

*Prof. Roberto Capone*

# Euclide (parte III)

Corso di Didattica della Matematica  
2015/2016  
Corso di Laurea in Scienze della Formazione  
Primaria



# Elementi di Geometria euclidea

## Misura delle grandezze

“**Misurare**” un segmento **a** significa prendere un altro segmento di riferimento **u** (detto “unità di misura”) e chiedersi quante volte **u** è contenuto in **a** .

Se **u** è contenuto in **a** esattamente  $n$  volte ( $n$  numero intero non negativo), si potrà scrivere  $\mathbf{a} = n \cdot \mathbf{u}$  (generalmente il puntino di moltiplicazione si omette, scrivendo semplicemente:  $\mathbf{a} = n\mathbf{u}$  ) e si dirà che “la misura del segmento **a** , rispetto al segmento **u** assunto come unità di misura, è il numero **INTERO**  $n$ ”.

*La figura qui a fianco mostra due segmenti **a**, **u** .*

***a** è il segmento che si vuole misurare,*

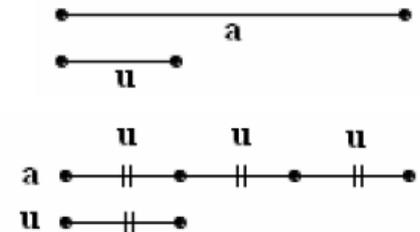
***u** è il segmento che si vuole utilizzare come unità di misura.*

*Poiché **a** risulta uguale alla somma*

*di esattamente 3 segmentini, ciascuno uguale a **u** ,*

*possiamo scrivere  $\mathbf{a} = 3\mathbf{u}$*

*e affermare che “la misura di **a** (rispetto a **u** ) è 3”.*



# Elementi di Geometria euclidea

Se il segmento  $\mathbf{u}$  NON è contenuto un numero intero di volte in  $\mathbf{a}$ , si ricorrerà ai cosiddetti “sottomultipli” di  $\mathbf{u}$  (vale a dire: la metà di  $\mathbf{u}$ , la terza parte di  $\mathbf{u}$ , la quarta parte di  $\mathbf{u}$ , ecc. ecc.).

Dato un qualunque segmento  $\mathbf{u}$ , si dice “sottomultiplo di  $\mathbf{u}$  secondo  $n$ ” ciascuno dei segmentini che si ottengono dividendo  $\mathbf{u}$  in  $n$  parti uguali.

Il sottomultiplo di  $\mathbf{u}$  secondo  $n$  si indica col simbolo  $1/n \cdot \mathbf{u}$  (oppure  $1/n \mathbf{u}$ ), che si può leggere: *un n-esimo*, oppure: *l'n-esima parte*, di  $\mathbf{u}$ .

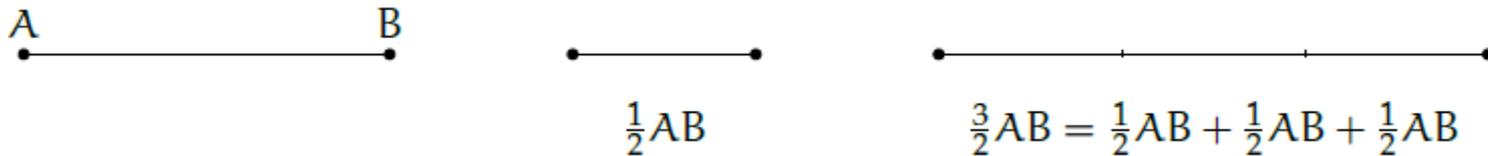
**Definizione**. Data una grandezza geometrica  $A$  ed un numero naturale  $n$ , la grandezza geometrica  $B$  si dice multipla di  $A$  secondo il numero  $n$  se è data dalla somma di  $n$  grandezze tutte uguali ad  $A$  e scriveremo  $B = n A$ .

In questo caso  $A$  è definita grandezza sottomultipla di  $B$  secondo il numero naturale  $n$  e scriviamo  $A = B/n$

# Elementi di Geometria euclidea

Dato un segmento  $AB$  possiamo dare un significato alla scrittura  $\frac{3}{2}AB$  nel seguente modo:

Il segmento  $AB$  è costituito da 3 segmenti ciascuno congruente alla metà di  $AB$ .



**Definizione 6.3.** Due grandezze omogenee  $A$  e  $B$  si dicono commensurabili quando esiste una terza grandezza  $C$ , ad esse omogenea, che è sottomultipla sia di  $A$  che di  $B$ :  $A = n \cdot C$ ,  $B = m \cdot C$ . Due grandezze omogenee  $A$  e  $B$  si dicono incommensurabili quando non esiste una terza grandezza  $C$ , ad esse omogenea, che sia sottomultipla sia di  $A$  che di  $B$ .

# Elementi di Geometria euclidea

## QUANDO LA MISURA E' IRRAZIONALE

Si scopre tuttavia – cosa che lasciò del tutto sconcertati gli studiosi greci i quali, nel VI o V secolo a. C., per primi se ne accorsero – che per certe coppie di segmenti  $a$ ,  $u$ , non avviene

- né che  $u$  sia contenuto un numero esatto di volte in  $a$
- né che esista un sottomultiplo di  $u$ , che sia contenuto un numero esatto di volte in  $a$ .

