

*Prof. Roberto Capone*

# Euclide (parte II)

Corso di Didattica della Matematica  
2015/2015  
Corso di Laurea in Scienze della Formazione  
Primaria



# Elementi di Geometria euclidea

## **Proprietà dei triangoli isosceli**

Il triangolo isoscele ha almeno due lati congruenti, l'eventuale lato non congruente si chiama base, i due lati congruenti si dicono lati obliqui.

Il triangolo equilatero è un caso particolare di triangolo isoscele: si dice che il triangolo equilatero è isoscele rispetto a qualsiasi lato preso come base

# Euclide

## Teorema diretto dei triangoli isosceli

*In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti.*

Ipotesi:  $AC \cong BC$

Tesi:  $\hat{B}AC \cong \hat{A}BC$

### Dimostrazione

Tracciamo la bisettrice CK dell'angolo in C .

I triangoli ACK e BCK sono congruenti per il primo criterio, infatti hanno:

$AC \cong BC$  per ipotesi, CK lato in comune

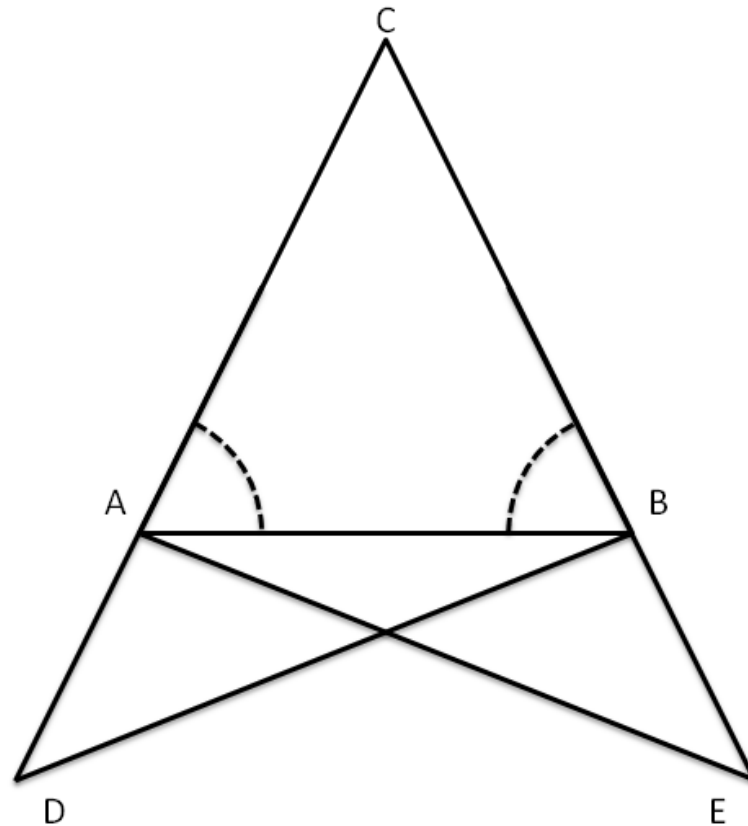
$$\hat{A}CK \cong \hat{B}CK$$

perché CK è la bisettrice dell'angolo in C .

Pertanto, essendo congruenti hanno tutti gli elementi congruenti, in particolare l'angolo in A è congruente all'angolo in B . Q.e.d.

# Euclide

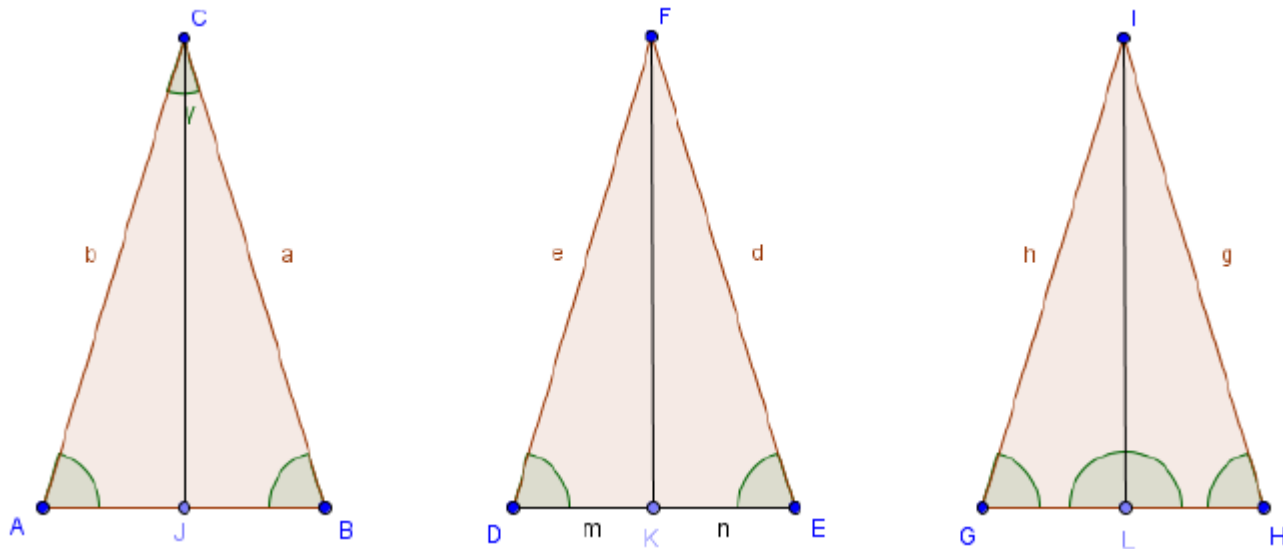
Il teorema precedente è invertibile, nel senso che è valido anche il teorema inverso, quello che si ottiene scambiando ipotesi e tesi. (si tratta del teorema del pons asinorum)



# Euclide

## Proprietà del Triangolo isoscele

*In ogni triangolo isoscele, la mediana relativa alla base è anche altezza e bisettrice.*



## Corollari

Un triangolo equilatero è anche equiangolo.

