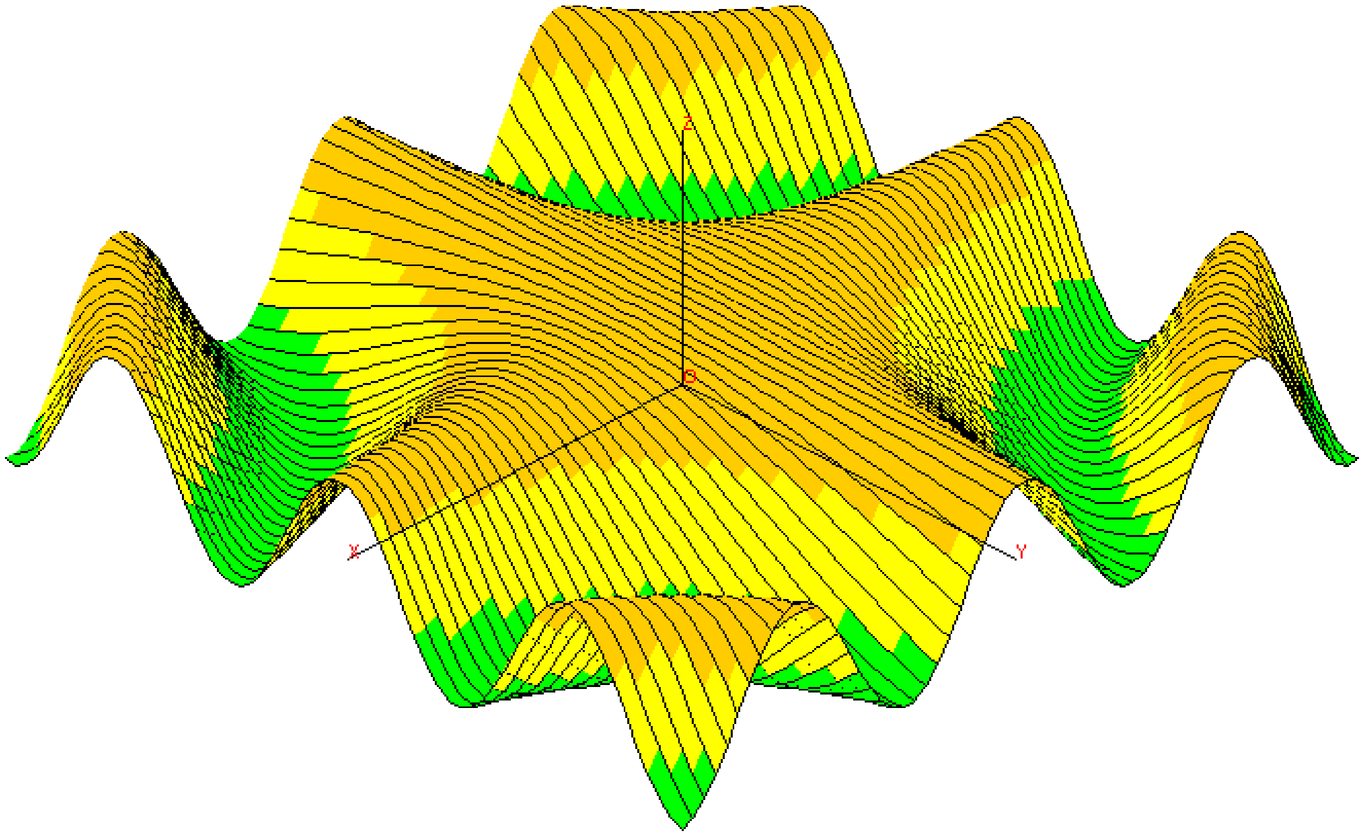
FUNZIONI DI DUE O PIÙ VARIABILI



Prof. Roberto Capone
Corso di Matematica II
A.A. 2019/20
Corso di Studi in Ingegneria Meccanica/Gestionale