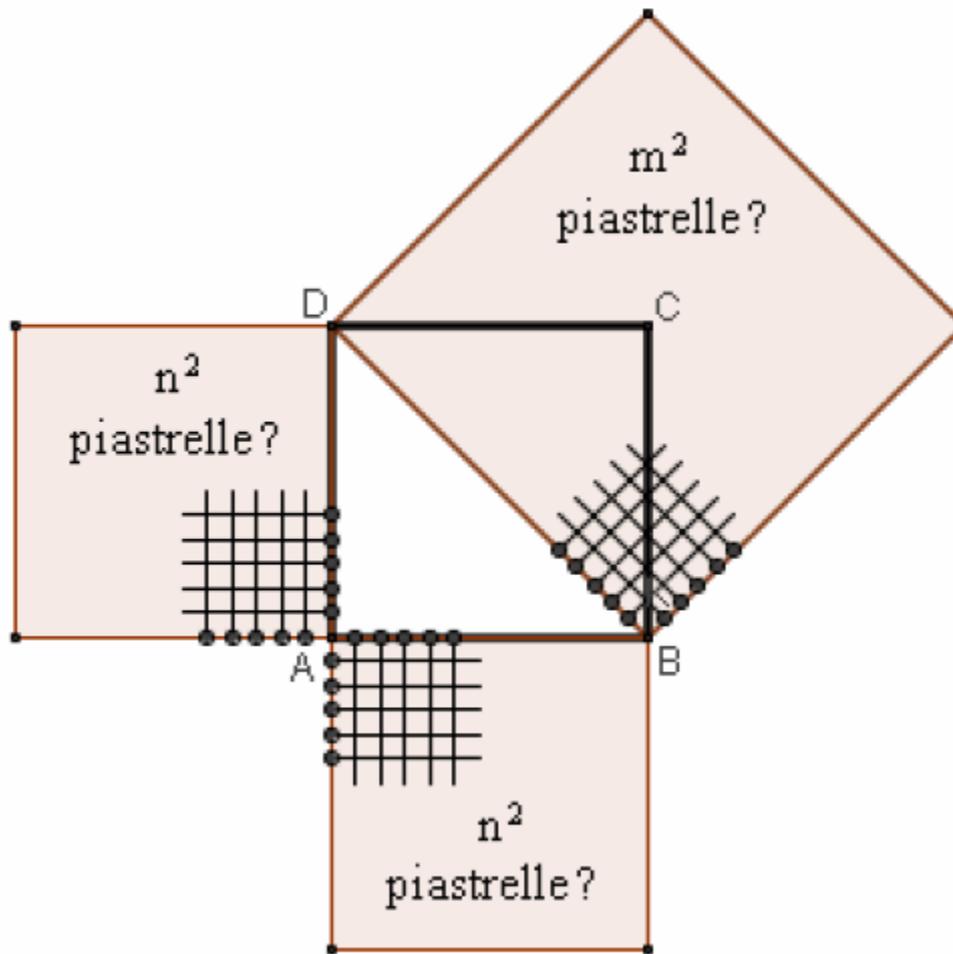
In questo caso si dice che  $a$ ,  $u$  sono “**incommensurabili**”.

D efinizione

Due segmenti  $a$ ,  $u$  si dicono “**incommensurabili**” se **non hanno nessun sottomultiplo comune.**

# Elementi di Geometria euclidea

**TEOREMA - Il lato e la diagonale di uno stesso quadrato sono segmenti incommensurabili.**



# Elementi di Geometria euclidea

## **Dimostrazione.**

La dimostrazione si sviluppa per assurdo. Con riferimento alla figura, verificiamo che il lato AB e la diagonale AC del quadrato ABCD sono incommensurabili. Per assurdo, supponiamo che esista una grandezza U, omogenea sia al lato sia alla diagonale, che sia un sottomultiplo comune, cioè  $AC = n U$  e  $AB = m U$ .

Per il teorema di Pitagora  $AC^2 = AB^2 + BC^2$  e poiché  $AB = BC$  si ha  $AC^2 = AB^2 + AB^2 = 2AB^2$ .

Tenendo conto che  $AC = nU$  e  $AB = mU$  la formula precedente ci permette di affermare che  $n^2 \cdot U^2 = 2m^2 \cdot U^2$ .

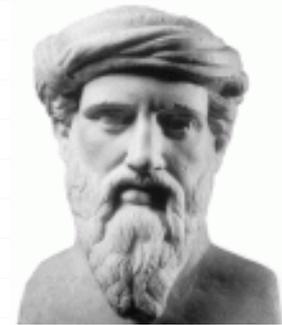
Dividendo per  $U^2$  ambo i membri dell'uguaglianza otteniamo  $n^2 = 2m^2$ , dove n e m sono due numeri naturali.

È abbastanza facile dimostrare che questa uguaglianza non può sussistere. Infatti, se m è un numero pari allora  $m^2$  avrà un numero pari di fattori uguali a 2 e quindi  $2m^2$  avrà un numero dispari di fattori uguali a 2, ciò implica che anche  $n^2$  deve avere un numero dispari di fattori uguali a 2; se m è dispari allora  $2m^2$  avrà un solo fattore uguale a 2 e di conseguenza non può essere uguale al quadrato di un numero n.

Da cui l'assurdo che m non può essere né pari né dispari.

# Elementi di Geometria euclidea

Storicamente, questa è stata la prima scoperta di grandezze incommensurabili, probabilmente dovuta al Ippaso di Metaponto, matematico vissuto tra Crotona e Metaponto (Calabria e Basilicata) nel 500 a.C.circa. La tradizione dice che morì in un naufragio per aver rivelato la scoperta dell'esistenza delle grandezze incommensurabili, in contrasto con il pensiero del maestro Pitagora.



