

10.2 ✎Esercizio. *Tramite le trasformazioni geometriche tracciare il grafico della funzione f a partire dal grafico della funzione elementare. Per ogni funzione discutere iniettività, suriettività e monotonia.*

$$(1) f(x) = |\sqrt{x+1} - 1|, \quad (2)' f(x) = |1 - \sqrt{1-x}|, \quad (3) f(x) = |(x+1)^2 - 1|.$$

11.1 ✎Esercizio. *Determinare dominio, immagine e grafico delle seguenti funzioni.*

$$(1) f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sign}(\sin(\pi x)) & \text{per } x \geq 0 \\ e^x & \text{per } x < 0, \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} 1 - \log x & \text{per } x \geq 1 \\ \sqrt[3]{x} & \text{per } |x| < 1 \\ x^{-1} & \text{per } x \leq -1, \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2 - 2x}\right), \quad (4) g(x) = \arctan(e^{-2x}).$$

Studiare le proprietà: iniettività, suriettività, biiettività, parità o disparità, monotonia.

11.2 ✎Esercizio. *Determinare le funzioni inverse delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$ ristrette all'intervallo $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ e tracciare i rispettivi grafici.*

11.3 ✎Esercizio. *Siano f e g due funzioni. Determinare l'immagine della funzione composta $h = f \circ g$. Determinare l'immagine dell'intervallo $I = [1, e]$ mediante $h = f \circ g$. Determinare la controimmagine dell'intervallo $J = (0, \pi/4]$ mediante $h = f \circ g$.*

$$(1) f(x) = \arctan x \quad \text{e} \quad g(x) = |\log x|, \quad (2) f(x) = x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{x}{1+x}.$$

11.4 ✎Esercizio. *Si considerino le funzioni $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 1$, $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{3}} - 1$.*

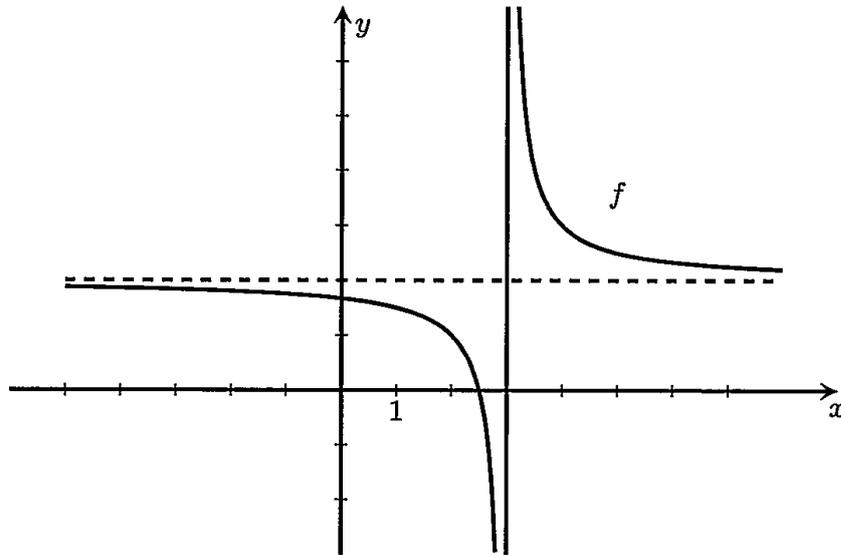
1. Verificare che f e g sono invertibili.
2. Determinare dominio, immagine ed espressione esplicita di f^{-1} e g^{-1} .
3. Disegnare i grafici di f^{-1} e g^{-1} .

