



I TEOREMI DI CEVA E DI FAGNANO

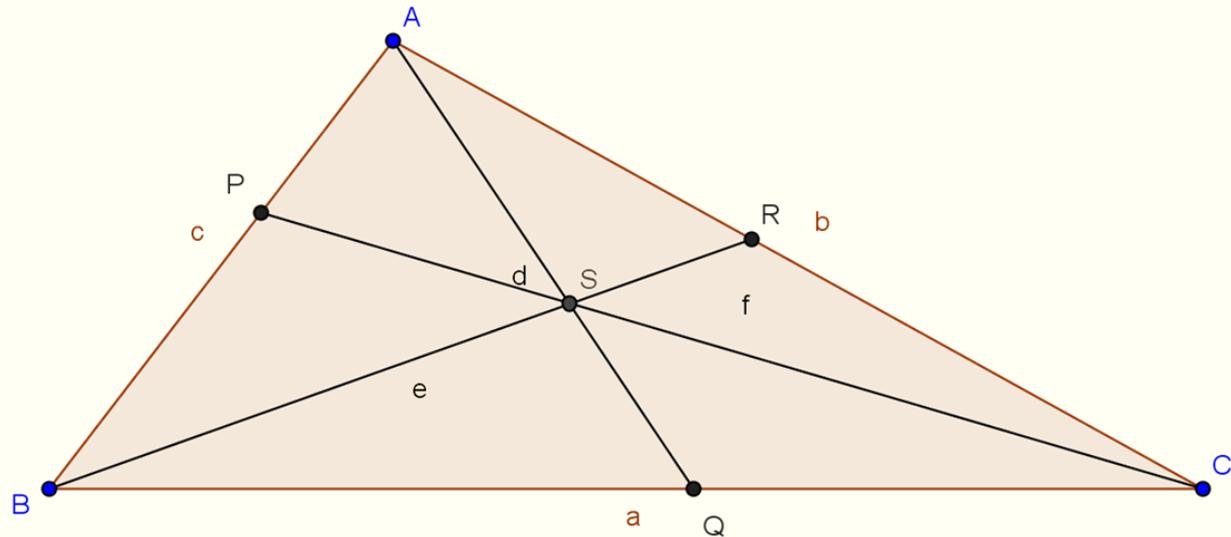
Prof. Roberto Capone
A.A. 2021/22
Matematiche complementari



Il teorema di Ceva

Dato il triangolo ABC , tre segmenti ceviani AQ , CP , PR sono concorrenti (ossia si incontrano in uno stesso punto) se e solo se vale la seguente relazione:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$$



Hp: AQ , CP , PR sono concorrenti in un punto S

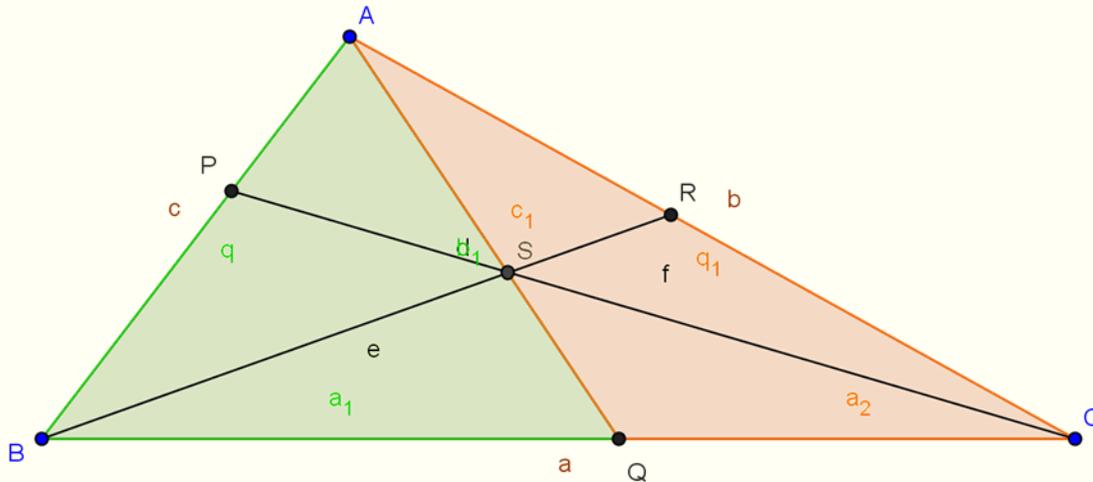
Th:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$$

Il teorema di Ceva

DIM

OSS.1: Dati due triangoli con altezze congruenti, le loro aree sono proporzionali alle rispettive basi [Banalmente: $A_1=B_1H/2$, $A_2=B_2H/2$, da cui sostituendo $H=2A_2/B_2$ si ha $A_1/A_2=B_1/B_2$]



$$\frac{BQ}{QC} = \frac{A(ABQ)}{A(AQC)}$$

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{A(SBQ)}{A(SQC)}$$

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{A(ABQ)}{A(AQC)} = \frac{A(SBQ)}{A(SQC)} = \frac{A(ABQ) - A(SBQ)}{A(AQC) - A(SQC)} = \frac{A(ABS)}{A(ASC)}$$

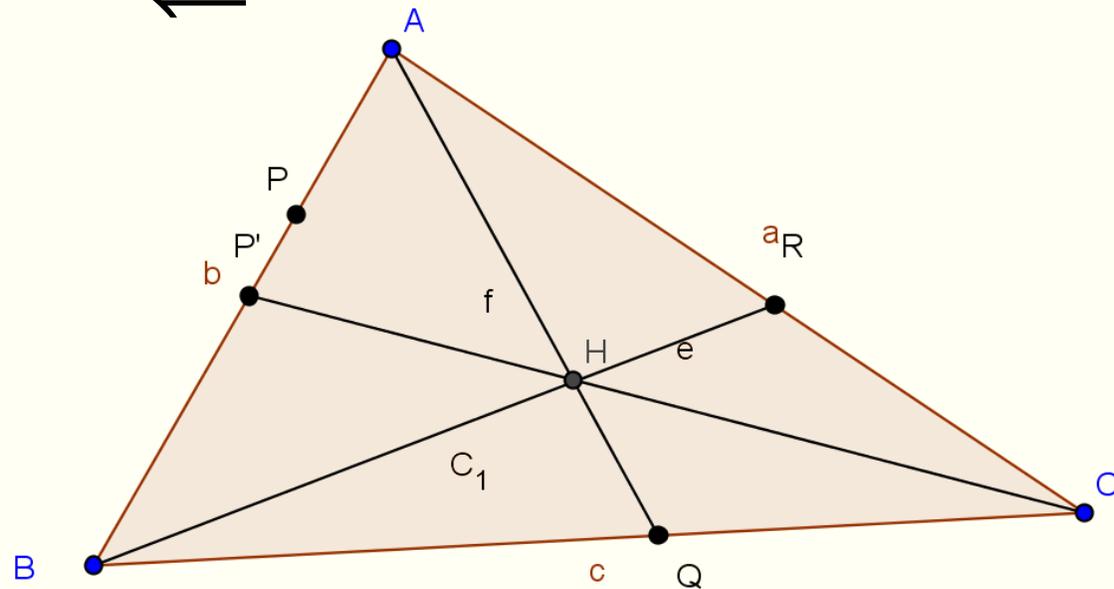
Il teorema di Ceva

Analogamente

$$\frac{CR}{RA} = \frac{A(CBR)}{A(ABR)} = \frac{A(CSR)}{A(ASR)} = \frac{A(CBR) - A(CSR)}{A(ABR) - A(ASR)} = \frac{A(CBS)}{A(ABS)}$$
$$\frac{AP}{PB} = \frac{A(APC)}{A(PBC)} = \frac{A(APS)}{A(PBS)} = \frac{A(APC) - A(APS)}{A(PBC) - A(PBS)} = \frac{A(ASC)}{A(CBS)}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{BQ}{QC} = \frac{A(ABS)}{A(ASC)} \\ \frac{CR}{RA} = \frac{A(CBS)}{A(ABS)} \\ \frac{AP}{PB} = \frac{A(ASC)}{A(CBS)} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1$$

Il teorema di Ceva

DIM \leftarrow



$$\text{Hp: } \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$$

Th: AQ, CP, PR sono concorrenti in un punto

DIM

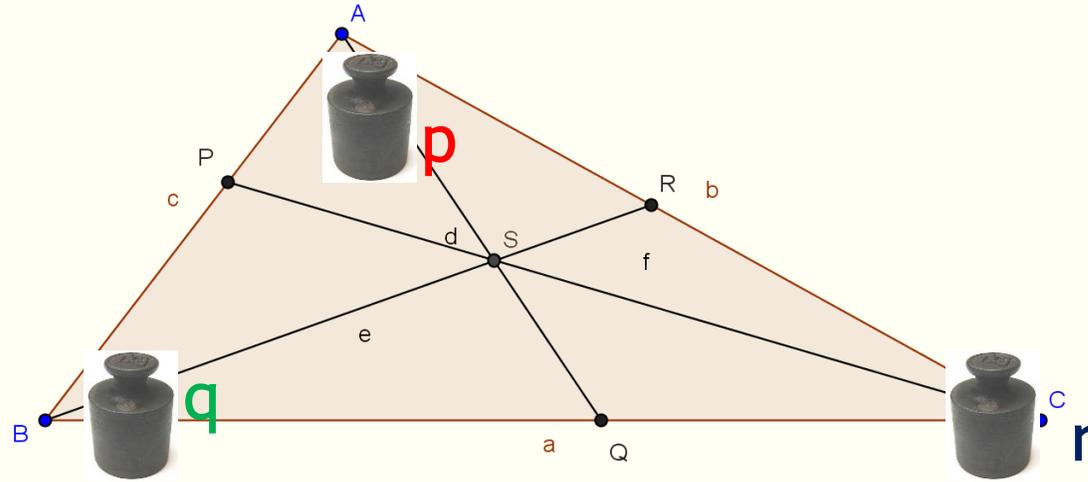
P.A. Siano AQ e BR concorrenti in un punto H, ma CP no, Esisterà un punto $P' \neq P$, tale che CP' sia concorrente ad AQ e BR. Pertanto, per il teorema di Ceva diretto, varrà la relazione:

$$\frac{AP'}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$$

Essendo per ipotesi

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1 \Rightarrow P \equiv P'$$

Formulazione di Ceva... dalla Statica



Hp Applicati ai vertici A,B,C i pesi p,q,r tali che $p:q = BP:PA$ e $p:r = CR:RA$