# Elementi di Geometria euclidea

## NUMERI IRRAZIONALI

**Un numero si dice “irrazionale” se non è esprimibile sotto forma di frazione (intesa come “rapporto fra due numeri interi”).**

Esistono infiniti numeri razionali, ed esistono pure infiniti numeri irrazionali, ma, in un certo senso, **i numeri irrazionali sono “più infiniti ancora” dei razionali (la loro “numerosità” ha un “grado di infinito” maggiore).**

Se io “pesco a caso” un punto su di una *number line*, normalmente la sua ascissa sarà *irrazionale*;

sì, certo, potrebbe anche capitarmi di “beccare” un punto con ascissa *razionale*, ma la probabilità che ciò accada è *infinitamente piccola* !!!!!

# Elementi di Geometria euclidea

## MISURIAMO LE SUPERFICI

E per misurare le superfici, come si farà?

Così come, per misurare un segmento, si prende come unità di misura un altro segmento, per misurare una superficie si dovrà prendere come unità di misura un'altra superficie.

“Misurare” una superficie **A** significa dunque prendere un'altra superficie di riferimento **U** (che farà da “unità di misura”) e chiedersi quante volte la superficie **U** è contenuta in **A**.

Di solito, il calcolo della misura di una superficie è richiesto in un contesto nel quale già sono stati misurati dei segmenti, con l'utilizzo di un determinato segmento **u**, scelto come unità di misura.

Allora, è sempre conveniente adottare come unità di misura **U** per le superfici, il quadrato avente per lato il segmento **u**. Tale quadrato viene generalmente indicato col simbolo  $u^2$

# Elementi di Geometria euclidea

## LE “CLASSI DI GRANDEZZE”

Diciamo che si può parlare di “misura” ogniqualvolta si consideri una “**classe di grandezze**”.

Cos'è dunque una “classe di grandezze” ?

Prima di rispondere astrattamente a questa domanda, avvertiamo, a titolo di esempio, che sono classi di grandezze:

- l'insieme dei **segmenti**;
- l'insieme delle **superfici piane**;
- l'insieme degli **angoli**, se si ammette di poter anche “andare oltre il giro completo”;
- l'insieme degli **archi di una stessa circonferenza** (compresi quelli maggiori della circonferenza stessa);
- ... ecc.

# Elementi di Geometria euclidea

Si dice “**classe di grandezze**” un insieme  $I$  di oggetti matematici nel quale

- 1. siano definite tre relazioni, da indicarsi coi simboli  $=$ ,  $<$ ,  $>$**   
(dove s'intende che  $>$  indichi la relazione inversa di  $<$ )
- 2. sia definita un'operazione denominata “somma”, da indicarsi col simbolo  $+$**  (l'operazione inversa di  $+$  verrà indicata con  $-$ )

*NOTA - Il simbolo  $=$  potrà avere, a seconda del contesto, significati diversi: ad esempio*

- nel caso dei segmenti, dire che sono  $=$  significherà affermare che sono “congruenti, sovrapponibili”;*
- nel caso delle superfici,  $=$  avrà il significato di “equivalente”, ossia “avente la stessa estensione di”*

# Elementi di Geometria euclidea

**3. e le definizioni adottate siano tali che  $=$ ,  $<$ ,  $>$ ,  $+$  soddisfino ai seguenti ASSIOMI:**

- la relazione  $=$  dev'essere riflessiva, simmetrica e transitiva;
- date due qualsiasi grandezze  $A$  e  $B$ , deve verificarsi una e una sola delle tre eventualità  $A=B$ ,  $A<B$ ,  $A>B$  (**assioma della tricotomia**);
- la relazione  $<$  deve essere transitiva;
- l'operazione  $+$  dev'essere "ovunque definita" (cioè, per *qualsiasi* coppia di elementi  $A, B$  di  $I$ , la somma  $A+B$  deve potersi effettuare, con risultato che deve appartenere anch'esso all'insieme  $I$ ); dev'essere commutativa, associativa, e dotata di elemento neutro (detto "grandezza nulla");
- per ogni grandezza  $A$  dell'insieme  $I$ , e per ogni numero naturale non nullo  $n$ , deve esistere una e una sola grandezza  $B$  tale che  $nB=A$ , dove  $nB$  indica il risultato della somma di  $n$  addendi  $B+B+ \dots +B$ .

# Elementi di Geometria euclidea

Per ogni grandezza  $A$  dell'insieme  $I$ , e per ogni numero naturale non nullo  $n$ , deve esistere, ed essere unico, il “sottomultiplo di  $A$  secondo  $n$ ” (**assioma della divisibilità indefinita**);

- date due grandezze  $A, B$ , se  $A$  non è l'elemento neutro additivo (“grandezza nulla”) ed è  $B > A$ , allora deve esistere un numero naturale  $n$ , tale che  $nA > B$ ; in altre parole, data una grandezza non nulla  $A$  e data un'altra grandezza  $B$  maggiore di  $A$ , deve esistere un multiplo di  $A$ , che sia maggiore di  $B$  (**assioma di Archimede**);
- se due sottoinsiemi  $I', I''$  di  $I$  sono tali che ogni elemento di  $I'$  è  $<$  di ogni elemento di  $I''$ , allora esiste almeno un elemento di  $I$ , che sia  $\geq$  di tutti gli elementi di  $I'$  e  $\leq$  di tutti gli elementi di  $I''$  (**assioma di continuità**)

# Elementi di Geometria euclidea

## MISURA DI UNA GRANDEZZA

“**Misurare**” una grandezza  $A$  significa **confrontarla** con un'altra grandezza  $U$  della stessa classe; quindi, con una grandezza che sia “**omogenea**” con quella da misurare (“omogenea” = “della stessa specie”).