Viceversa, se un triangolo è equiangolo, allora è equilatero.

Un triangolo scaleno non ha angoli congruenti.

Viceversa, se un triangolo non ha angoli congruenti, allora è scaleno.

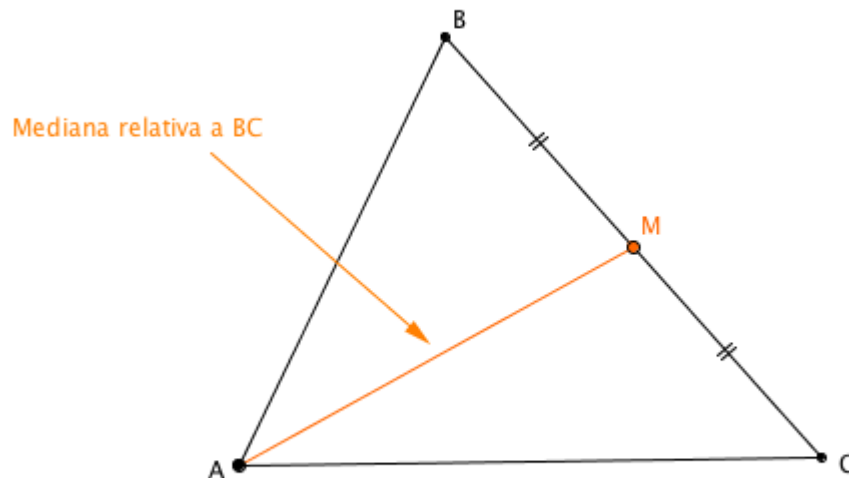
# Euclide

## Mediane e baricentro

Consideriamo un triangolo  $ABC$  ed individuiamo il punto medio di ciascun lato. Ogni punto medio così ottenuto può essere collegato con un segmento al vertice opposto.

### Definizione

Si chiama *mediana relativa ad un lato* di un triangolo il segmento ottenuto collegando il punto medio del lato considerato con il vertice opposto al lato



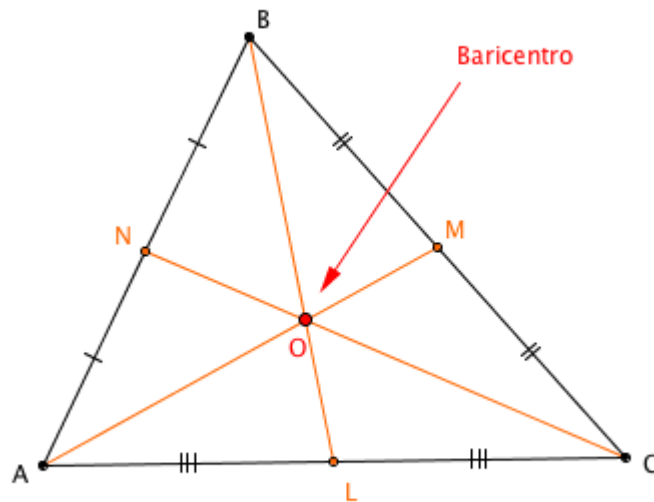
# Euclide

Le mediane hanno le seguenti proprietà:

- Ogni mediana divide il triangolo in due triangoli equivalenti. Riferendoci alla figura precedente, abbiamo quindi  $\text{Area}(\text{ABM}) = \text{Area}(\text{MAC})$ .
- Le mediane di un triangolo si incontrano tutte nello stesso punto

## Definizione

*Il punto di incontro delle tre mediane di un triangolo è detto baricentro del triangolo*



# Euclide

Elenchiamo qui alcune proprietà del baricentro:

- esso divide la mediana in due segmenti: il segmento che ha per estremo un vertice del triangolo è il doppio dell'altro (nella figura precedente, ad esempio:  $AO \cong 2OM$ ).
- è sempre un punto interno al triangolo.

## Altezze e ortocentro

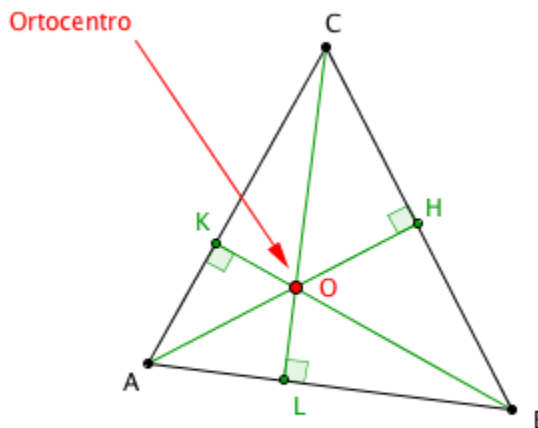
Dato un triangolo  $ABC$ , consideriamo le tre possibili altezze che possiamo costruire relativamente a ciascun lato. Si dimostra che le altezze si incontrano tutte in un medesimo punto.