Th $q:r = CQ:QB$; $p:(q+r) = QS:SA$; $q:(p+r) = RS:SB$; $r:(p+q) = PS:SC$

DIM per ipotesi, P è il centro di gravità dei pesi p e q applicati rispettivamente in A e in B, e che R è il centro di gravità dei pesi p ed r applicati rispettivamente in A e in C, segue che il centro di gravità dei tre pesi, dovendo appartenere sia al segmento CP che a BR, coincide con S. Di conseguenza il centro di gravità dei pesi q ed r è l'intersezione del prolungamento del segmento AS con BC, ossia coincide con Q. Analogamente, si deduce che S è il centro di gravità dei pesi p e (q+r) applicati rispettivamente in A e in Q da cui la proporzione $p:(q+r) = QS:SA$, e così per le altre.

... Ceva et Al...

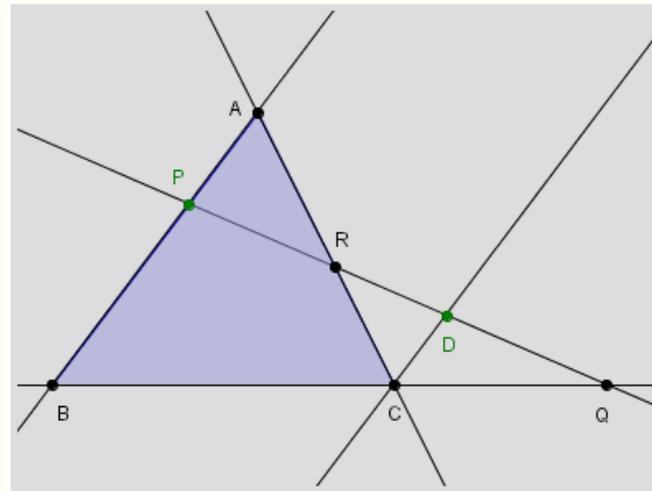
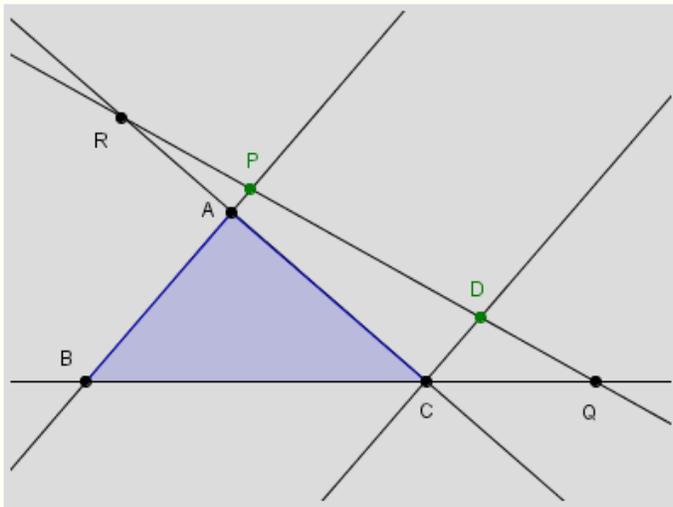
- **Il punti notevoli dei triangoli sono punti ceviani**
- Dal teorema di Ceva si possono ricavare **le proprietà del Baricentro**

Gli “Scienziati” interessati al “teorema di CEVA”:

- Altri autori pervennero al medesimo teorema, come **Johan Bernoulli, Lazare Carnot, Gaspar Coriolis...**
- **Michel Chasles** (matematico francese, vissuto nel periodo più duro della rivoluzione francese, il cui nome compare tra i settantadue nomi di insigni cittadini francesi incisi sulla *Torre Eiffel*) per primo nel 1837 diede risalto al teorema di Ceva, nello studio della “**geometria proiettiva**”, nella sua opera: “*Aperçu historique sur l'origine et Le développement des méthodes en géométrie* “ (“*Esposizione storica sull'origine e lo sviluppo dei metodi in geometria*“)

Teorema di Menelao

- I punti P , Q , R appartenenti rispettivamente ai lati (o ai loro prolungamenti) AB , BC e CA di un triangolo ABC sono collineari, se e solo se vale:



$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$$

Teoremi “complementari”

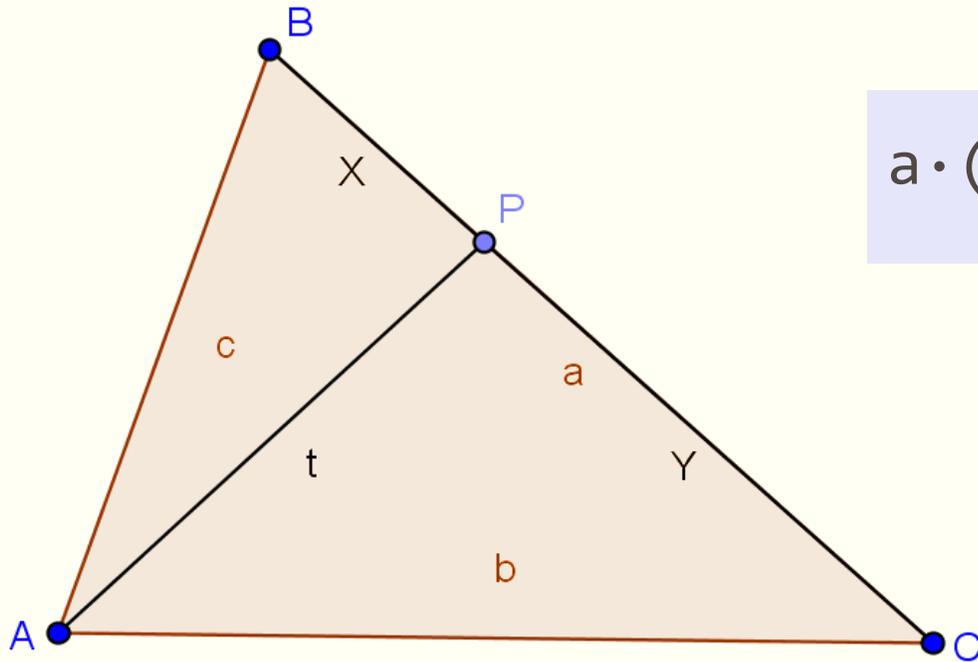
Il teorema di Ceva fornisce un criterio per la concorrenza in un punto di tre rette mentre il teorema di Menelao fornisce un criterio per la collinearità di tre punti cioè per l'appartenenza di questi ad una medesima retta.

Teorema di Stewart

La lunghezza di un segmento ceviano (t)

- Parti in cui viene diviso un lato dallo stesso (X, Y)

- Lati del triangolo



$$a \cdot (t^2 + X \cdot Y) = b^2 X + c^2 Y$$

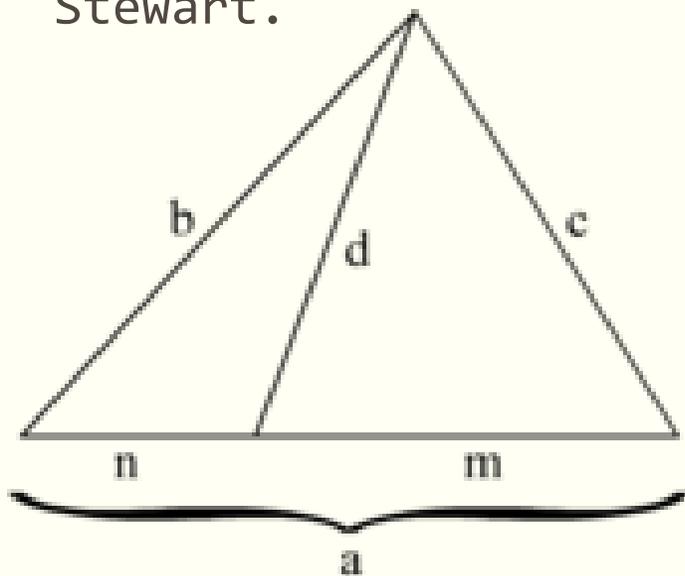
Ceviana

In geometria, una ceviana è genericamente un segmento che congiunge un vertice del triangolo al suo lato opposto, o al suo prolungamento; mentre con retta ceviana si intende per estensione la retta su cui giace.

Particolarmente importanti sono le ceviane concorrenti in un unico punto, detto appunto ceviano - le cui condizioni di sufficienza sono dettate dal teorema di Ceva - designando sui lati opposti anche tre punti che sono i vertici del relativo triangolo ceviano il cui circumcerchio è detto cerchio ceviano.

Ceviana

La lunghezza di una ceviana può essere calcolata con il teorema di Stewart.