Limiti per funzioni in due variabili

DEFINIZIONE

Limite finito per P tendente a P_0

Data una funzione $z = f(x; y)$, di dominio D, e un punto $P_0(x_0; y_0)$ di accumulazione per D,

si dice che la funzione ammette limite finito l per $P(x;y)$ tendente a $P_0(x_0;y_0)$ e si scrive

$$\lim_{P \to P_0} f(x, y) = l$$

oppure

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$$

se, fissato arbitrariamente un numero positivo $\varepsilon > 0$, si può determinare un intorno circolare di P_0, di raggio δ dipendente da ε, per ogni punto del quale, escluso P_0, sia

$$|f(x;y) - l| < \varepsilon$$

ESEMPIO

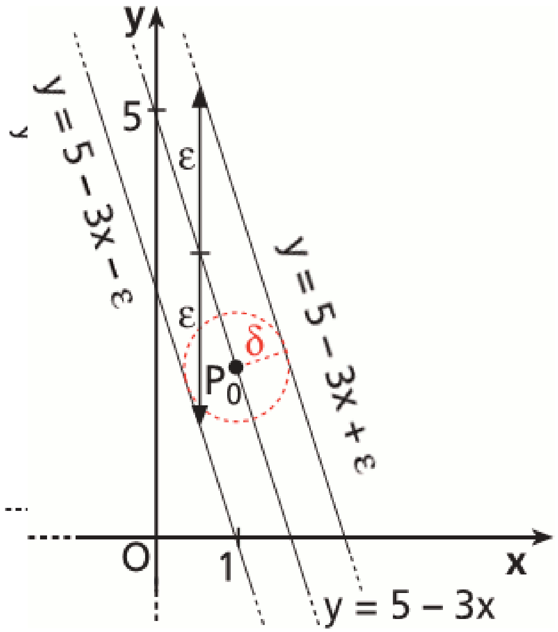
Verifichiamo che:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} y + 3x + 5 = 5$$

Cerchiamo, per ogni e , un intorno circolare di (1;2} in cui $|\,3x + y\,| < \varepsilon$.

Ossia: $5 - \varepsilon < 3x + y < 5 + \varepsilon$,

$$5 - 3x - \varepsilon < y < 5 - 3x + \varepsilon .$$



La disequazione rappresenta lo spazio compreso tra le due rette esterne,

che comprende un intorno circolare di (1;2).

Limiti per funzioni in due variabili

ESEMPIO

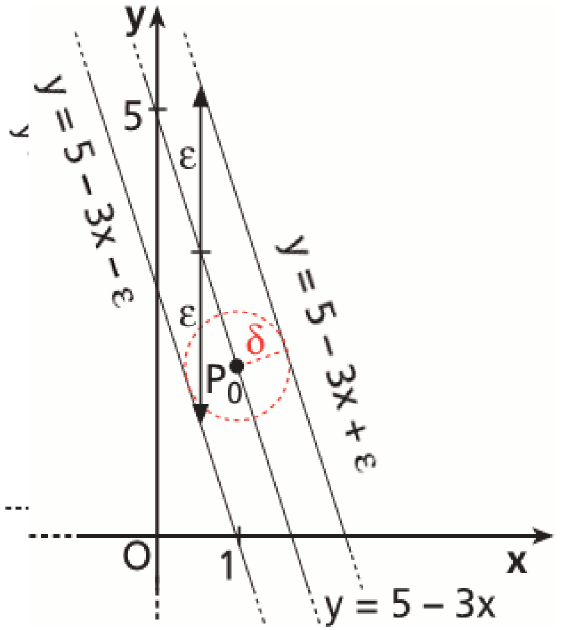
Verifichiamo che:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} y + 3x + 5 = 5$$

Cerchiamo, per ogni e , un intorno circolare di (1;2) in cui $| 3x + y | < \varepsilon$.

Ossia: $5 - \varepsilon < 3x + y < 5 + \varepsilon$,

$$5 - 3x - \varepsilon < y < 5 - 3x + \varepsilon .$$



La disequazione rappresenta lo spazio compreso tra le due rette esterne,

che comprende un intorno circolare di (1;2).