### Definizione

Si chiama *ortocentro* di un triangolo il punto di incontro delle altezze relative ai lati del triangolo considerato



# Euclide



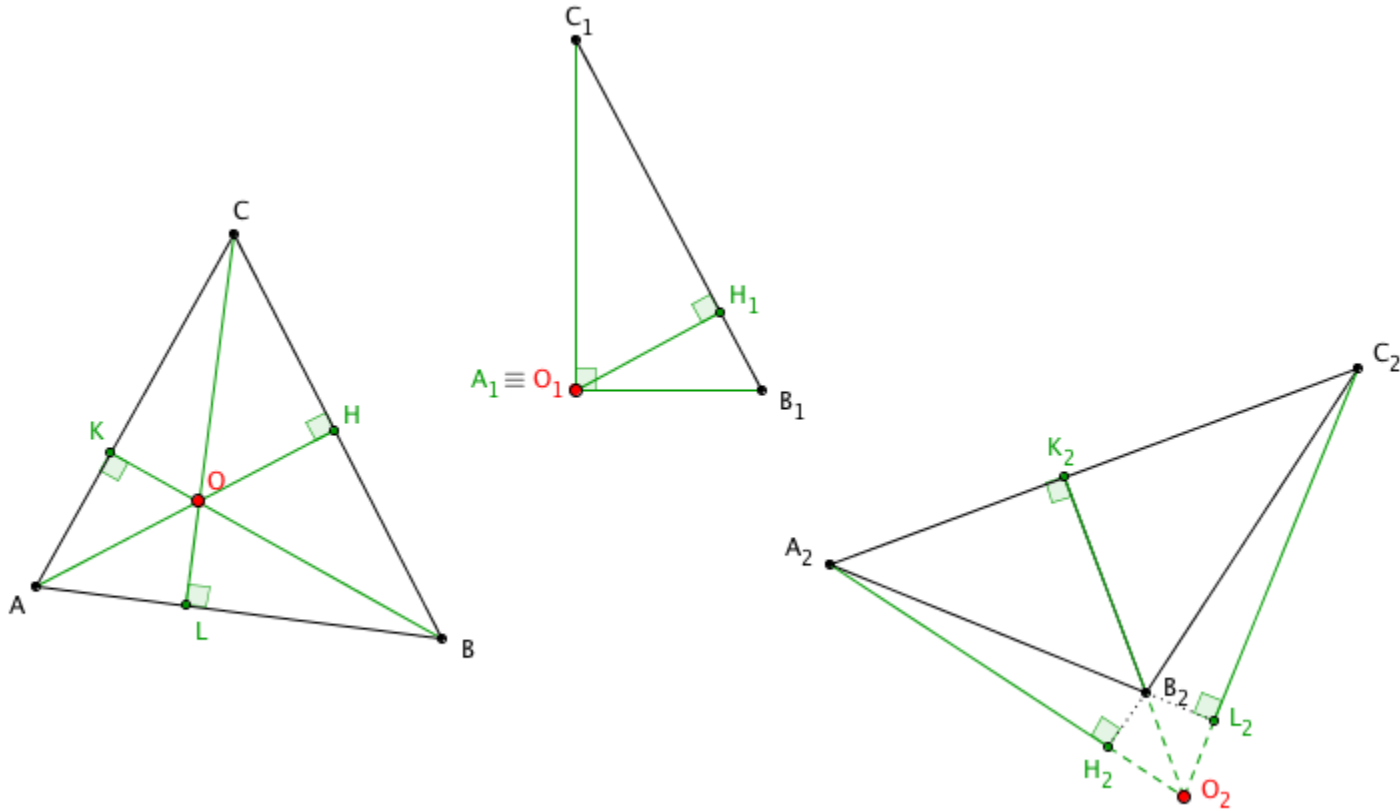
La posizione dell'ortocentro può essere messa in relazione con le caratteristiche degli angoli di un triangolo.

L'ortocentro è un punto interno al triangolo se e solo se il triangolo è acutangolo.

L'ortocentro è un punto esterno al triangolo se e solo se il triangolo è ottusangolo.

L'ortocentro coincide con uno dei vertici del triangolo se e solo se il triangolo è rettangolo (e in questo caso l'ortocentro coincide con il vertice corrispondente all'angolo retto).

# Euclide

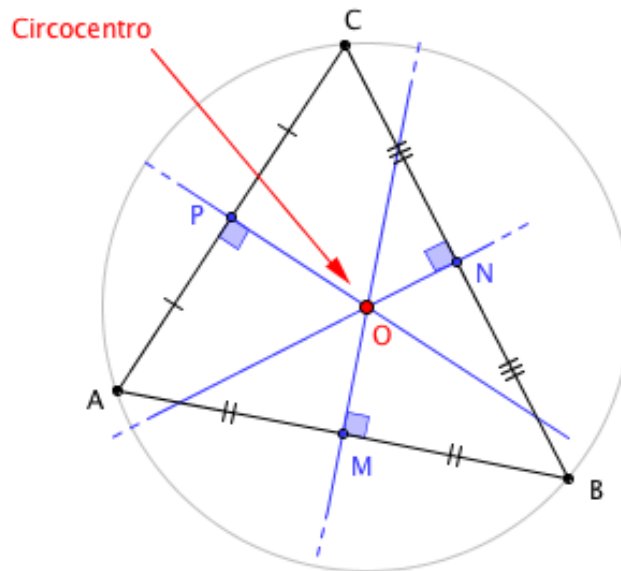


## Assi e circocentro

Consideriamo nuovamente un triangolo ABC e costruiamo i tre assi relativi ai tre lati del triangolo. Queste tre rette si intersecano nello stesso punto (fatto non banale, ma che si può dimostrare).

### Definizione

Si chiama circocentro di un triangolo il punto di incontro delle assi relative ai lati del triangolo considerato.