$U$  assumerà il ruolo di “**unità di misura**” e si tratterà di esprimere, mediante un numero reale, “**quante volte  $U$  è contenuta in  $A$** ”.

In analogia a quanto visto coi segmenti, si vede che il procedimento di misura può condurre, a seconda dei casi:

- ad un **numero intero** (quando, sommando più grandezze tutte uguali a  $U$ , si riesce a ottenere esattamente  $A$ );
- ad una **frazione**, ovvero ad un numero razionale (quando sia necessario ricorrere ai sottomultipli di  $U$ );
- ad un **numero irrazionale** (quando accade che  $A$  e  $U$  sono “incommensurabili” ossia non ammettono alcun sottomultiplo comune).

# Elementi di Geometria euclidea

**Cos'è, dunque, il “rapporto fra due grandezze omogenee”?**

E' la misura della prima grandezza, quando la seconda venga assunta come unità di misura;

in altre parole, è il numero che esprime “quante volte la seconda grandezza è contenuta nella prima”.

**TEOREMA (“del rapporto”):**

**Il rapporto  $A/B$  o  $A:B$  fra due grandezze omogenee  $A$  e  $B$ , è uguale al quoziente fra le loro misure, calcolate rispetto ad una qualsivoglia unità di misura comune  $U$ .**

**CLASSI DI GRANDEZZE IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA**

Si dice che due insiemi sono in “**corrispondenza biunivoca**”

se è stata fissata una legge che faccia corrispondere ad ogni elemento del primo insieme, uno e un solo elemento del secondo insieme, E VICEVERSA.

# Elementi di Geometria euclidea

## CLASSI DI GRANDEZZE DIRETTAMENTE PROPORZIONALI

Quando abbiamo due classi di grandezze, una classe  $G$  e un'altra classe  $G'$ , legate fra loro da una corrispondenza biunivoca, diremo che  $G$  e  $G'$  sono "direttamente proporzionali" se accade che il rapporto fra due qualsivoglia grandezze della classe  $G$ , è uguale al rapporto delle grandezze che ad esse corrispondono in  $G'$ .

Dunque, due classi di grandezze  $G$  e  $G'$  in corrispondenza biunivoca fra loro sono direttamente proporzionali quando, prese due qualunque grandezze  $A, B$  in  $G$ , e considerate le rispettive corrispondenti  $A'$  e  $B'$  in  $G'$ , si ha sempre  $A:B = A':B'$  o, se si preferisce, quando sussiste l'implicazione

$$\frac{A}{B} = \alpha \Rightarrow \frac{A'}{B'} = \alpha (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0)$$

In altre parole ancora, affinché due classi di grandezze  $G$  e  $G'$ , in corrispondenza biunivoca fra loro, siano direttamente proporzionali, deve accadere che se  $A$  è il doppio di  $B$ , allora la grandezza  $A'$  (corrispondente di  $A$ ) è il doppio della grandezza  $B'$  (che corrisponde a  $B$ );  
se  $A$  è il triplo di  $B$ , allora la grandezza  $A'$  (corrispondente di  $A$ ) è il triplo della grandezza  $B'$  (che corrisponde a  $B$ );

...

# Elementi di Geometria euclidea

*Preso una circonferenza  $\Gamma$ , consideriamo la classe degli angoli al centro e la classe degli archi (classi in corrispondenza biunivoca fra loro).*

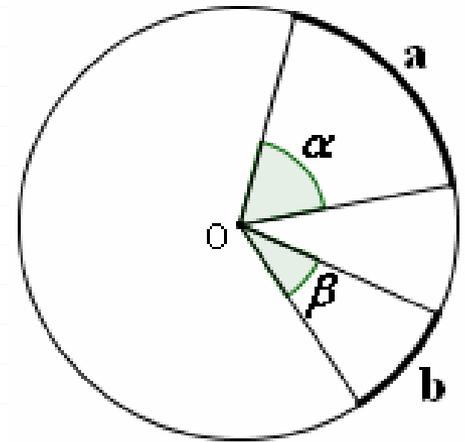
*Supponiamo che l'angolo  $\alpha$  sia il doppio di  $\beta$  così che il rapporto  $\alpha:\beta$  sia 2.*

*Allora si capisce che l'arco  $a$  corrispondente ad  $\alpha$  sarà il doppio dell'arco  $b$  corrispondente a  $\beta$ , cosicché anche  $a : b = 2$ .*

*E' intuitivo che, presi due qualsivoglia angoli al centro  $\alpha, \beta$  e detti  $a, b$  i corrispondenti archi, varrà sempre la proporzione*

$$\alpha : \beta = a : b .$$

*L'intuizione ci dice che gli angoli al centro in una data circonferenza, e gli archi di quella stessa circonferenza, sono due classi di grandezze direttamente proporzionali*



# Elementi di Geometria euclidea

## IL “CRITERIO DI PROPORZIONALITA”

### TEOREMA (“Criterio di Proporzionalità”)

Se due classi di grandezze  $G, G'$  sono in corrispondenza biunivoca, e accade che:

i)  $A = B \Rightarrow A' = B'$  ossia:

a due grandezze che sono uguali in  $G$  corrispondono sempre due grandezze, che sono uguali in  $G'$

ii)  $A = B + C \Rightarrow A' = B' + C'$  cioè :

ad una grandezza  $A$ , in  $G$ , che sia la somma di due altre grandezze, corrisponde sempre, in  $G'$ , quella grandezza  $A'$ , che è la somma delle rispettive corrispondenti allora quelle due classi di grandezze sono direttamente proporzionali.