NOTA PRATICA

Se si vuole verificare che un dato numero l è o no il limite di una funzione f(x,y) al tendere di P a P_0 si procede nel seguente modo:

Si scrive la disequazione

$$|f(x,y) - l| < \varepsilon$$

Se, fra le soluzioni della disequazione, sono compresi tutti I punti di D contenuti in un conveniente intorno circolare di centro (x_0, y_0) escluso al più (x_0, y_0), allora, in base alla definizione di limite, si può asserire che l è proprio il limite della funzione

ESERCIZIO GUIDA

Verifichiamo, applicando la definizione:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} \frac{x^3 + xy^2}{x} = 2.$$

Raccogliamo x a fattor comune e dividiamo per $x \neq 0$:

$$\frac{x^3 + xy^2}{x} = \frac{\cancel{x}(x^2 + y^2)}{\cancel{x}} = x^2 + y^2.$$

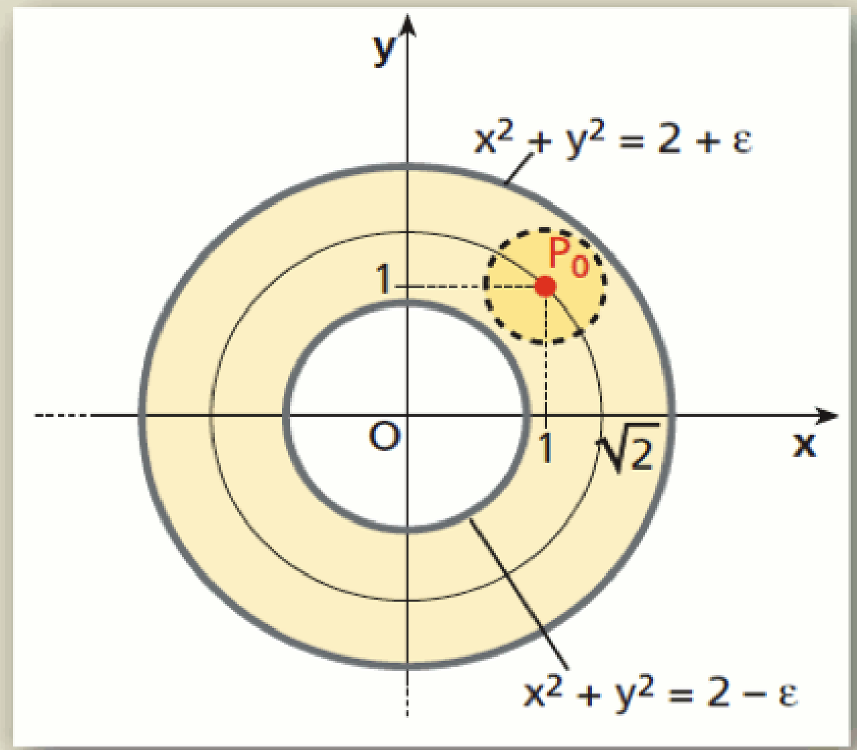
Dobbiamo mostrare che esiste un intorno circolare di $P_0(1; 1)$ tale che:

$$\left| x^2 + y^2 - 2 \right| < \varepsilon.$$

Sviluppiamo i calcoli:

$$\left| x^2 + y^2 - 2 \right| < \varepsilon \rightarrow -\varepsilon < x^2 + y^2 - 2 < \varepsilon \rightarrow$$
$$\rightarrow 2 - \varepsilon < x^2 + y^2 < 2 + \varepsilon.$$

La doppia disuguaglianza è verificata in tutta la parte di piano compresa nella corona circolare delimitata dalle circonferenze $x^2 + y^2 = 2 - \varepsilon$ e $x^2 + y^2 = 2 + \varepsilon$, e quindi in qualsiasi intorno circolare di P_0 di raggio minore o uguale alla distanza di P_0 da ciascuna circonferenza (figura *b*).