Tre ceviane concorrenti individuano un punto ceviano che può essere sia interno che esterno al perimetro del triangolo; nel primo caso anche tutte e tre le ceviane sono interne alla figura, invece quando è esterno solo una rimane interna e lo raggiunge solo se prolungata, mentre le altre due incrociano direttamente il punto e intersecano i prolungamenti dei lati.

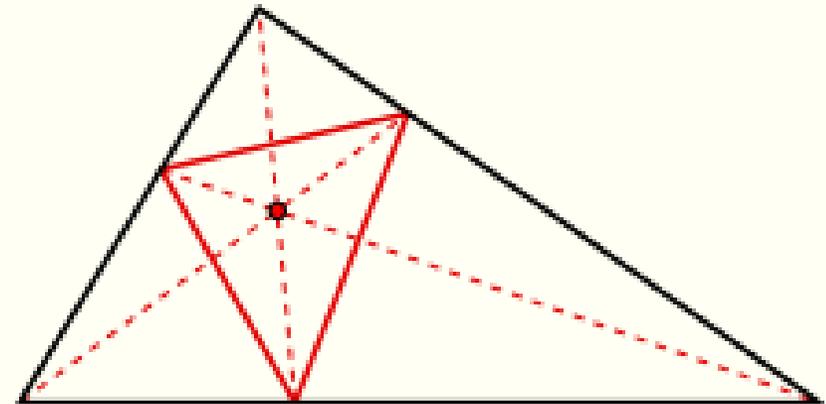
Nella figura, la lunghezza della ceviana d è data dalla formula:

$$b^2m + c^2n = a(d^2 + mn)$$

Triangolo Ceviano

Il triangolo ceviano è un triangolo i cui vertici coincidono con i punti d'incontro fra tre ceviane concorrenti e i lati opposti (o i loro prolungamenti) di uno stesso triangolo di riferimento; pariteticamente il triangolo di riferimento può essere considerato il triangolo anticeviano prendendo invece a riferimento quello ceviano, e avrebbero in comune il medesimo punto ceviano.

Dato quindi un triangolo di riferimento e uno specifico punto ceviano si può ricavare grazie ad esso sia un specifico triangolo ceviano e uno anticeviano.



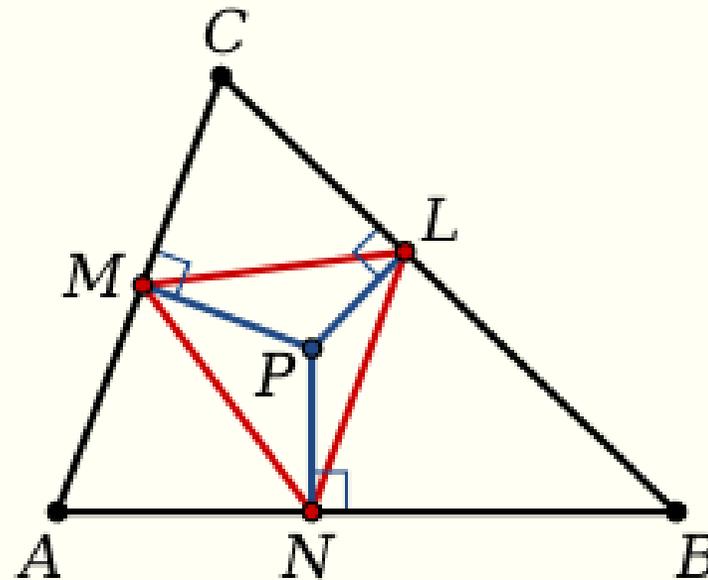
Triangolo pedale

Si definisce triangolo pedale di un punto rispetto ad un triangolo, il triangolo individuato dalla proiezione del punto sui lati del triangolo. Le equazioni che legano le coordinate trilineari $p:q:r$ del punto pedale con le coordinate dei vertici del triangolo pedale sono:

$$L = 0 : q + p \cos C : r + p \cos B$$

$$M = p + q \cos C : 0 : r + q \cos A$$

$$N = p + r \cos B : q + r \cos A : 0$$



Triangolo pedale

Il triangolo pedale dell'incentro corrisponde al triangolo di contatto dell'incirchio.

Il triangolo pedale del circocentro corrisponde al triangolo mediale.

Il triangolo pedale dell'ortocentro corrisponde al triangolo ortico.

Il triangolo pedale del punto di Bevan corrisponde al triangolo di contatto degli excerchi.

Per tutti i punti sulla circonferenza circoscritta il triangolo pedale degenera in un segmento che giace sulla retta di Simson; inoltre nei casi particolari dei tre vertici del triangolo, tale segmento coincide con l'altezza del triangolo.

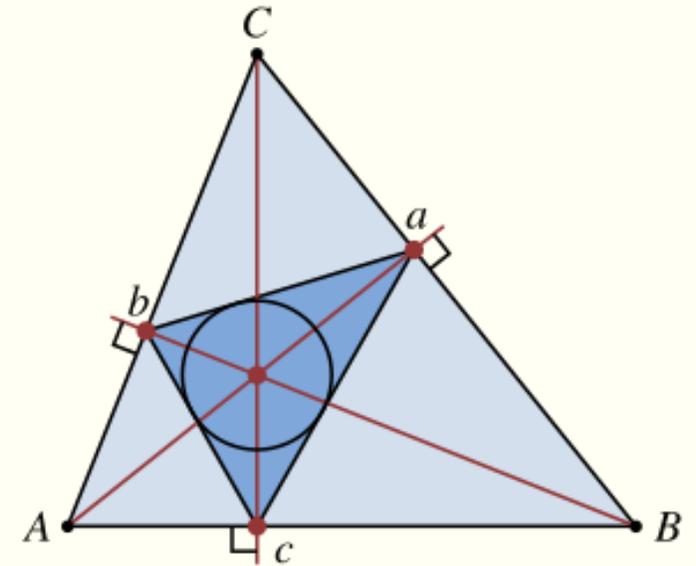
Per tutti i punti interni di un triangolo che non sia ottusangolo il triangolo pedale è interno al triangolo di riferimento.

Triangolo ortico

Si definisce triangolo ortico, dato un triangolo ABC , la figura che si ottiene tracciando i tre segmenti che congiungono a due a due i piedi delle tre altezze del triangolo dato. Il triangolo ortico è pertanto sia il triangolo ceviano che il triangolo pedale dell'ortocentro del triangolo ABC .

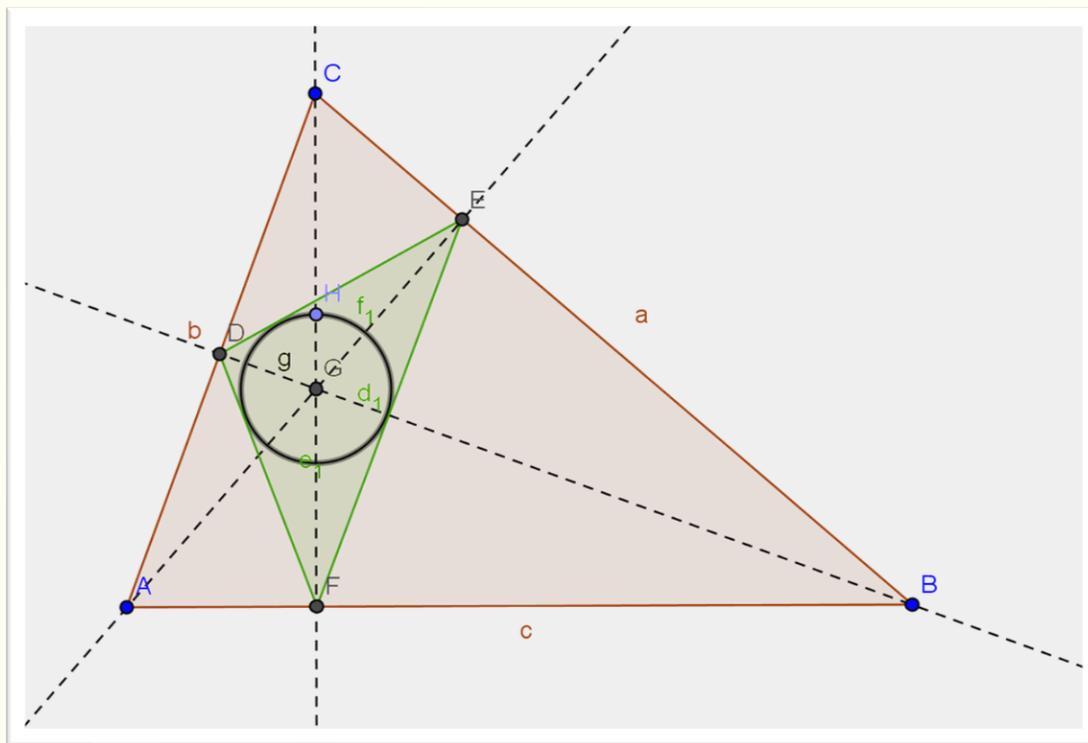
Il triangolo ortico di un triangolo rettangolo si riduce alla sua altezza relativa all'ipotenusa.

Il triangolo ortico di un triangolo T è contenuto interamente in T se e solo se T non è un triangolo ottusangolo: in tal caso i vertici del triangolo ortico che cadono sulle rette che prolungano i lati dell'angolo ottuso sono esterni a T .



Triangoli ortici Teorema 1

Dato triangolo ortico DEF di un triangolo ABC, le altezze del triangolo ABC sono bisettrici interne del triangolo ortico, e dunque l'ortocentro di ABC coincide con l'incentro di DEF.