# Elementi di Geometria euclidea

## L'EQUIVALENZA DELLE SUPERFICI PIANE

Una “**superficie piana**” è una porzione di piano, limitata da una linea chiusa.

Ad esempio, sono superfici piane i poligoni, o i cerchi.

L’ “**estensione**” di una superficie piana è “la quantità di piano occupata dalla superficie”.

*“Superficie” ed “estensione” sono “concetti primitivi”, la cui descrizione è insita implicitamente negli assiomi che ad essi si riferiscono.*

Due superfici con uguale estensione sono dette “**equivalenti**”.

*Se prendiamo una lamiera di metallo e ritagliamo da essa due porzioni di ugual peso, avremo l'idea di due superfici equivalenti. Ancora: l'imbianchino che impieghi la stessa quantità di vernice per pitturare due diverse pareti, ha verniciato due superfici equivalenti.*

# Elementi di Geometria euclidea

## **ASSIOMI della relazione di “equivalenza fra superfici piane”**

**1. Due superfici uguali (= congruenti) sono equivalenti**

**2. L'equivalenza delle superfici piane gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva**

• PROPRIETA' RIFLESSIVA  $\forall A, A = A$

Ogni superficie è equivalente a sé stessa

• PROPRIETA' SIMMETRICA  $A = B \rightarrow B = A$

Se una superficie **A** è equivalente ad una superficie **B**, allora anche **B** è equivalente ad **A**

• PROPRIETA' TRANSITIVA  $(A = B \wedge B = C) \rightarrow A = C$

Se una superficie **A** è equivalente ad una superficie **B**, e la superficie **B** a sua volta è equivalente ad una superficie **C**, allora **A** è equivalente a **C**:

In altre parole, due superfici equivalenti ad una terza sono equivalenti fra loro.

**3. Somme, o differenze, di superfici equivalenti (in particolare: uguali), sono equivalenti**

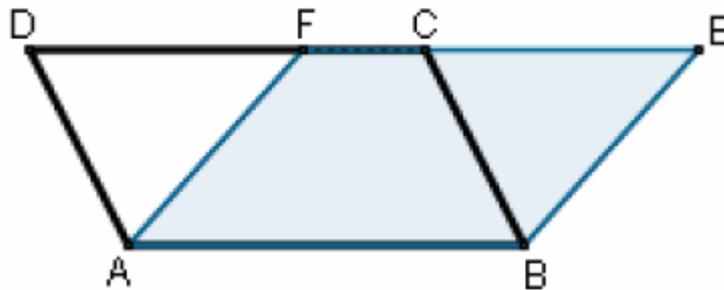
# Elementi di Geometria euclidea

COROLLARIO dell'assioma 3:

**Due superfici equiscomponibili (ossia: scomponibili in parti rispettivamente uguali) sono equivalenti**

TEOREMA.

**Due parallelogrammi aventi ugual base e uguale altezza sono equivalenti**



IPOTESI: ABCD, ABEF parallelogrammi con ugual base e uguale altezza

TESI:  $ABCD = ABEF$

# Elementi di Geometria euclidea

## **DIMOSTRAZIONE**

I due triangoli ADF, BCE sono uguali per il Primo Criterio perché hanno:

$AD = BC$  (lati opposti di un parallelogrammo);

$AF = BE$  (stesso motivo);

$\hat{D}AF = \hat{C}BE$  (angoli coi lati paralleli e concordi).

Quindi:  $ABED \doteq ABED$  (ogni superficie è equivalente a sé stessa : assioma 2, proprietà riflessiva dell'equivalenza )

$ADF \doteq BCE$  (due superfici uguali sono anche equivalenti : assioma 1)

Per sottrazione, si ottiene

$$ABEF \doteq ABCD$$

## **DIMOSTRAZIONE**

I due triangoli ADF, BCE sono uguali per il Primo Criterio perché hanno:

$AD = BC$  (lati opposti di un parallelogrammo);

$AF = BE$  (stesso motivo);

$\hat{D}AF = \hat{C}BE$  (angoli coi lati paralleli e concordi).

Quindi:  $ABED \doteq ABED$  (ogni superficie è equivalente a sé stessa : assioma 2, proprietà riflessiva dell'equivalenza )

$ADF \doteq BCE$  (due superfici uguali sono anche equivalenti : assioma 1)

Per sottrazione, si ottiene

$$ABEF \doteq ABCD$$

## **COROLLARIO**

**Un parallelogrammo è equivalente ad un rettangolo avente ugual base e uguale altezza**

# Elementi di Geometria euclidea

TEOREMA.