Limiti per funzioni in due variabili

CONTROESEMPIO

Verifichiamo che non esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

La funzione è definita in tutti i punti del piano esclusa l'origine. Si osservi, inoltre, che, essendo

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq l$$

Basta far vedere che non può mai verificarsi che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = l$$

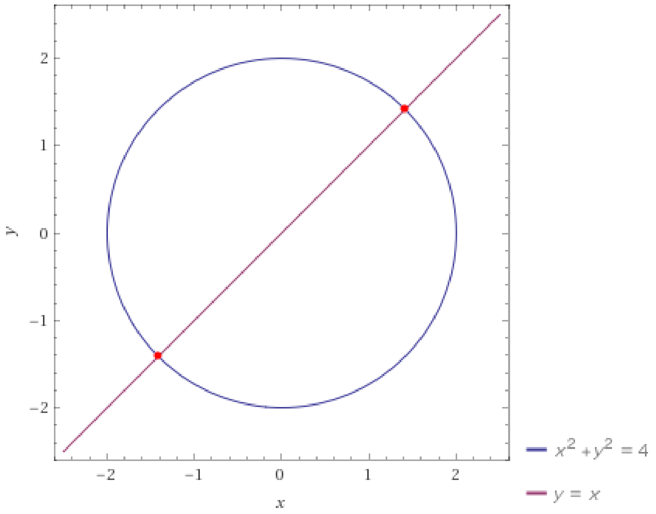
Cioè:

$$\left|\frac{x^2}{x^2+y^2} - l\right| < \varepsilon$$

Ossia il sistema

$$l - \varepsilon < \frac{x^2}{x^2+y^2} < l + \varepsilon$$

Non può essere soddisfatto da tutti i punti, diversi dall'origine, di un intorno circolare dell'origine. Infatti, in un intorno qualsiasi di (0,0) è contenuto un segmento dell'asse y e un segmento della retta y=x.



Nei punti del primo segmento, diversi dall'origine la funzione vale sempre 0 e perciò in tali punti dovrebbe essere

$$l - \varepsilon < 0$$

Mentre nei punti del secondo segmento si avrebbe

$$\frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

e dovrebbe risultare

$$\frac{1}{2} < l + \varepsilon$$

Sommando membro a membro dovrebbe venire

$$\varepsilon > \frac{1}{4}$$

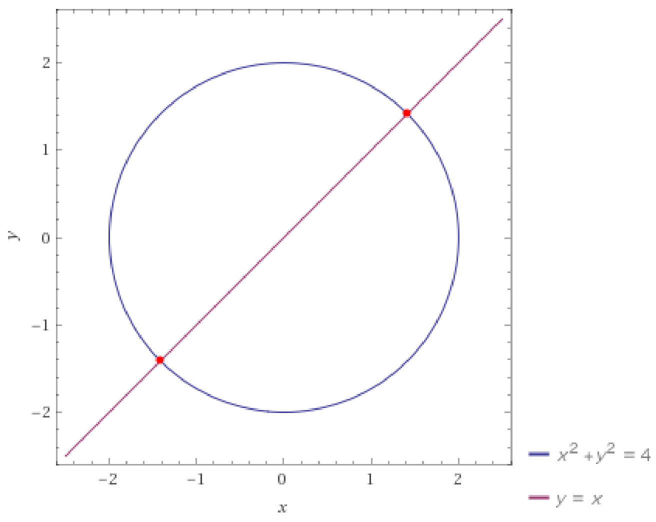
e quindi la disequazione iniziale non è verificata per ogni ε

Limiti per funzioni in due variabili

CONTROESEMPIO (altro metodo più immediato)

Verifichiamo che non esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$



Facciamo tendere il punto (x,y) all'origine lungo la retta y=mx essendo m un numero qualsiasi.
Sui punti di tale retta, diversi dall'origine, il valore della funzione considerata vale costantemente:

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{1+m^2}$$

E quindi il suo limite per x che tende a zero vale proprio questo numero.
Attribuendo valori di m diversi, si hanno limiti diversi e perciò la funzione, secondo la definizione data, non ammette limite nel punto (0,0)

Limiti per funzioni in due variabili

DEFINIZIONE

Limite infinito per P tendente a P_0

Data una funzione $z = f(x; y)$, di dominio D, e un punto $P_0(x_0; y_0)$ di accumulazione per D,

si dice che la funzione ammette limite infinito per $P(x; y)$ tendente a $P_0(x_0; y_0)$ e si scrive

$$\lim_{P \to P_0} f(x;y) = \infty$$ oppure

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = \infty$$

se, fissato arbitrariamente un numero positivo M, si può determinare un intorno circolare di P_0, di raggio d dipendente da M, per ogni punto del quale, escluso P_0, sia $|f(x; y)| > M$.