Il problema di Fagnano

Nel 1775, Giovanni Fagnano propose il seguente problema: “In un dato triangolo acutangolo, inscrivi un triangolo il cui perimetro sia il minimo possibile”. Nel tempo, numerosi sono stati gli approcci risolutivi a questo problema, utilizzando metodologie legate sia all’analisi matematica che alla geometria sintetica (in particolare sfruttando le proprietà delle simmetrie assiali). La soluzione al problema di Fagnano è il “triangolo ortico”, ossia la figura che si ottiene tracciando i tre segmenti che congiungono a due a due i piedi delle tre altezze del triangolo dato. Recentemente, sono stati introdotti i quadrilateri ortici di un quadrilatero convesso e si è cercato di estendere il problema di Fagnano: qual è il quadrilatero di perimetro minimo inscritto in un quadri-latero convesso Q ? È stato dimostrato che, se Q è un quadrilatero ciclico ed ortodiagonale, i quadrilateri ortici inscritti in Q hanno lo stesso perimetro e tale perimetro è minimo rispetto ad ogni quadrilatero inscritto in Q .

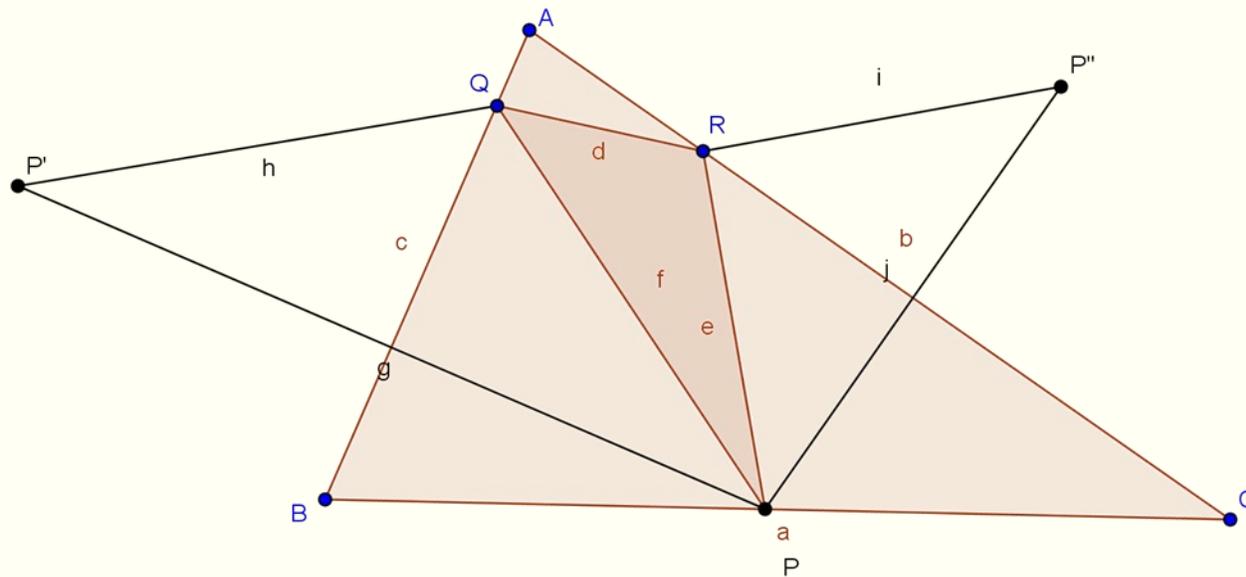
Il problema di Fagnano

Fagnano diede una soluzione a questo problema utilizzando il “calculus”.

La seconda dimostrazione, invece, utilizza le proprietà delle simmetrie assiali e fu data in modo diverso ed indipendente da L. Fejér e da While H. A. Schwarz

.

Dimostrazione con simmetrie assiali Fej'er

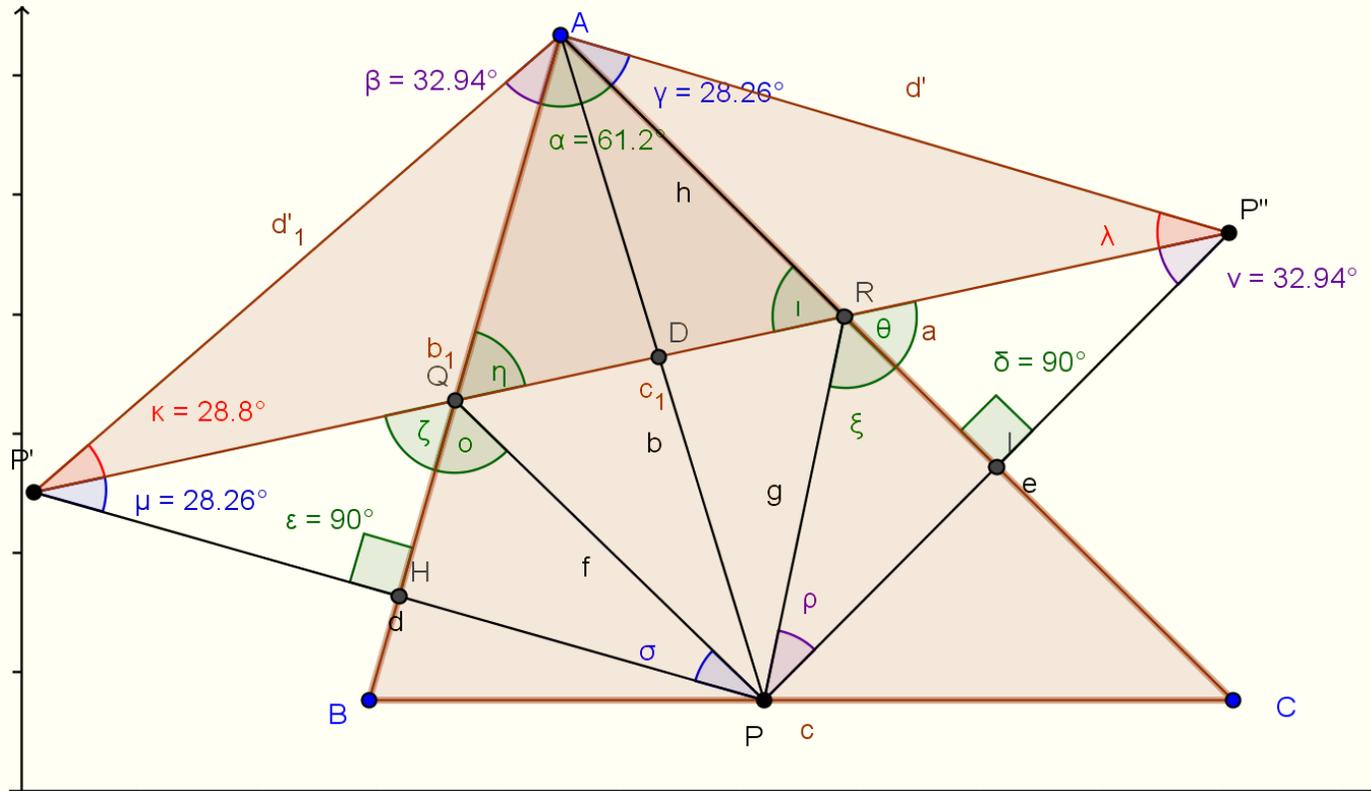


Fissiamo un punto P sul segmento BC . Costruiamo P' per simmetria assiale di P rispetto ad AB e P'' per simmetria assiale di P rispetto ad AC .

Il triangolo PQP'' è isoscele, quindi $P'Q = PQ$; analogamente $PR = P''R$.

Pertanto, il perimetro del triangolo PQR è congruente alla somma dei segmenti $P'Q + QR + RP''$. Tra tutti i triangoli inscritti in ABC , a fissato P su BC , quelli con vertici Q ed R che appartengono alla retta PP'' saranno i triangoli di perimetro minimo. Ovviamente questa proprietà è speculare anche per i vertici Q ed R . Pertanto, per ogni posizione di P su BC esiste ed è unico un triangolo di perimetro minimo. La soluzione al problema di Fagnano è da ricercare pertanto nella famiglia di triangoli con questa caratteristica, ottenuti al variare di P su BC .

Dimostrazione con simmetrie assiali Fej'er

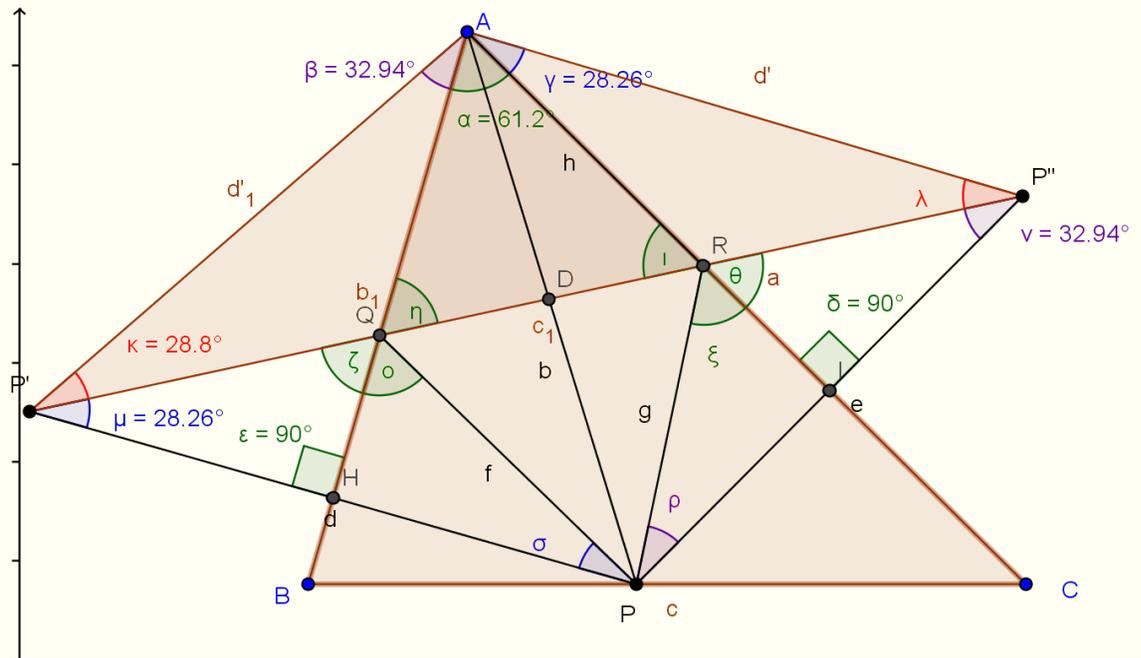


P', Q, R, P'' ALLINEATI...
Facciamo variare P

$$\begin{aligned}
 a &= b + g = m + s \\
 a + l &= 90^\circ \\
 b - g &= n - m \\
 g &= m \\
 b &= s
 \end{aligned}$$