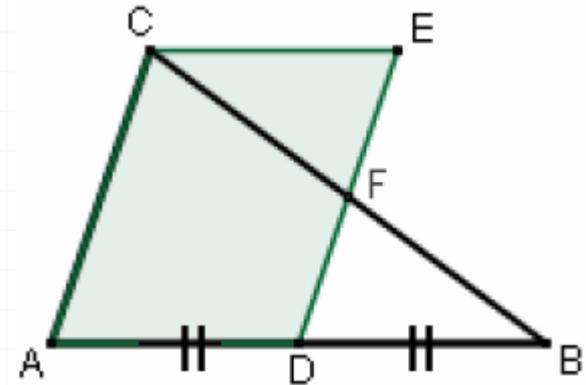
**Un triangolo è equivalente a un parallelogrammo avente base uguale a metà base del triangolo, e per altezza la stessa altezza**

IPOSTESI:

ABC triangolo, ADEC parallelogrammo  
con  $AD = \frac{1}{2}AB$ , e stessa altezza di ABC

TESI:

$ABC \doteq ADEC$



DIMOSTRAZIONE

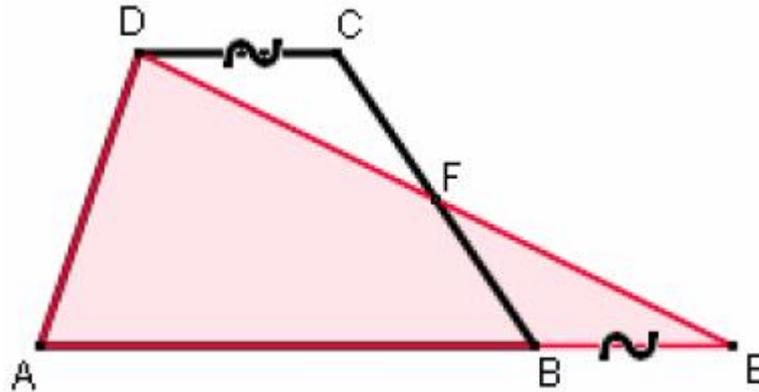
I due triangoli DBF, EFC sono uguali per il Secondo Criterio (due parallele, alterni interni,  $DB=AD=CE$ ).

Possiamo allora scrivere la catena  $ABC = ADFC + DBF \doteq ADFC + EFC = ADEC$ , che dimostra la tesi.

# Elementi di Geometria euclidea

TEOREMA.

**Un trapezio è equivalente a un triangolo avente base uguale alla somma delle basi del trapezio, e per altezza la stessa altezza**



**IPOSTESI:** ABCD trapezio;  $BE = DC$ , così che il triangolo AED abbia base uguale alla somma delle basi del trapezio, e per altezza la stessa altezza del trapezio

**TESI:**  $ABCD \doteq AED$

**DIMOSTRAZIONE**

I due triangoli FCD e FBE sono uguali per il Secondo Criterio. Ne consegue  $ABCD = ABFD + FCD \doteq ABFD + FBE = AED$ , c.v.d.

# Elementi di Geometria euclidea

## IL 1° TEOREMA DI EUCLIDE

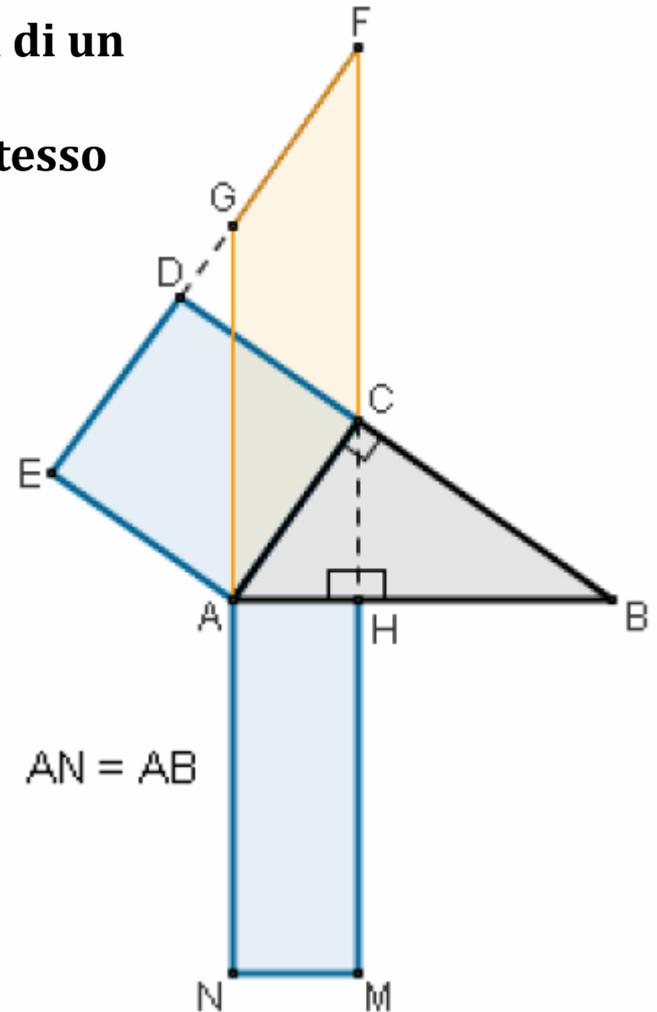
In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito su di un cateto è equivalente al rettangolo, avente per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa:

$$q(AC) \doteq r(AB, AH)$$

il 1° Teorema di Euclide enunciato IN FORMA ARITMETICA:

In un triangolo rettangolo, il quadrato di un cateto (nel senso di “la misura del cateto, elevata alla seconda”) è uguale al prodotto dell'ipotenusa per la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa (ci si riferisce al prodotto delle misure, ovviamente):

$$AC^2 = AB \cdot AH$$



# Elementi di Geometria euclidea

## DIMOSTRAZIONE

La figura mostra:

- un triangolo rettangolo ABC;
- il quadrato ACDE costruito su di un cateto;
- e il rettangolo AHMN, il quale, poiché si è preso  $AN = AB$ , ha una dimensione uguale all'ipotenusa AB, e l'altra dimensione uguale alla proiezione AH del cateto AC prima considerato, sull'ipotenusa.