# Euclide

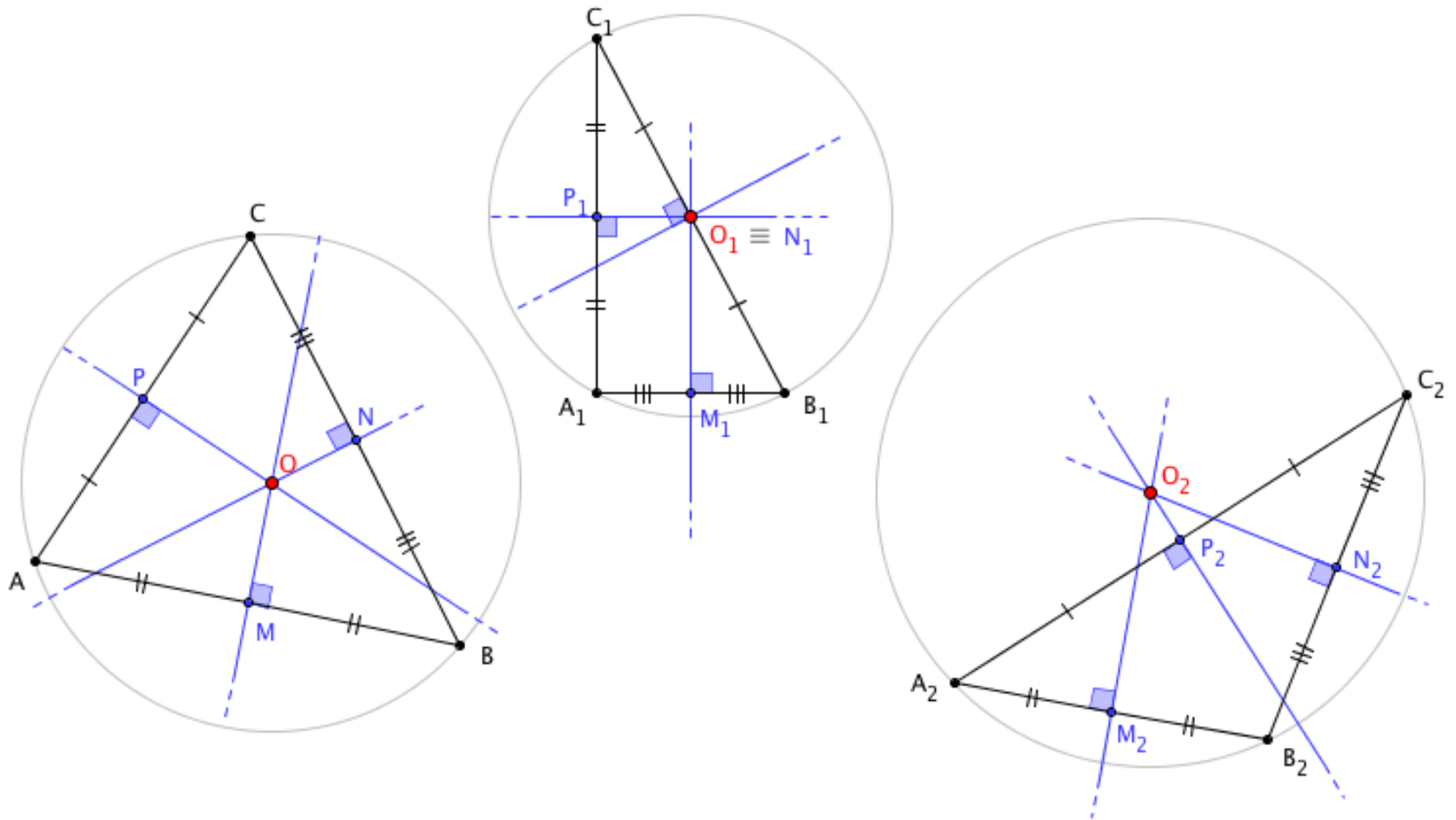
Tra le proprietà del circocentro, ricordiamo che:

- è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo;
- è equidistante dai vertici del triangolo (segue dalla proprietà precedente).

Come accade per l'ortocentro, la sua posizione determina le caratteristiche degli angoli del triangolo. In particolare:

- il circocentro è un punto interno al triangolo se e solo se il triangolo è acutangolo;
- il circocentro è un punto esterno al triangolo se e solo se il triangolo è ottusangolo;
- il circocentro è il punto medio di uno dei lati se e solo se il triangolo è rettangolo (ed in questo caso il lato in questione è l'ipotenusa del triangolo).

# Euclide



# Euclide

## ***Teorema di Eulero***

Il circocentro, il baricentro e l'ortocentro di un triangolo equilatero sono coincidenti.

Se il triangolo non è equilatero, tuttavia, questi tre punti notevoli hanno una interessante proprietà: essi sono *sempre allineati*, ovvero giacciono sulla medesima retta. Questa retta viene chiamata *retta di Eulero*.

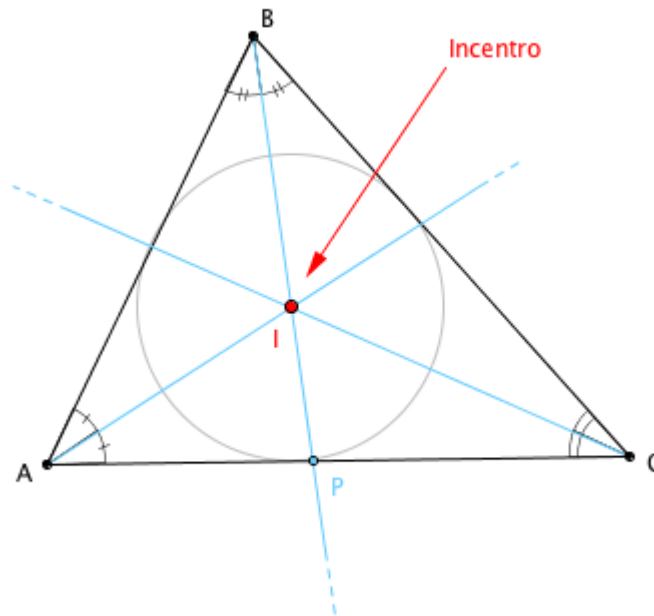
# Euclide

## Bisettrici e incentro

Nel triangolo  $ABC$  consideriamo le tre bisettrici degli angoli  $B\hat{A}C$ ,  $A\hat{B}C$  e  $B\hat{C}A$ . È possibile dimostrare che esse si incontrano in un solo punto.