Il triangolo P'AP è un triangolo isoscele, essendo AH altezza e mediana, pertanto essa sarà anche bisettrice e dunque l'angolo P'AH è congruente all'angolo HAP.
Analogamente, il triangolo PAP'' è isoscele, quindi l'angolo PAC è congruente all'angolo CAP'',
dunque $\alpha \cong \beta + \gamma \Rightarrow \widehat{P'AP''} = 2\alpha$

Dimostrazione con simmetrie assiali Fej'er



$$AP' \cong AP \cong AP'' \Rightarrow$$

Al variare di P, si ottengono $P'AP''$ triangoli isosceli
SIMILI (III Criterio di
similitudine)

Per il teorema dei perimetri, il rapporto tra perimetri di due triangoli simili è uguale al rapporto tra due lati omologhi, pertanto: $2p(P'AP'')/2p(P^*A^*P^{**})=AP'/AP'^*$, pertanto il perimetro sarà minimo se AP' è minimo, e quindi se AP è minimo. La minima distanza di A da BC è la perpendicolare, quindi la soluzione al problema di Fagnano esiste ed è data da AP perpendicolare a BC. Analogamente, ripetendo lo stesso ragionamento sugli altri lati, deve essere BR perpendicolare ad AC e CQ perpendicolare ad AB, pertanto la soluzione è il triangolo ORTICO

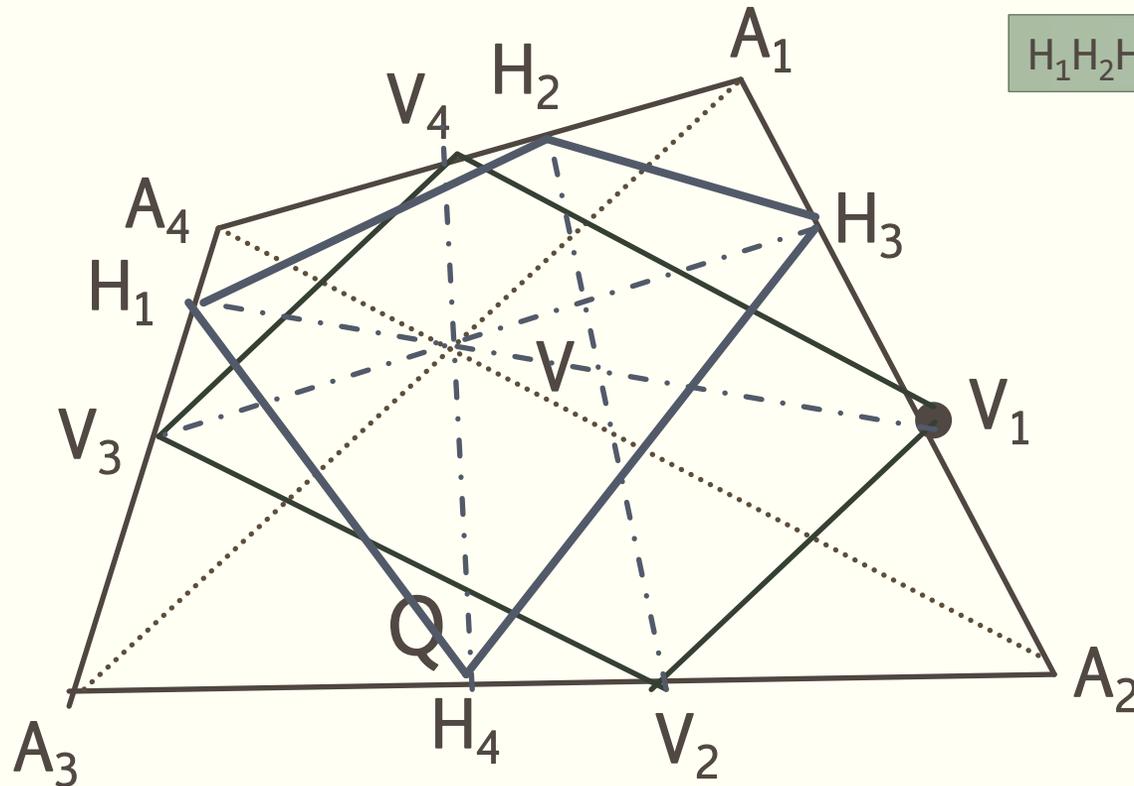
Orthic Quadrilaterals of a Convex Quadrilateral

Maria Flavia Mammana, Biagio Micale, and Mario Pennisi

Abstract. We introduce the orthic quadrilaterals of a convex quadrilateral, based on the notion of valtitudes. These orthic quadrilaterals have properties analogous to those of the orthic triangle of a triangle.

The orthic triangle of a triangle T is the triangle determined by the feet of the altitudes of T . The orthic triangle has several and interesting properties (see [2, 4]). In particular, it is the triangle of minimal perimeter inscribed in a given acute-angled triangle (Fagnano's problem). It is possible to define an analogous notion for quadrilaterals, that is based on the valtitudes of quadrilaterals [6, p.20]. In this case, though, given any quadrilateral we obtain a family of “orthic quadrilaterals”.

Quadrilateri ortici

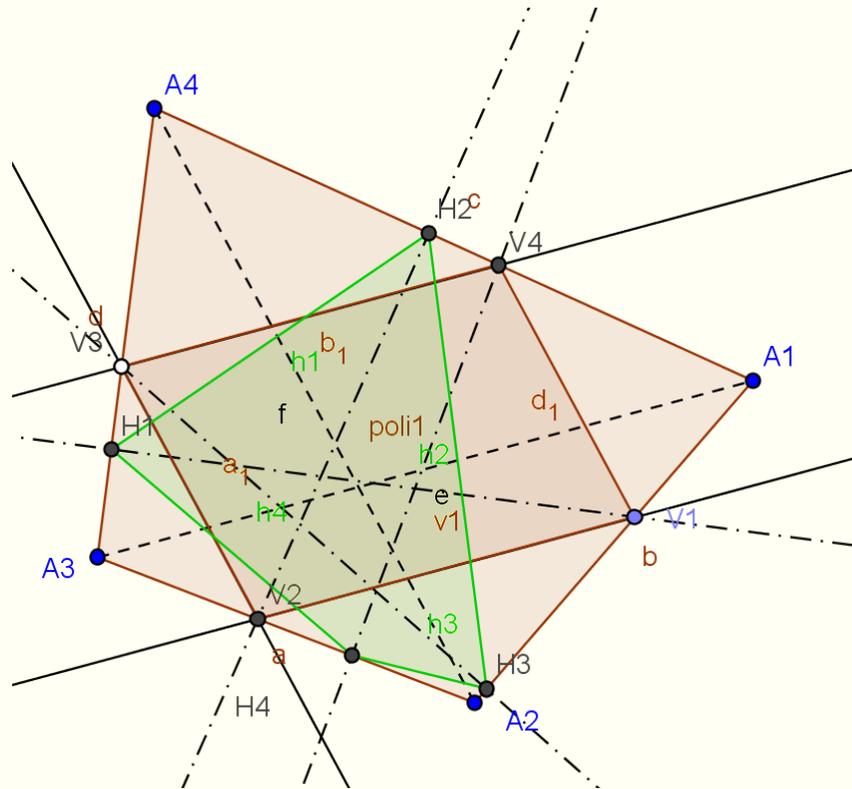


$H_1H_2H_3H_4 = \text{Quadrilatero Ortico di } Q (Q_0)$

Da $V_i \rightarrow$ Perpendicolari ad $A_{i+2}A_{i+3}$: V_iH_i : V -Altezze (*Valtitude*) di Q rispetto a V

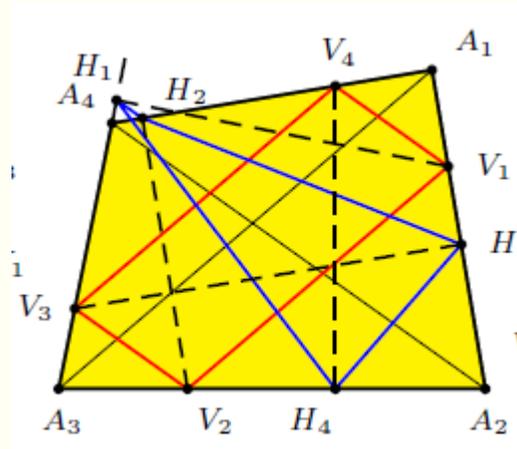
“Limiti nella definizione” (?)