Vogliamo dimostrare che le due superfici  $ACDE = q(AC)$  e  $AHMN = r(AB, AH)$  sono equivalenti.

A tale scopo, prolunghiamo i tre segmenti NA, MC, ED, in modo da ottenere il parallelogrammo ACFG.

Tale parallelogrammo farà da “figura-ponte”: faremo vedere che è equivalente sia al quadrato, che al rettangolo.

E con ciò resterà dimostrato, per la proprietà transitiva dell'equivalenza, che il quadrato ACDE e il rettangolo AHMN sono equivalenti fra loro.

Ora, che il parallelogrammo ACFG e il quadrato ACDE siano equivalenti è immediato:

infatti, se si prende AC come base sia per ACFG che per ACDE, si vede che il segmento CD fa da altezza per entrambi, quindi il parallelogrammo e il quadrato sono equivalenti perché hanno stessa base e stessa altezza.

# Elementi di Geometria euclidea

Un poco più impegnativo è dimostrare che sono equivalenti il rettangolo AHMN e il parallelogrammo ACFG.

AHMN e ACFG sono inscritti nella stessa striscia, avente per lati le due rette NG ed MF: quindi, se si prendono come rispettive basi AN e AG, hanno la stessa altezza (ad esempio, il segmento AH fa da altezza per entrambi).

Si tratta allora di dimostrare che hanno anche ugual base, cioè che risulta  $AN = AG$ . Ma  $AN = AB$ , quindi se riusciamo a far vedere che  $AB = AG$ , la nostra dimostrazione sarà completata.

A tale scopo, confrontiamo i due triangoli ABC, AGE: se riusciamo a dimostrarli uguali, siamo a posto.

In effetti tali due triangoli hanno:

- $AC = AE$  perché lati di un quadrato;
- $\hat{A}CB = \hat{A}EG = 90^\circ$
- $\hat{C}AB = \hat{E}AG$  perché complementari dello stesso angolo  $\hat{G}AC$   
( $\hat{C}AB = \hat{G}AB - \hat{G}AC = 90^\circ - \hat{G}AC = \hat{CAE} - \hat{G}AC = \hat{E}AG$ )

E' dunque  $ABC = AGE$  per il Secondo Criterio, come intendevamo provare.

La tesi è perciò dimostrata.

# Elementi di Geometria euclidea

## IL TEOREMA DI PITAGORA

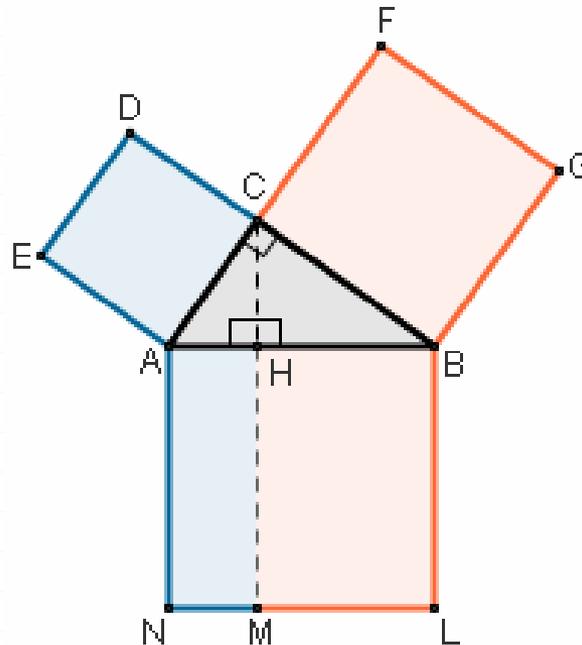
**In un triangolo rettangolo, la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa**

$$q(AC) + q(BC) \doteq q(AB)$$

## Il Teorema di Pitagora enunciato IN FORMA ARITMETICA

**In un triangolo rettangolo, la somma dei quadrati dei cateti ("quadrato" nel senso di "misura elevata alla seconda") è uguale al quadrato dell'ipotenusa**

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$



# Elementi di Geometria euclidea

## DIMOSTRAZIONE

La figura mostra:

- un triangolo rettangolo  $ABC$ ;
- i quadrati  $ACDE$  e  $CBGF$  costruiti sui cateti e il quadrato  $ABLN$  costruito sull'ipotenusa.

E' stata anche tracciata l'altezza  $CH$  relativa all'ipotenusa, poi prolungata fino ad incontrare il segmento  $NL$  in  $M$ .

In questo modo, sono comparsi nella figura due rettangoli:

- $AHMN$ , che ha una dimensione uguale all'ipotenusa, e l'altra dimensione uguale alla proiezione del cateto  $AC$  sull'ipotenusa;
- $HBLM$ , che ha una dimensione uguale all'ipotenusa, e l'altra dimensione uguale alla proiezione del cateto  $BC$  sull'ipotenusa.