## Definizione

Si chiama **incentro** di un triangolo il punto di incontro delle bisettrici degli angoli interni al triangolo considerato.



# Euclide

## **Proprietà dell'incentro.**

- È sempre un punto interno al triangolo.
- È il centro della circonferenza inscritta nel triangolo.

Come conseguenza della proprietà precedente:

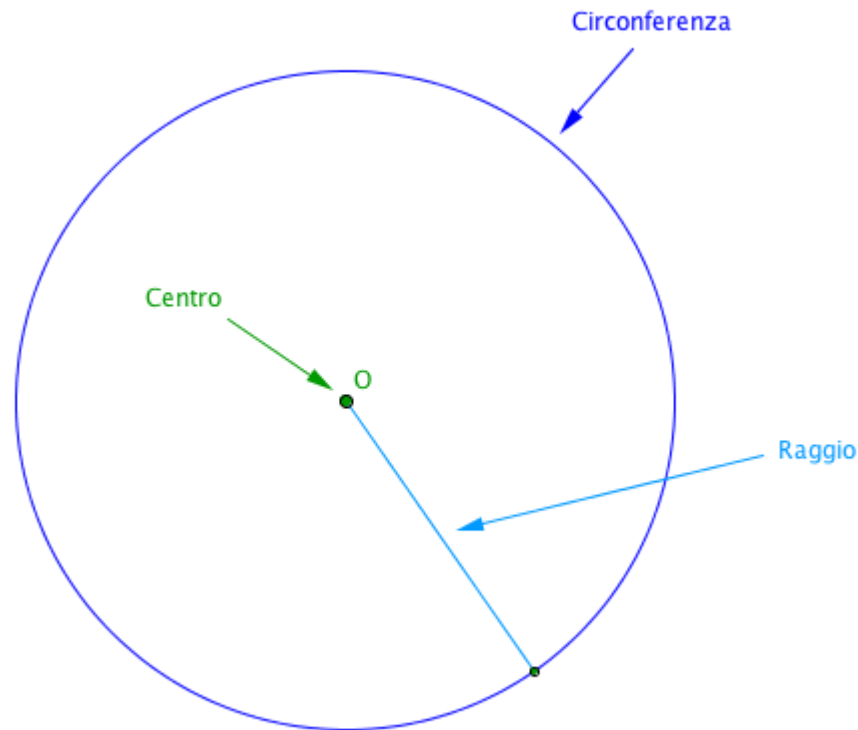
- la distanza dell'incentro da un lato del triangolo è la stessa, indipendentemente da lato scelto.
- Ogni bisettrice divide il triangolo considerato in due triangoli più piccoli. Consideriamone uno (per esempio BCP) e prendiamo il lato costituito dalla bisettrice. L'incentro divide questo lato in due segmenti. La proporzione tra questi segmenti è la stessa che c'è tra gli altri due lati del triangolo considerato. Nel caso del triangolo BCP,  $BI:IP=BC:CP$ . Lo stesso discorso può essere ripetuto per il triangolo ABP, ottenendo  $BI:IP=AB:AP$ .



# Euclide

## Definizione

Consideriamo un punto  $O$ . Tutti i punti del piano che hanno la medesima distanza da  $O$  formano una figura geometrica, che chiamiamo circonferenza. Il punto  $O$  viene detto centro della circonferenza. La distanza assegnata che determina la circonferenza viene chiamato raggio.

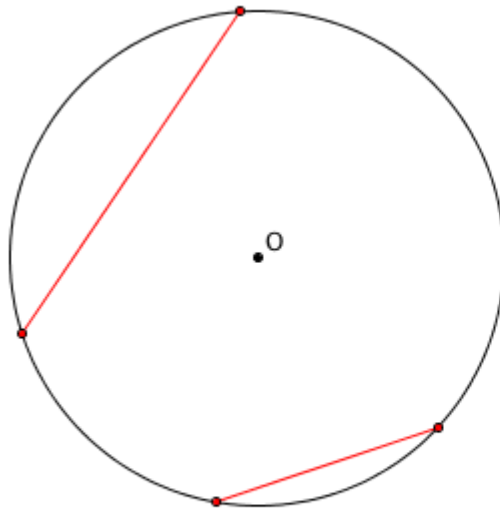


# Euclide

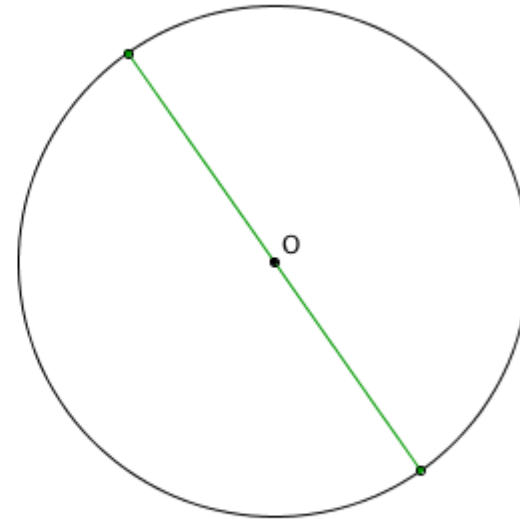
## Definizione

Ogni segmento che collega due punti sulla circonferenza si chiama *corda*.

Una corda di una circonferenza che passa per il suo centro si chiama *diametro*.