Note that Q_o may be convex, concave or self-crossing

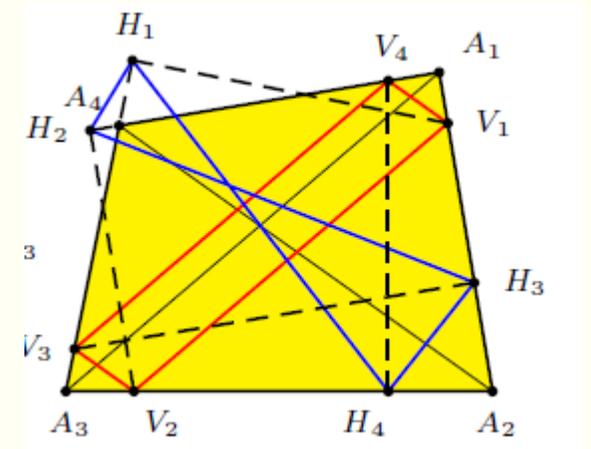


Quadrilatero Convesso

$$V_{1MIN} \leq V_1 \leq V_{1MAX} \mid H_i \in A_{i+2}A_{i+3}$$

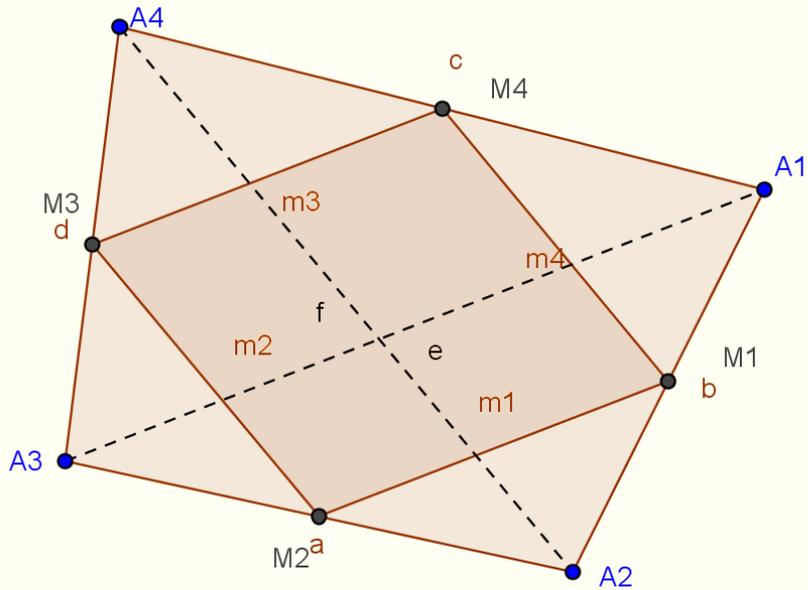


Quadrilatero Concavo



Non-Poligono, perché delimitato da una spezzata chiusa intrecciata [Self-Crossing]

Teorema di Varignon



Hp: $M_i = \text{Punti Medi } A_i A_{i+1}$

Tesi: $M_1 - M_2 - M_3 - M_4$ Parallelogramma

Dim:

$$M_3 M_4 // A_1 A_3 = 1/2 A_1 A_3 =$$

$$M_1 M_2$$

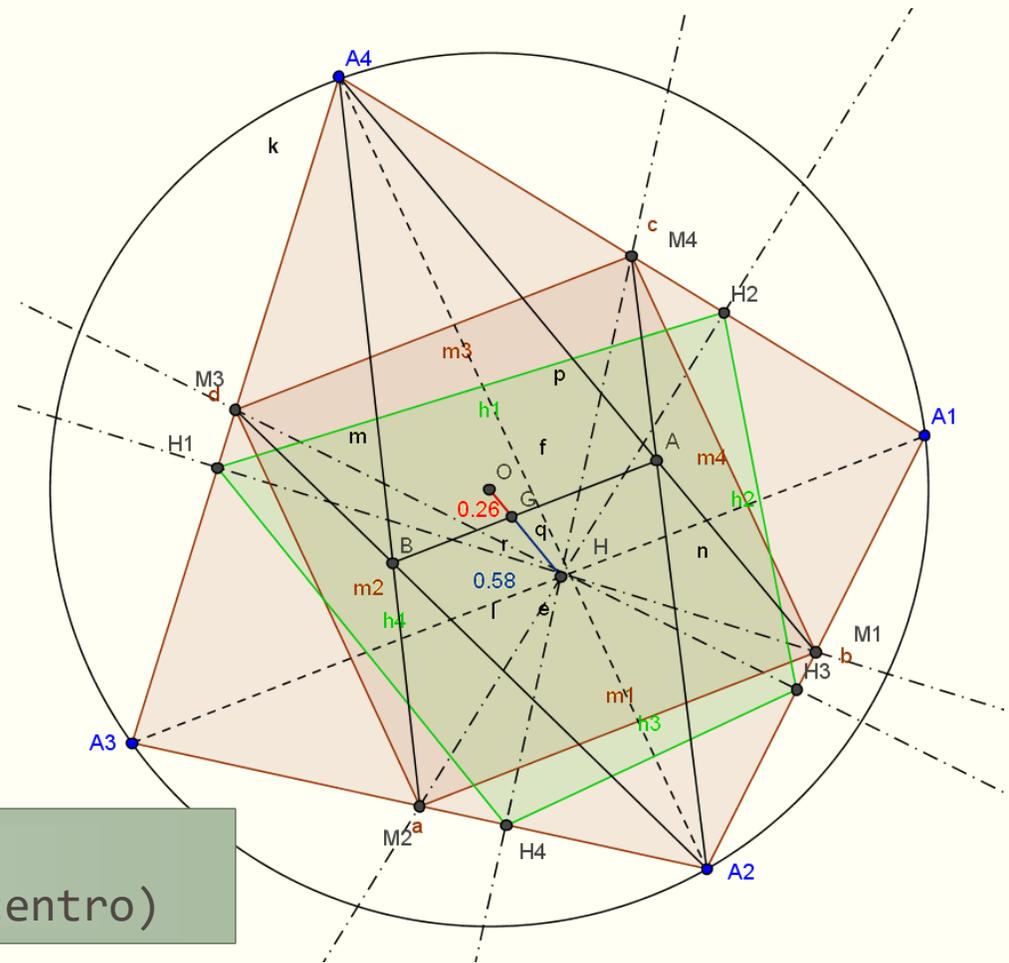
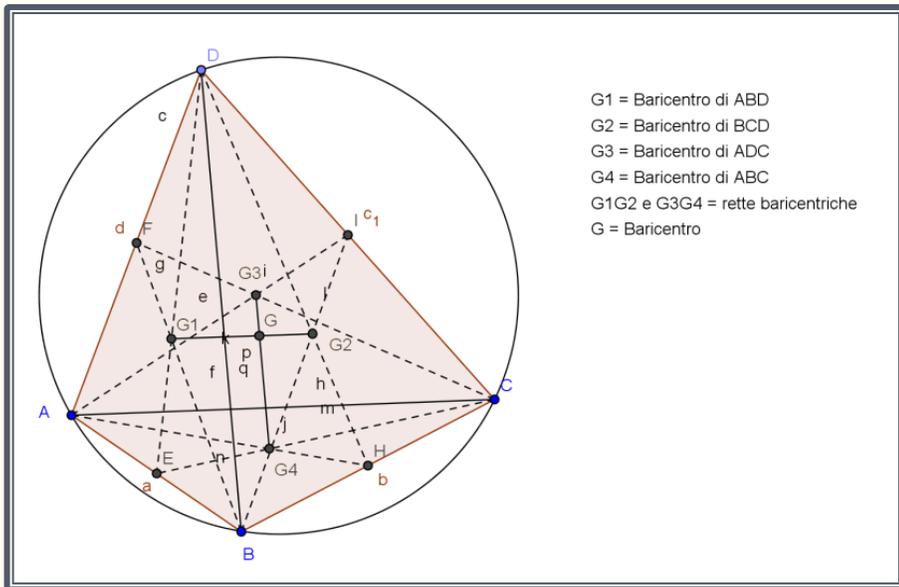
$$M_1 M_4 // A_2 A_4 = 1/2 A_2 A_4 =$$

$$M_2 M_3$$

Pierre Varignon (1654-1722) fu un valente insegnante francese nei Collèges Mazarin e Royal di Parigi, amico di Jean Bernoulli cercò di conciliare i nuovi metodi dell'analisi matematica con la più tradizionale geometria euclidea. Fu membro di importanti accademie quali l'Académie Royale des Sciences, l'Accademia di Berlino e la Royal Society di Londra. Il teorema che porta il suo nome rientra nel novero dei teoremi elementari della geometria euclidea, tanto che la data della sua prima pubblicazione negli *Elemens de Mathematique*, 1731 (quindi postuma), non può che sorprendere: possibile che una tale proprietà sia sfuggita a tutti i "geometri" che precedettero Varignon?

Quadrilateri Ortici Principali

- In generale, se Q è ciclico con **circocentro** O e **baricentro** G , allora H è il **simmetrico di O rispetto a G** (?) e la linea che contiene i tre punti H , O e G è detta **retta di Eulero di Q** .