DEFINIZIONE

Limite finito per P tendente a *infinito*

Data una funzione $z = f(x; y)$, di dominio D illimitato,

si dice che la funzione ammette limite finito l per $P(x; y)$ tendente a e si scrive

$$\lim_{P \to \infty} f(x;y) = l \qquad \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} f(x;y) = l$$

se, fissato arbitrariamente un numero positivo e , si può determinare un intorno circolare di P_0, di raggio d dipendente da e, tale che per tutti i punti di D *esterni* ad esso risulti

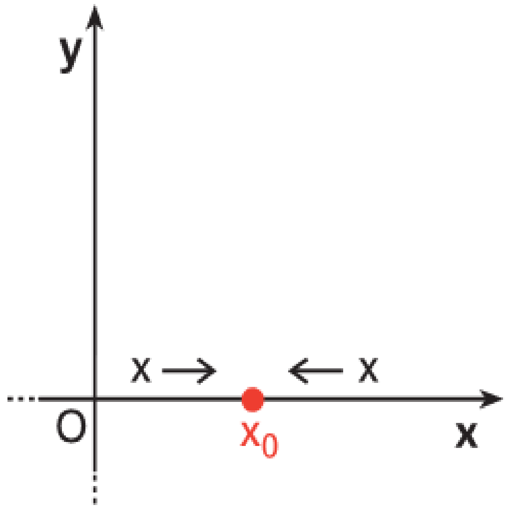
.

$$|f(x;y) - l| < \varepsilon$$

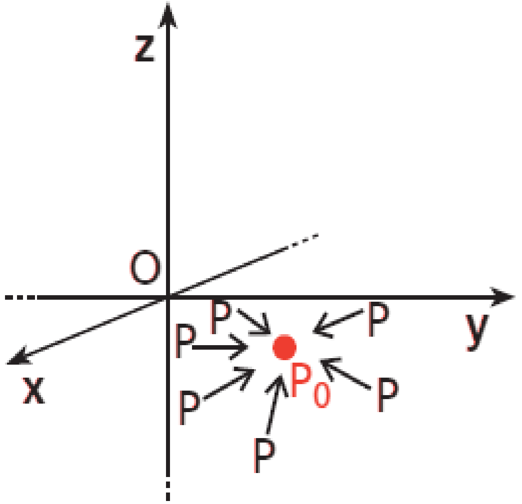
Limiti per funzioni in due variabili

Limite destro e limite sinistro?

Nell'asse reale, un punto x_0 divide i
propri intorni in due parti. Si possono
definire i limiti
destro e sinistro di
una funzione
intorno a x_0 .



Nel piano, il punto $P_0(x_0;\ y_0)$ non
divide l'intorno.
I limiti destro e
sinistro non
hanno senso.



DEFINIZIONE

Funzione continua

Una funzione $z = f\ (x;\ y)$ definita in un insieme D si dice continua in un punto $P_0(x_0;\ y_0)$, appartenente a D e di accumulazione per D stesso,

se esiste finito il $\lim_{P \to P_0} f(x, y)$ e se tale limite è uguale al valore assunto dalla funzione in P_0.

Scriviamo: .
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0)$$

Limiti per funzioni in due variabili

Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Tale funzione è definita nell'aperto A costituito da R^2 privato dell'origine, cioè $A = R^2 - \{(0,0)\}$.
Verifichiamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Infatti, dalle disuguaglianze:

$$0 \le \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

cioè, $\forall \varepsilon > 0$:

$$0 \le f(x,y) < \varepsilon$$

$$\forall (x,y) \ne (0,0) | \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$$

Continuità per funzioni in due variabili

Definizione

Consideriamo la funzione $f(x, y)$ reale di due variabili reali definita in un insieme piano D e sia $P_0(x_0, y_0)$ un punto di accumulazione di D a appartenente a D.

$f(x, y)$si dice continua nel punto $P_0(x_0, y_0)$ se

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$$

Ovvero se $\forall \varepsilon > 0, \exists I_{P_0} | \forall P \in I \cap D$ si ha che

$$|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$$

Definizione

Se $P_0(x_0, y_0)$ è un punto isolato di D si dice ancora che la funzione $f(x, y)$ è continua in $P_0(x_0, y_0)$

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$$

Quando questa relazione non è verificata la funzione si dice discontinua.