Corde di una circonferenza



Diametro di una circonferenza

# Euclide

## Definizione

La circonferenza è una linea chiusa, che suddivide il piano in *punti interni* e *punti esterni* alla circonferenza. La figura costituita dai punti interni alla circonferenza e dalla circonferenza stessa viene chiamata *cerchio*

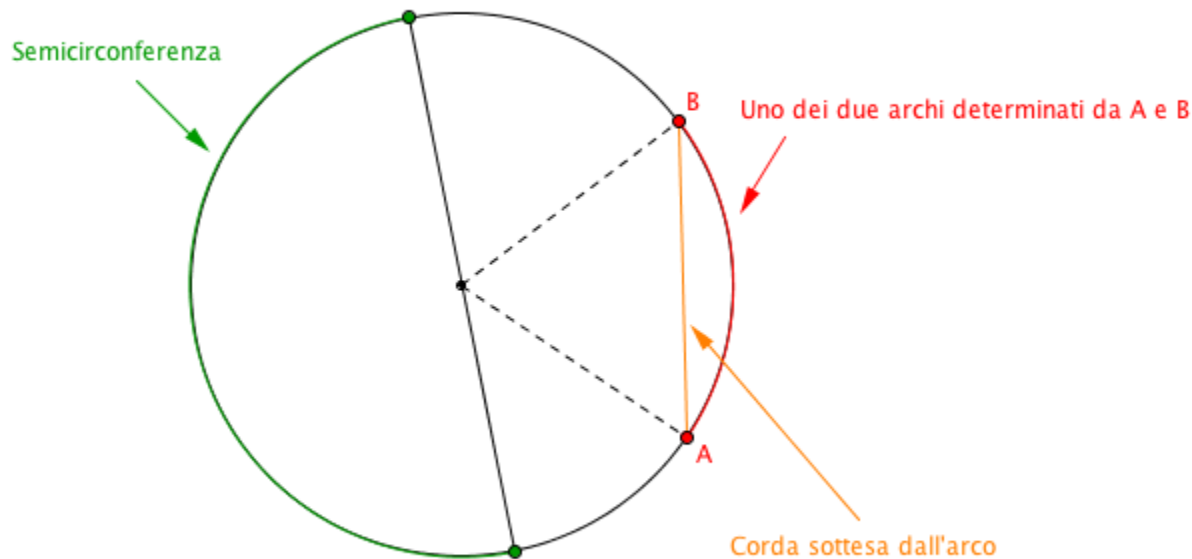


**ATTENZIONE:** Un errore molto comune è quello di scambiare il cerchio per la circonferenza, e viceversa. Ribadiamo che la circonferenza è solamente il contorno del cerchio; la circonferenza è quindi una *linea*, che si misura come una *lunghezza*, mentre il cerchio è una *superficie*, che si misura come un'*area*.

## Definizione

Consideriamo una circonferenza e due punti A e B su di essa. Si chiama arco di circonferenza di estremi A e B una delle due parti di circonferenza delimitate da A e B. Se colleghiamo A e B, otteniamo una corda, e diremo che la corda AB è sottesa da ciascuno dei due archi determinati da A e B.

Un arco che sottende un diametro è chiamato semicirconferenza.



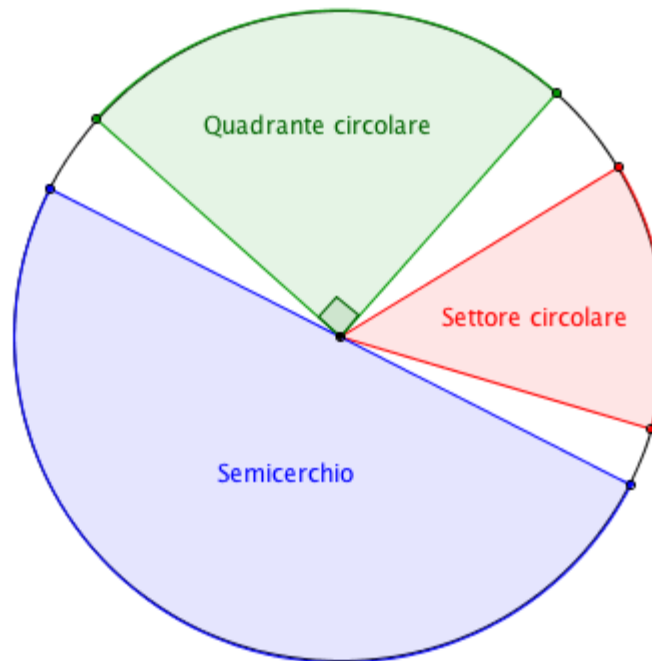
# Euclide

## Definizione

La parte di piano racchiusa da un arco di circonferenza e dai raggi che passano per i suoi estremi si chiama *settore circolare*.

Un settore circolare determinato da due raggi perpendicolari viene chiamato *quadrante circolare*.

Un settore circolare in cui un raggio è il prolungamento dell'altro è detto *semicerchio*.

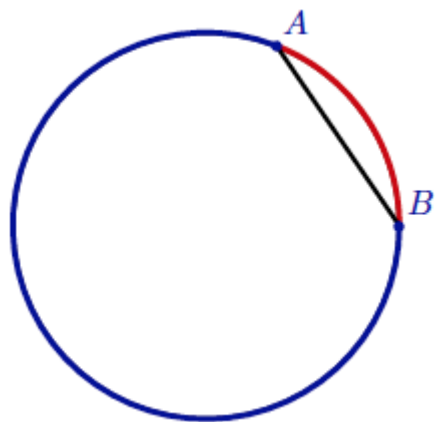


# Euclide

## Lunghezza di un arco di circonferenza

### Definizione 1.

Una qualsiasi coppia di punti distinti appartenenti a una circonferenza la divide in due parti. Ciascuna di esse è detta arco di circonferenza e i due punti che lo individuano sono chiamati estremi dell'arco.



### Definizione 2.

Per lunghezza dell'arco di circonferenza si intende il numero reale positivo che esprime l'estensione dell'arco secondo la comune nozione intuitiva.

# Euclide

La lunghezza  $l$  di un arco può essere usata per definire l'estensione in radianti dell'angolo da esso sotteso.

Diciamo che la misura in radianti dell'angolo al centro sotteso dall'arco  $l$  è

$$\alpha = l/r$$

dove  $r$  è il raggio della circonferenza.