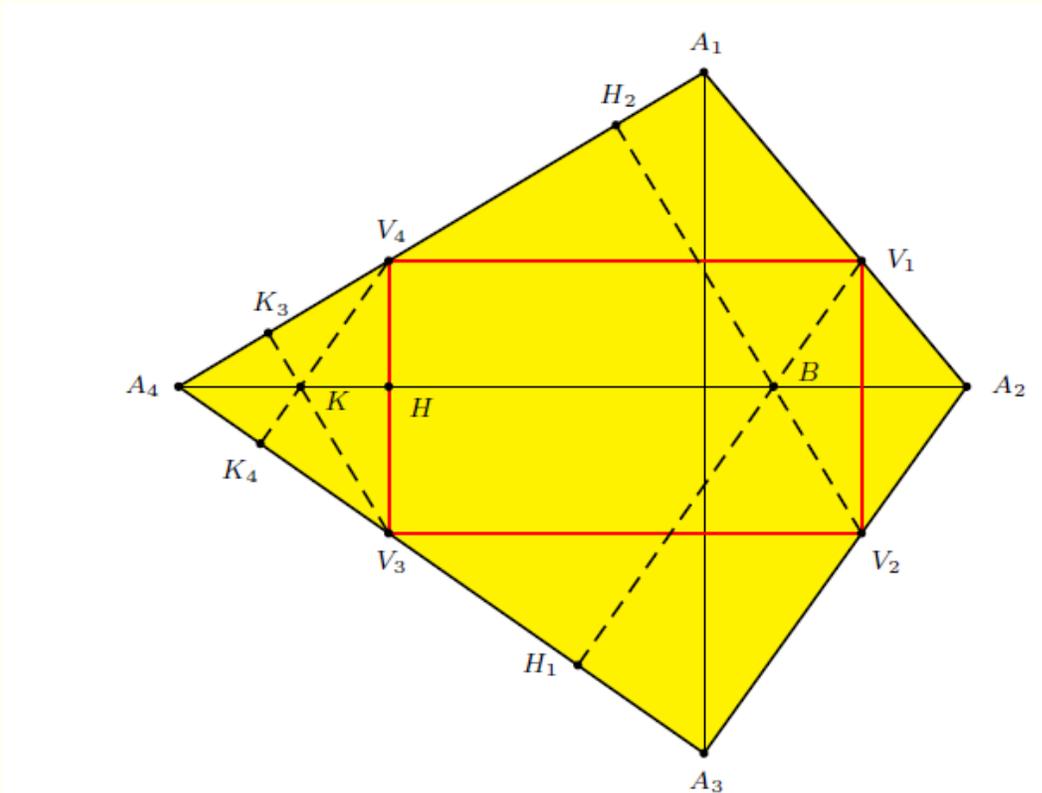
Oss. la distanza GH (Baricentro-Anticentro) è doppia della distanza OG (Baricentro-Circocentro)

Quadrilateri Ortici: V-Altezze sono CONCORRENTI?

- Le **V-Altezze** di Q rispetto ad un V-Parallelogramma possono **concorrere** se e solo se Q è **ortodiagonale** o Q è **ciclico**, in particolare:
 - quando Q è **ortodiagonale** esiste uno ed un solo V-Parallelogramma di Q con **V-Altezze concorrenti**. In questo caso, esse concorrono nel punto D comune alle diagonali di Q e sono perpendicolari alle dimensioni di Q .
 - quando Q è **ciclico** esse concorrono se e solo se coincidono con le **M-Altezze** di Q (ossia se ci riduciamo al quadrilatero ortico principale).

Quadrilateri ortici di un quadrilatero ortodiagonale

- **Lemma 1:** se Q è ortodiagonale, le V -Altezze V_iH_i e $V_{i+1}H_{i+1}$ ($i=1,2,3,4$) rispetto al V -parallelogramma di Q si incontrano sulle diagonali $A_{i+1}A_{i+3}$ di Q



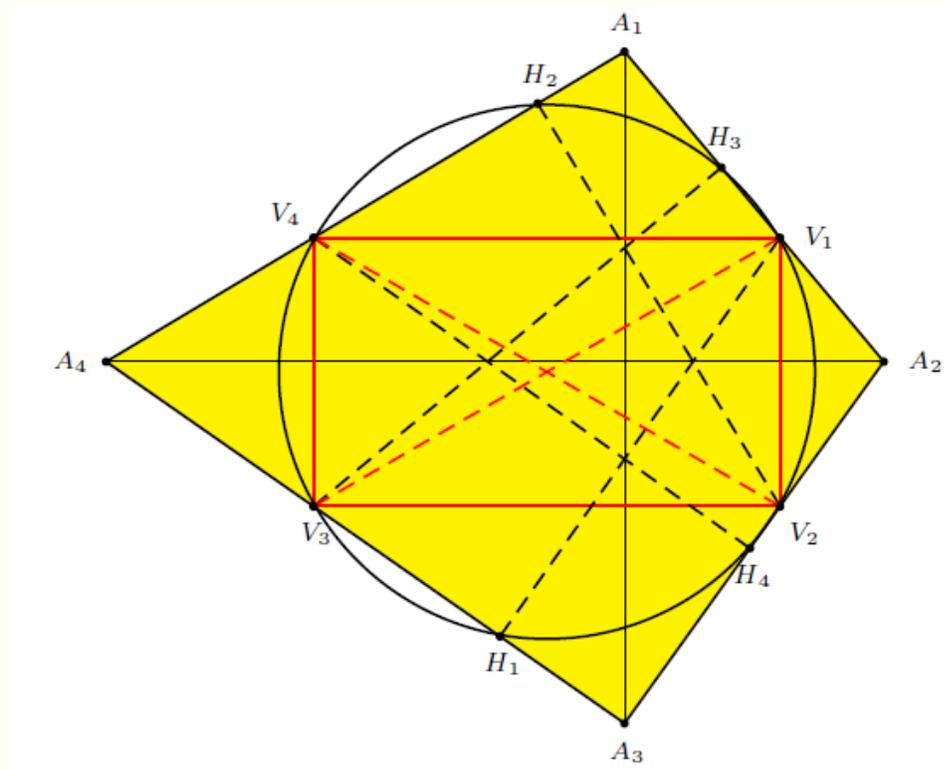
DIM

Dimostriamo che V_1H_1 e V_2H_2 si incontrano sulla retta A_2A_4 .

Le altezze V_3K_3 , V_4K_4 , A_4H del triangolo $V_3V_4A_4$ concorrono in uno stesso punto K , che appartiene alla retta A_2A_4 . Sia B il punto in comune tra V_1H_1 e A_2A_4 . Dimostriamo che anche B giace su V_2H_2 . Il quadrilatero V_1BKV_4 è un parallelogramma, perché ha i lati opposti paralleli. Dunque, BK è uguale e parallelo a V_1V_4 ed a V_2V_3 e il quadrilatero V_2V_3KB è un parallelogramma, poiché ha i lati opposti a due a due uguali e paralleli. Segue che V_2B è parallelo a V_3K e dunque B giace sulla retta V_2H_2

Quadrilateri ortici di un quadrilatero ortodiagonale

- **Teorema 2:** Sia Q ortodiagonale. Sia V un V -parallelogramma di Q e Q_0 il quadrilatero ortico di Q relativo a V . I vertici di V e quelli di Q_0 giacciono sulla stessa circonferenza.



Dim.

Poiché Q è ortodiagonale, V è un rettangolo ed è inscritto nella circonferenza C di diametro $V_1V_3=V_2V_4$. I vertici di Q_0 giacciono su C , perché ad es. $V_1H_1V_3$ sono angoli retti.

... le V -Altezze di Q rispetto a Q_0 sono bisettrici interne di Q_0

Problema di Fagnano ->Biliardo



Two Applications of Calculus to Triangular Billiards

Author(s): Eugene Gutkin

Reviewed work(s):

Source: *The American Mathematical Monthly*, Vol. 104, No. 7 (Aug. - Sep., 1997), pp. 618-622



We assume that the triangle T is acute, and view it as a billiard table. The pedal triangle T_1 , which is inscribed in T , is then a periodic billiard orbit (see §2). Moreover, T_1 is the shortest such orbit. Even more remarkable, for the general triangular table, the pedal triangle is the only closed (prime) billiard orbit known!

The first proof, by calculus, that among all inscribed triangles the pedal triangle has the least perimeter, is attributed to J. F. F. Fagnano, ca. 1775. In his honor, the problem just stated is often called the *Fagnano problem* [4], [5], [15]. Elementary geometric solutions were later given independently by H. A. Schwarz and L. Fejer [14]. Schwarz and Fejer did their work at the end of the 19-th century and in the beginning of the current one. Thus, along with Fagnano, they are the primeval researchers in polygonal billiards! Following tradition, we will call T_1 the *Fagnano orbit*. We reserve the name *Fagnano geodesic* for the Fagnano orbit, traced twice.