Ora si ha

$$AHMN \doteq ACDE \text{ (1° Teorema di Euclide)}$$

$$HBLM \doteq CBGF \text{ (1° Teorema di Euclide)}$$

Sommando membro a membro si ha la tesi

# Elementi di Geometria euclidea

## IL 2° TEOREMA DI EUCLIDE

In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per dimensioni le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa

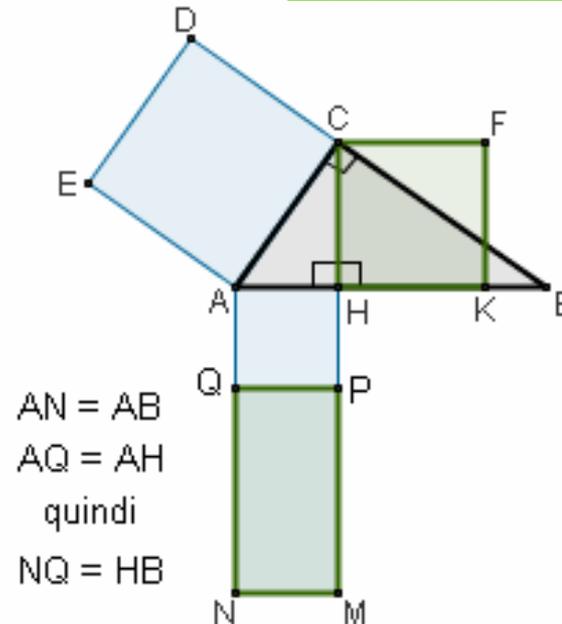
$$q(CH) \doteq r(AH, HB)$$

## Il 2° Teorema di Euclide

Enunciato IN FORMA ARITMETICA:

In un triangolo rettangolo, il quadrato dell'altezza relativa all'ipotenusa è uguale al prodotto delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa

$$CH^2 = AH \cdot HB$$



# Elementi di Geometria euclidea

## DIMOSTRAZIONE

Nella figura compaiono:

- un triangolo rettangolo ABC;
- il quadrato ACDE costruito sul cateto AC;
- il quadrato CHKF costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa (CH);
- il rettangolo AHMN, che è una “vecchia conoscenza” proveniente dal Primo Teorema di Euclide:

infatti la dimensione AN è stata presa uguale all'ipotenusa AB. Poi sul segmento AN è stato preso un segmento  $AQ = AH$  e da Q è stata tracciata la parallela QP ad AH, così da ottenere il quadrato AHPQ ed il rettangolo NMPQ.

Quest'ultimo rettangolo ha una dimensione uguale ad AH, mentre l'altra sua dimensione è

$$NQ = AN - AQ = AB - AH = HB.$$

Insomma, NMPQ ha le due dimensioni uguali alle proiezioni AH, HB dei due cateti sull'ipotenusa, ed è dunque il rettangolo di cui parla la tesi.

Si tratta, in definitiva, di dimostrare che il quadrato CHKF è equivalente al rettangolo NMPQ.

E tale equivalenza si può provare con la seguente catena:

$$CHKF \doteq ACDE - AHPQ \doteq AHMN - AHPQ \doteq NMPQ$$

# Elementi di Geometria euclidea

## ESERCIZIO n.1

In un triangolo rettangolo PQR, di ipotenusa QR, le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano rispettivamente 9 cm e 16 cm. Determinare perimetro e area del triangolo.

## ESERCIZIO n.2

In un triangolo rettangolo i cui lati misurano 5, 12 e 13, quali sono le misure delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa? E dell'altezza relativa all'ipotenusa?

## ESERCIZIO n.3

In un triangolo rettangolo, un cateto misura metri 9, e l'altro cateto è inferiore di 1 metro all'ipotenusa. Determina tutti i lati del triangolo.

## ESERCIZIO n.4

In un triangolo rettangolo, i cateti sono uno i  $\frac{3}{4}$  dell'altro e il perimetro misura  $36a$ . Determinare l'area.

# Elementi di Geometria euclidea

## La sezione aurea

**Definizione.** La sezione aurea di un segmento AB è quella parte AC del segmento media proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente CB.



In riferimento alla figura si ha  $AB : AC = AC : CB$ .

## Il punto di vista algebrico

Dato un qualunque segmento AB di misura  $a$ , è sempre possibile determinare su di esso il punto C tale che valga la proporzione  $AB : AC = AC : CB$ ?

La risposta è affermativa. Infatti, poniamo  $AC = x \rightarrow CB = a - x$  e riscriviamo la proporzione passando alle misure:  $a : x = x : (a - x)$ .

Per la proprietà fondamentale delle proporzioni numeriche si ottiene

$x^2 = a(a - x)$ , da cui sviluppando i calcoli si ha l'equazione di secondo grado  $x^2 + ax - a^2 = 0$

L'equazione ammette due soluzioni, di cui una negativa che va scartata. Rimane la soluzione

$$x = a \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

# Elementi di Geometria euclidea

## La similitudine nei triangoli

La definizione di triangoli simili non si differenzia da quella data per i poligoni. Per i triangoli, però, esistono dei teoremi, detti criteri, che permettono di verificare se due triangoli sono simili restringendo le verifiche da effettuare.

**Teorema** (I criterio di similitudine). Due triangoli aventi due angoli rispettivamente congruenti sono simili.

**Teorema** (II criterio di similitudine). Due triangoli aventi due lati in proporzione e l'angolo tra essi compreso congruente sono simili.

**Teorema** (III criterio di similitudine). Due triangoli aventi i lati in proporzione sono simili.