Viceversa, grazie alle formule inverse, possiamo ottenere la lunghezza  $l$  a partire dall'angolo  $\alpha$  espresso in radianti:

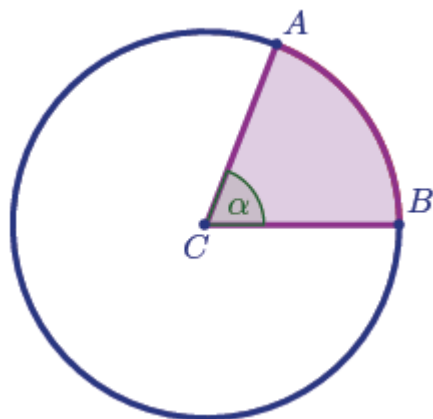
$$l = \alpha \cdot r$$

## Area del settore circolare

### Definizione 3.

Chiamiamo settore circolare la figura piana che si ottiene dall'intersezione tra un cerchio e un suo angolo al centro. Nel caso particolare in cui l'angolo al centro sia piatto, il settore circolare acquista il nome particolare di semicerchio.

# Euclide



Prendiamo in considerazione il settore circolare della figura qui sopra, indicando con  $r$  il raggio del cerchio e con  $\alpha$  l'angolo al centro. Visto che l'area del settore è proporzionale ad  $\alpha$ , possiamo scrivere la seguente proporzione:

$$A_{cerchio} : 2\pi = A_{settore} : \alpha$$

Da cui ricaviamo il risultato che ci interessa:

$$A_{settore} = A_{cerchio} \cdot \frac{\alpha}{2\pi}$$

Dal momento, poi, che  $A_{cerchio} = \pi \cdot r^2$  giungiamo alla conclusione:

$$A_{settore} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{\alpha \cdot r^2}{2}$$

Se in quest'ultima sostituiamo infine  $\alpha = l/r$ , otteniamo:

$$A_{settore} = \frac{1}{2} \alpha r^2 = \frac{1}{2} lr$$

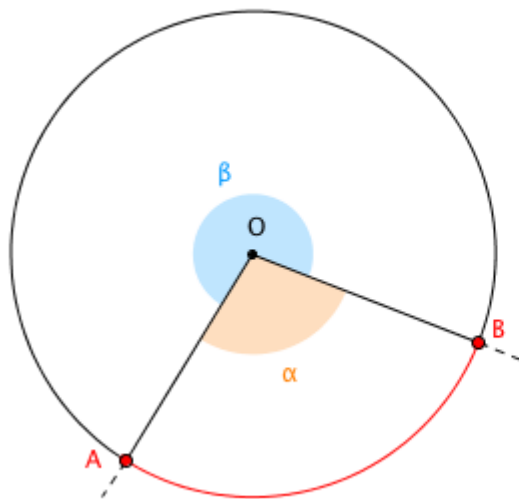


# Euclide

## Definizione

Un angolo al centro di una circonferenza è un angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza considerata.

I lati dell'angolo intersecano la circonferenza in due punti A e B; consideriamo l'arco AB che ha tutti i punti compresi nell'angolo al centro. Diremo che questo arco corrisponde all'angolo al centro, e che l'angolo al centro sottende l'arco considerato.



$\alpha$  e  $\beta$  sono angoli al centro

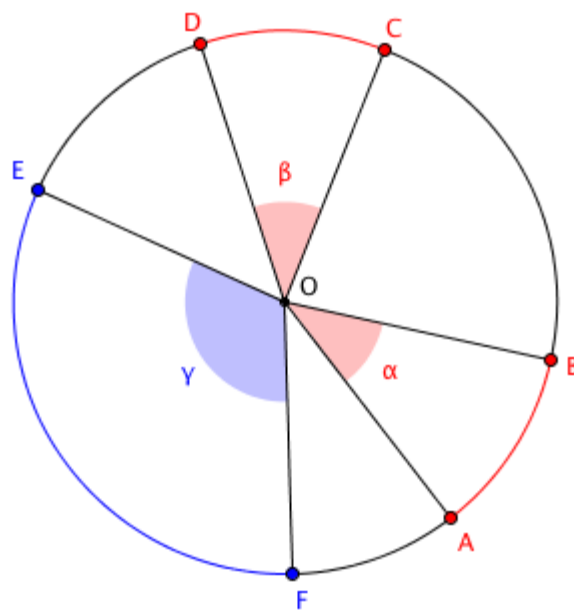
L'angolo  $\alpha$  sottende l'arco AB

L'arco AB corrisponde all'angolo  $\alpha$

# Euclide

Valgono le seguenti proprietà:

- la bisettrice di un angolo al centro divide a metà l'arco corrispondente;
- nella stessa circonferenza, due angoli al centro sono congruenti se e solo se gli archi corrispondenti sono congruenti;
- inoltre se un arco è maggiore di un altro arco, allora l'angolo che sottende il primo arco è maggiore dell'angolo che sottende il secondo (e viceversa).

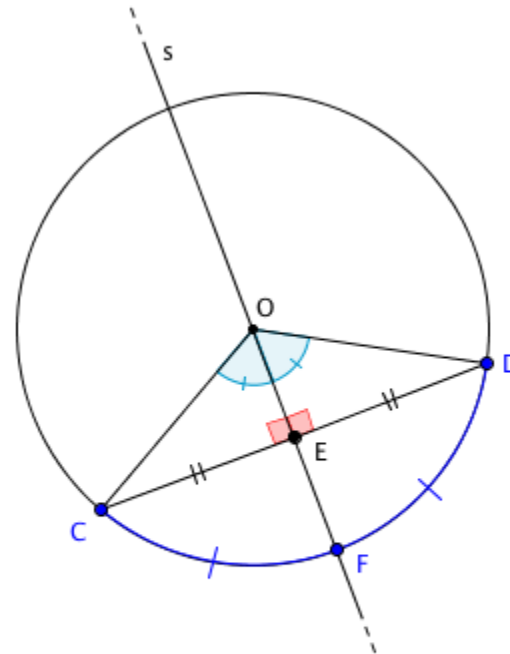


$$\alpha = \beta \iff \widehat{AB} \cong \widehat{CD}$$

$$\gamma > \alpha \iff \widehat{EF} > \widehat{AB}$$

# Euclide

Una retta che passa per il centro di una circonferenza è perpendicolare a una corda se e solo se divide a metà la corda stessa, l'angolo al centro e l'arco corrispondente.