Biliardo Piano

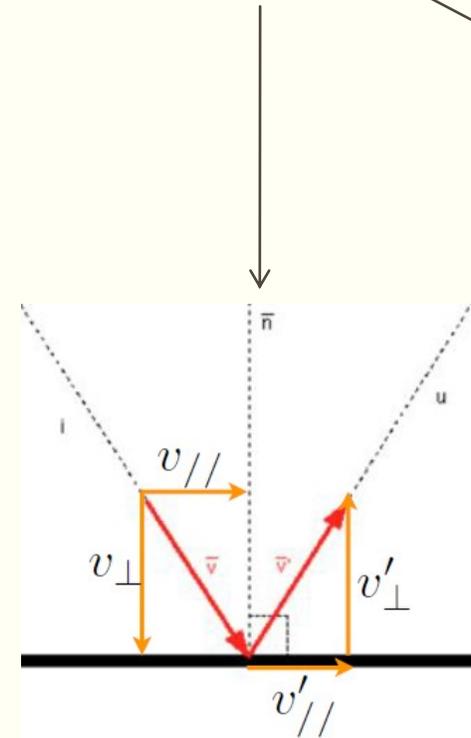
- Un **biliardo piano** è il sistema meccanico costituito da un **punto di massa m** che si muove in una **regione limitata R del piano**, con **R semplicemente connessa** e il bordo **dR** una **curva chiusa piana regolare**, tranne al più qualche punto.
- Si suppone che il **moto** all'interno di R sia **rettilineo e uniforme** (senza attrito) e che il punto, quando **urta** contro il bordo, rimbalzi in maniera **elastica** verso l'interno, seguendo le leggi dell'ottica geometrica, in particolare **le leggi di Snell per la riflessione**:

Prima legge di Snell

Il raggio incidente, [il raggio rifratto], il raggio riflesso e la normale alla superficie che separa i due mezzi appartengono allo stesso piano, chiamato piano di incidenza

Seconda legge di Snell

L'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza

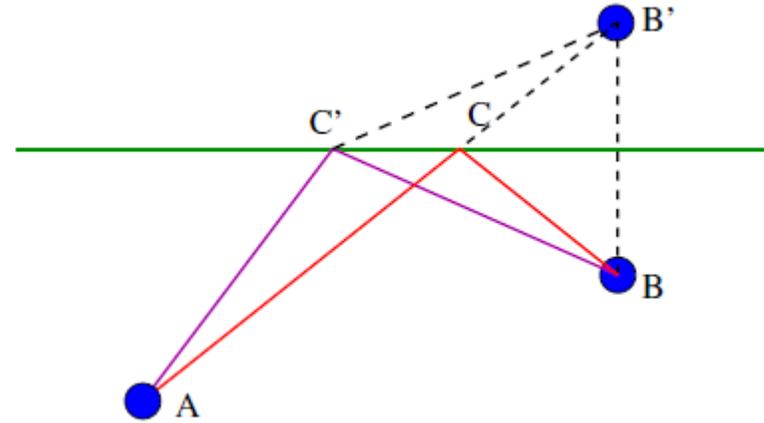
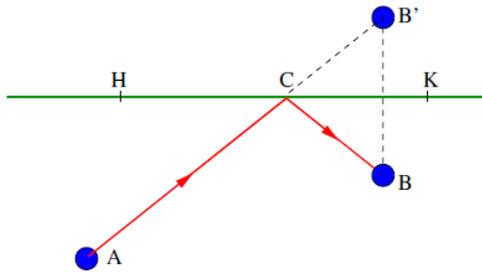


$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + V_x t \\ y(t) &= y_0 + V_y t \\ V &= \text{cost.} \\ a &= 0\end{aligned}$$

Giocare... "di sponda"



"Su quale punto della sponda HK occorre mirare in modo che la palla inizialmente in A raggiunga la posizione B?"



Principio di Minimo

Il percorso ACB su cui si muove la palla da biliardo ha lunghezza minima tra tutti i percorsi che partono da A, toccano la sponda e raggiungono B; in Fig. è stato rappresentato anche un altro possibile percorso AC'B, per il quale non è rispettata la condizione di urto elastico (ossia non è valida la II legge di Snell).

Nell'ottica geometrica, il **principio di Fermat** afferma che i raggi luminosi, nell'attraversare una sostanza, percorrono, fra tutte le traiettorie possibili, la curva che minimizza il tempo di percorrenza. Nelle sostanze il cui indice di rifrazione è costante, i raggi luminosi si propagano allora rettilinearmente e, quando incidono su una superficie che separa una sostanza omogenea da un'altra essi vengono riflessi secondo la legge di Snell.

Definizioni - Sistema Biliardo piano

Se R è un poligono (non necessariamente convesso o semplicemente connesso) il biliardo si dice “**Biliardo Poligonale**”

Se l'insieme delle direzioni del punto nel moto è finito, allora il **biliardo** si dice **razionale**

Descrizione del sistema “biliardo piano” nel formalismo Hamiltoniano

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q),$$

$$V(q) = \begin{cases} 0 & \text{se } m \in R \\ \infty & \text{se } m \notin R \end{cases}$$

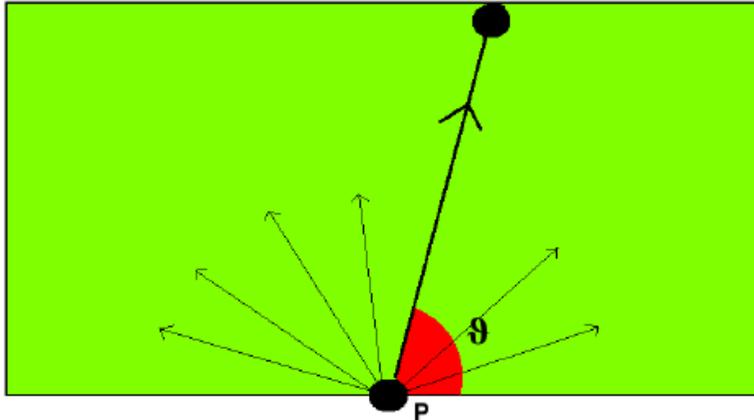


La dinamica dei biliardi è completamente definita dalla forma del suo contorno

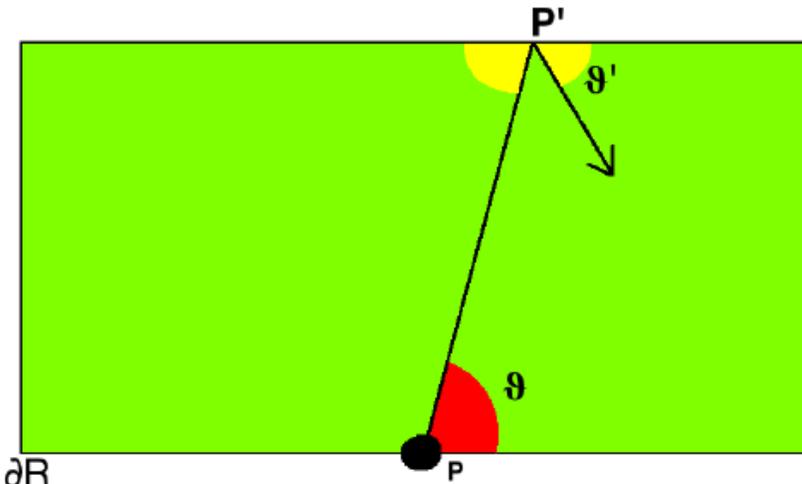
È sufficiente conoscere i punti di urto con il bordo per ricostruire tutta la traiettoria percorsa!

Le **traiettorie** di una palla da biliardo sono molto diverse a seconda della forma del biliardo, in alcuni casi esse sono **periodiche**, in altri addirittura **CAOTICHE**!

Mappa del Biliardo



$$\vartheta \in (0, \pi)$$



∂R

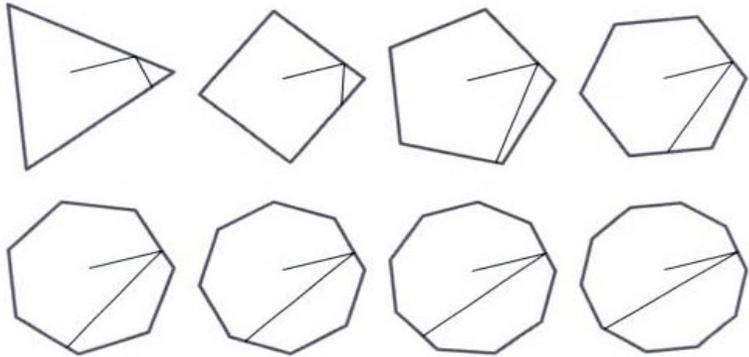
Stato: (P, θ)

Orbita: Sequenza degli stati assunti

Spazio delle fasi: Insieme dei possibili stati $\partial R \times (0, \pi)$

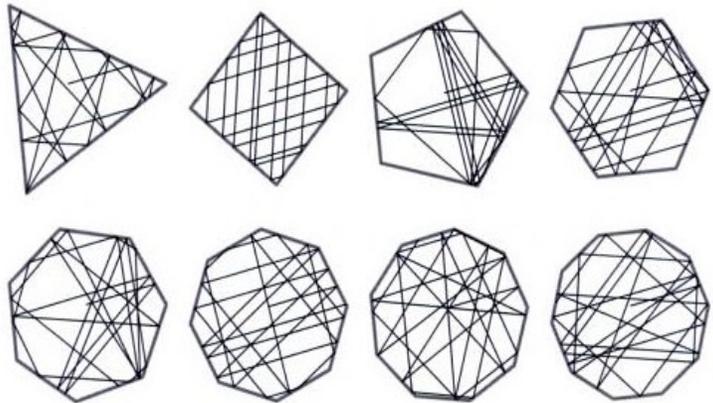
$$\begin{aligned} B : \partial R \times (0, \pi) &\longrightarrow \partial R \times (0, \pi) \\ (P, \vartheta) &\longrightarrow (P', \vartheta') \end{aligned}$$

Biliardi Poligonali



1 urto contro il bordo

1) Non esistono orbite caotiche



a) Periodicità
b) Minimalità
c) Ergodicità

20 urti contro il bordo

Un'orbita periodica immediata

Proposizione (Stepin)

In ogni biliardo razionale c'è un'orbita periodica.

- Si fa partire l'orbita da un lato del biliardo, perpendicolare ad esso.
- Per il teorema di ricorrenza di Poincaré, esiste una condizione iniziale vicina a questa che dovrà tornare sullo stesso lato in una direzione vicina alla perpendicolare.
- Dato che le direzioni assunte dal punto sono in numero finito, tale direzione sarà esattamente perpendicolare.
- Dopodiché l'orbita ripercorre esattamente lo stesso percorso.

In meccanica hamiltoniana il teorema di ricorrenza di Henri Poincaré stabilisce che, nell'evoluzione di un sistema dinamico che ha uno spazio delle fasi limitato, il sistema può trovarsi in uno stato arbitrariamente vicino a quello di partenza dopo un tempo sufficientemente lungo.

