x$  di un giro completo il numero espresso dal seguente integrale:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx.$$



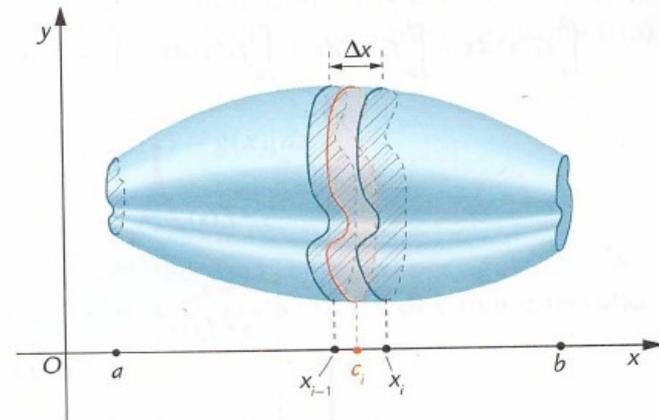
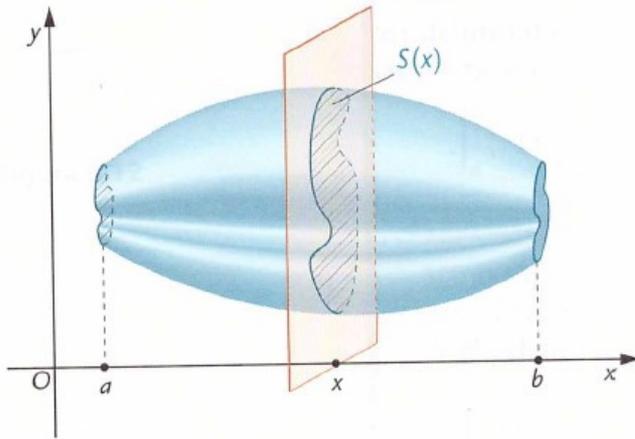
Ad esempio, il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa attorno all'asse  $x$  della regione di piano delimitata dal grafico della funzione  $y = e^x$  con  $x$  appartenente all'intervallo  $[-1, 1]$ .

$$V = \pi \int_{-1}^1 (e^x)^2 dx = \pi \left( \frac{e^2}{2} - \frac{e^{-2}}{2} \right)$$

## Definizione

Dato un solido limitato da due piani perpendicolari all'asse  $x$ , che intersecano l'asse  $x$  stesso nei punti di ascissa  $a$  e  $b$ . Sia inoltre  $S(x)$  l'area della sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare all'asse  $x$  passante per  $(x,0)$ ; allora il volume  $V$  del solido è dato dalla formula.:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



# Calcolo del volume del solido con il metodo delle sezioni

Determiniamo il volume del solido che ha come base il segmento parabolico limitato dalla parabola di equazione  $x=y^2-4$  e dall'asse  $y$ , le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse  $x$  sono semicerchi

Si determina dapprima l'area della sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare all'asse  $x$  e passante per il punto di coordinate  $(x,0)$ . Tale sezione è un semicerchio. Indichiamo con  $AB$  il suo diametro. Risolvendo rispetto a  $y$  si ricava:

$$y = \pm\sqrt{x+4}$$

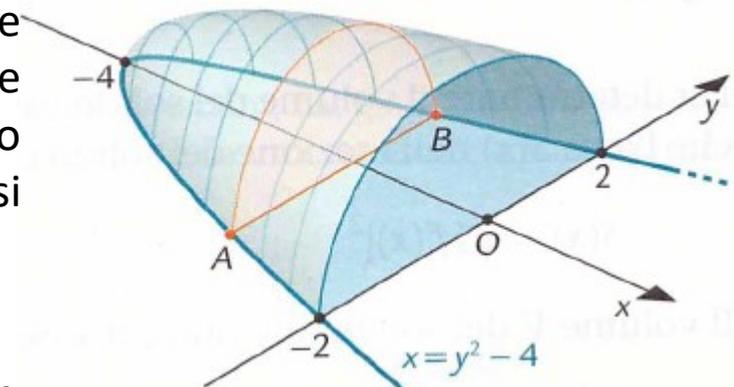
Quindi le coordinate di  $A$  e  $B$  sono  $(x, \pm\sqrt{x+4})$ .

Il raggio del semicerchio è allora

$$r = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(2\sqrt{x+4}) = \sqrt{x+4}$$

L'area del semicerchio è:

$$S = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{\pi}{2}(x+4)$$



Il volume del solido è:

$$V = \int_{-4}^0 \frac{\pi}{2}(x+4)dx = 4\pi$$