11.5 ✎Esercizio. *Tramite le trasformazioni geometriche tracciare il grafico delle seguenti funzioni a partire dalla funzione elementare.*

$$(1) f(x) = |-e^{-x+1}| + e, \quad (2) f(x) = \left| \frac{x-2}{x+2} \right|, \quad (3) f(x) = \left| \frac{\pi}{4} - \arctan|x| \right|,$$

$$(4) f(x) = |1 - \ln(x-e)|, \quad (5) f(x) = |x^3 - 4|x||, \quad (6) f(x) = |\cos x| + \cos x.$$

24. Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione avente per grafico

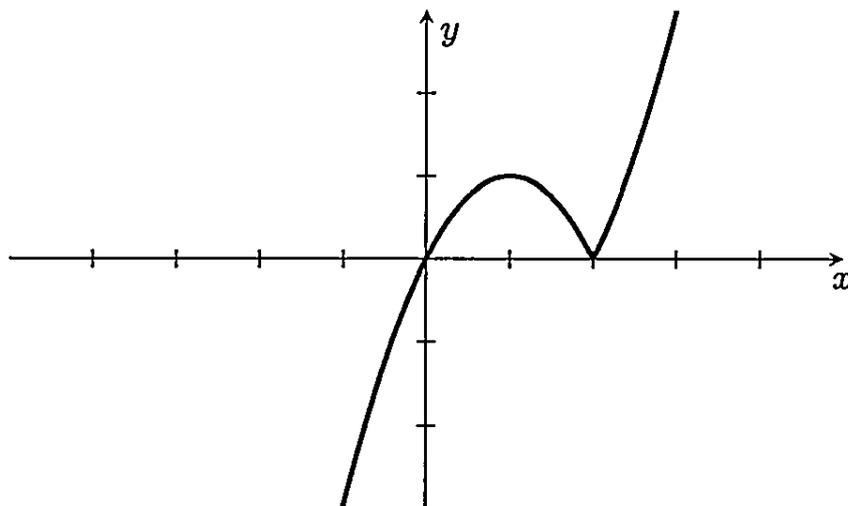


- (a) L'immagine della funzione $e^{f(x)}$ è limitata.
- (b) Il dominio della funzione $\log(f(x))$ è $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right] \cup (3, +\infty)$.
- (c) L'immagine della funzione $\arctan(f(x))$ è illimitata.
- (d) La funzione $\arcsin(f(x))$ ha dominio su tutto \mathbb{R} .
- (e) f potrebbe avere l'espressione analitica del tipo: $\frac{2x-5}{x-3}$.

28. Siano date le tre funzioni $f(x) = \tan x$, $g(x) = x^3 - 1$ e $h(x) = \sin x$, dire quali delle seguenti affermazioni è FALSA

- (a) Le funzioni $g \circ f \circ h$ e $f \circ h$ hanno immagini limitate.
- (b) Le funzioni $g \circ f \circ h$ e $f \circ h$ hanno la stessa periodicità.
- (c) Le funzioni $f \circ g \circ h$ e $g \circ h$ hanno la stessa periodicità.
- (d) Le funzioni $g \circ h$ e $h \circ f$ hanno immagini illimitate.
- (e) Le funzioni $g \circ f$ e $g \cdot f$ hanno immagini illimitate.

30. Il grafico



rappresenta la funzione

- (a) $f(x) = |-2x + 4|x$. ✗
- (b) $f(x) = x|-x + 2|$.
- (c) $f(x) = |-x^2 + 2x|$.
- (d) $f(x) = |-2x^2 + 4x|$. ✗
- (e) $f(x) = -x|x - 2|$. ✗

31. La funzione $f(x) = \sqrt{\sin(x) + \cos(x) + 1}$ ha dominio

- (a) $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right)$
- (b) $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi, \pi + 2\pi\right]$
- (c) $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right)$
- (d) $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$
- (e) $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right]$.

32. Siano le due funzioni $f(x) = \sqrt{\arcsin(x^2 - 1)}$ e $g(x) = \log(\arcsin(1 - x^2))$, dire quali delle seguenti affermazioni è FALSA

- (a) f ha dominio $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$.
- (b) l'intersezione dei due domini è vuota.
- (c) g ha dominio $(-1, 1)$.
- (d) g ha immagine $(-\infty, \log(\frac{\pi}{2})]$.
- (e) f ha immagine $[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$.