Definizione

La funzione $f(x, y)$ reale di due variabili reali si dice continua in un dominio piano D se è continua in ogni punto di questo insieme.

Continuità per funzioni in due variabili

Teorema 1
Se due funzioni sono continue in un punto $P_0(x_0, y_0)$, sono continue in $P_0(x_0, y_0)$ la loro somma, la loro differenza, il loro prodotto, il loro quoziente, ammesso, in quest'ultimo caso che la funzione al denominatore non si annullo in $P_0(x_0, y_0)$

Teorema 2
Se la funzione $f(x, y)$, definita nel dominio piano D e continua in $P_0(x_0, y_0)$ è positiva (risp. negativa) in tale punto, allora esiste un intorno circolare I di P_0 tale che la $f(x, y)$ è ancora positiva (risp. negativa)

Teorema 3
Il modulo della $f(x, y)$ continua in un punto è continuo in quel punto.

Continuità per funzioni in due variabili

OSSERVAZIONE
Se la funzione $f(x,y)$, definita nel dominio piano D e continua in $P_0(x_0, y_0)$ rispetto al complesso delle due variabili, cioè continua secondo la definizione data, essa è anche continua separatamente rispetto a ciascuna delle variabili x e y.
NON vale il teorema inverso

Una $f(x,y)$ può essere continua rispetto a ciascuna delle due variabili senza essere continua nel complesso delle due variabili.

CONTROESEMPIO
Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & per \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & per\ x = y = 0 \end{cases}$$

Questa funzione è continua sia rispetto ad x che rispetto ad y nel punto (0,0).

VEDI TUTORIAL

Continuità per funzioni in due variabili

Funzioni composte

Si la funzione $f(x, y)$, definita nel dominio piano D e siano $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ due funzioni della variabile t definite in un intervallo [a,b] e supponiamo che il punto $[\varphi(t), \psi(t)]$ appartenga al dominio D.

Allora ha senso considerare la funzione

$$F(t) = f[\varphi(t), \psi(t)]$$

Questa funzione F(t) si chiama funzione composta mediante le funzioni $f(x, y), \varphi(t), \psi(t)$

Teorema

Se le funzioni $\varphi(t), \psi(t)$ sono continue nel punto t_0 e la funzione $f(x, y)$ è continua in $P_0[x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi(t_0)]$ allora la funzione composta

$$F(t) = f[\varphi(t), \psi(t)]$$

è continua nel punto t_0

Dimostrazione

Per la continuità di $f(x, y), \forall \varepsilon > 0, \exists I_{P_0} | \forall P \in I \cap D$ si ha che

$$|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$$

Per la supposta continuità di $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ è possibile determinare un intorno K di t_0 contenuto in [a,b] tale che

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \delta, \qquad |\psi(t) - \psi(t_0)| < \delta$$

Essendo $x_0 = \varphi(t_0)\ e\ y_0 = \psi(t_0)$:

$$|\varphi(t) - x_0| < \delta, \qquad |\psi(t) - y_0| < \delta$$

Da cui

$$|f[\varphi(t), \psi(t)] - f(P_0)| < \varepsilon$$
$$|F(t) - F(t_0)| < \varepsilon$$

il che prova la tesi, cioè che $\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$

Alcuni teoremi sui limiti

Teorema di Weierstrass
Sia C un insieme chiuso e limitato di R^2 e sia $f(x,y)$ una funzione continua definita su C. Allora f assume massimo e minimo (assoluti) su C cioè esistono due punti (x_1,y_1) e (x_2,y_2) di C tali che

$$f(x_1,y_1) \le f(x,y) \le f(x_2,y_2)$$

Teorema di Cantor
Sia C un insieme chiuso e limitato di R^2 e sia $f(x,y)$ una funzione continua definita su C. Allora f è uniformemente continua su C; cioè $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon$$

$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in$C con $|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)| < \delta$ cioè

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} < \delta$$

Teorema di esistenza dei valori intermedi
Sia D un dominio connesso e limitato di R^2 e f(x,y) una funzione continua su D. Allora f assume tutti i valori compresi fra il minimo e il massimo di f su D