33. Siano le due funzioni $f(x) = \arcsin x$ e $g(x) = \tan x$, dire quali delle seguenti affermazioni è FALSA

- ✗ (a) La funzione $f \circ g$ è periodica.
- ✗ (b) $\text{im}(g \circ f) = (-\infty, \infty)$.
- ✓ (c) La funzione $f \circ g$ è dispari.
- ✓ (d) La funzione $g \circ f$ è periodica.
- ✓ (e) $\text{im}(f) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

34. La funzione $\max(\sin(\frac{\pi}{2}x), \cos(\frac{\pi}{2}x))$

- (a) ha periodicità 4.
- (b) ha immagine $[-1, 1]$.
- (c) si annulla solo per $x > 0$.
- (d) è pari.
- (e) è dispari.

36. Sia la funzione $f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \log(x)\right)^2 + \sqrt{x^2 - 2 \log(x)}$. Indicare l'affermazione FALSA

- (a) la funzione $f(|x|)$ ha dominio $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
- (b) la funzione $f(x+2)$ ha dominio $(-2, +\infty)$.
- (c) la funzione $f(e^x)$ ha dominio $(-\infty, +\infty)$.
- (d) la funzione $f(x^2)$ ha dominio $(-\infty, +\infty)$.
- (e) la funzione $f(-x+2)$ ha dominio $(-\infty, 2)$.

41. Sia la funzione $f(x) = \log\left(\frac{|x-2|}{\sqrt{x^2-1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}$. Allora

- (a) $D = \mathbb{R}$.
- (b) $D = \{x \in \mathbb{R} : x < -1 \vee 1 \leq x < 2 \vee x > 2\}$.
- (c) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \vee 1 \leq x < 2 \vee x > 2\}$.
- (d) $D = \{x \in \mathbb{R} : x < -1 \vee 1 \leq x < 2\}$.
- (e) $D = \{x \in \mathbb{R} : x < -1 \vee 1 < x < 2 \vee x > 2\}$.

2. Siano le funzioni $f(x) = x^3$, $g(x) = |-x^2 + 3x|$ e $h(x) = \sqrt{|x|}$. Allora

- a) $\cos(f \circ g)$ è pari.
- b) $\sin(g \circ f)$ è dispari.
- c) $\cos(h \circ g)$ è pari.
- d) $\sin(h \circ f)$ è pari.
- e) $\sin(g \circ h)$ è dispari.

49. $x = \pi/2$ è una soluzione di quale delle seguenti equazioni?

- (a) $\sin(x) + e^{\log(x^2+2x)} = e^{\cos(x)} + (x+1)^2 + 1.$
- (b) $\sin(x) + e^{\log(x^2+2x)} = e^{\cos(x)} + (x+1)^2 - 1.$
- (c) $\sin(x) + e^{\log(x^2+2x)} = e^{\cos(x)} + (x+1)^2.$
- (d) $\cos(x) + e^{\log(x^2+2x)} = e^{\cos(x)} + (x+1)^2.$
- (e) $\sin(x) + e^{\log(x^2+2x)} = e^{\sin(x)} + (x+1)^2 - 1.$

50. Quale delle seguenti affermazioni è FALSA?

- (a) Le funzioni $\sin(2x)$ e $\sin x \cdot \cos x$ hanno la stessa periodicità.
- (b) La funzione $\sin(x^{-3})$ ha immagine limitata.
- (c) La funzione $\sin x + x$ ha immagine illimitata.
- (d) La funzione $\sin^2 x - |x|$ è negativa.
- (e) $\sin x \leq x$ per $-\pi < x < 0$.

51. La funzione $f(x) = y = 2 \arcsin(\sqrt{1-x^2})$

- (a) è definita nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.
- (b) ha immagine $[0, 1]$.
- (c) ha immagine $[0, \pi]$.
- (d) ha immagine $[-\pi, \pi]$.
- (e) è definita nell'intervallo $[-1, 1]$.