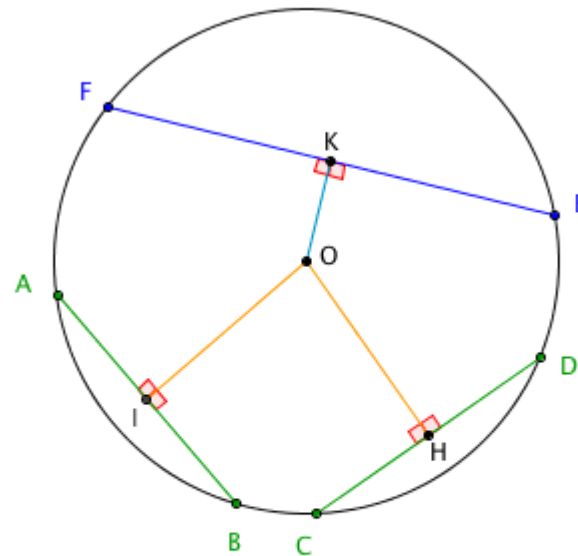


$$\begin{aligned} CE &\cong ED \\ \widehat{COE} &\cong \widehat{EOD} & \iff & s \perp CD \\ \widehat{CF} &\cong \widehat{FD} \end{aligned}$$

# Euclide

L'asse di una corda di una circonferenza passa per il centro della circonferenza stessa.

Nella stessa circonferenza, *corde congruenti sono ugualmente distanti dal centro*; inoltre se una corda è maggiore di un'altra corda, la distanza dal centro della prima corda sarà minore della distanza della seconda.



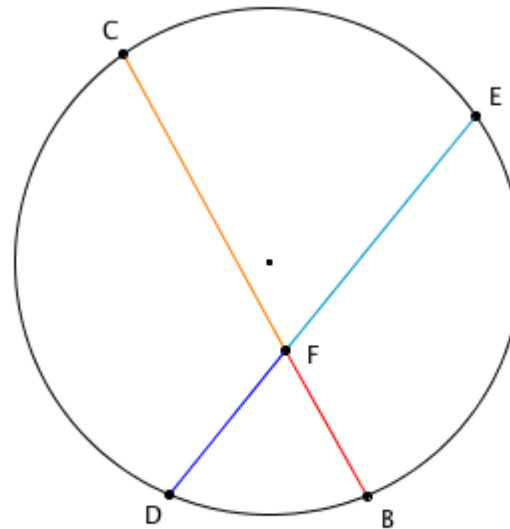
$$OI \cong OH \iff \widehat{AB} \cong \widehat{CD}$$

$$FE > AB \iff OK < OI$$

# Euclide

TEOREMA (delle corde):

Se due corde di una circonferenza si intersecano, i segmenti che si formano su una di esse sono i medi e i segmenti sull'altra sono gli estremi di una stessa proporzione.



$$CF : FD = FE : FB$$

# Euclide

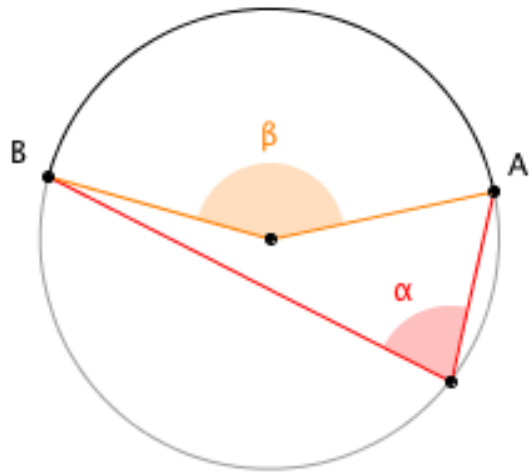
## Definizione

Un *angolo alla circonferenza* è un angolo convesso che ha vertice sulla circonferenza considerata, e tale per cui i suoi lati sono entrambi secanti la circonferenza, oppure uno secante e l'altro tangente.

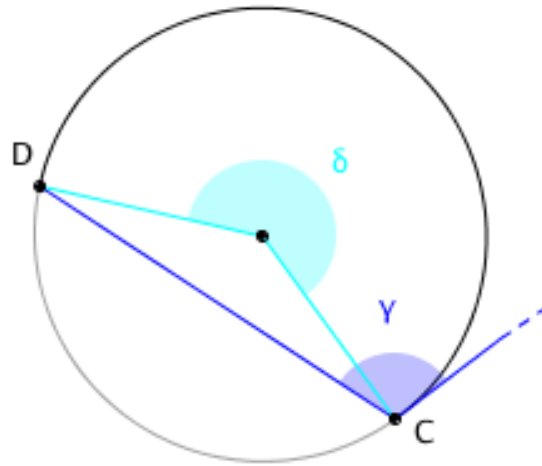
Diremo che un angolo alla circonferenza *insiste* sull'arco che ha per estremi i punti di intersezione tra i lati dell'angolo e la circonferenza, ed è contenuto nell'angolo.

Dato un angolo alla circonferenza, si dice *angolo al centro corrispondente* l'angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza e che sottende l'arco su cui insiste l'angolo alla circonferenza.

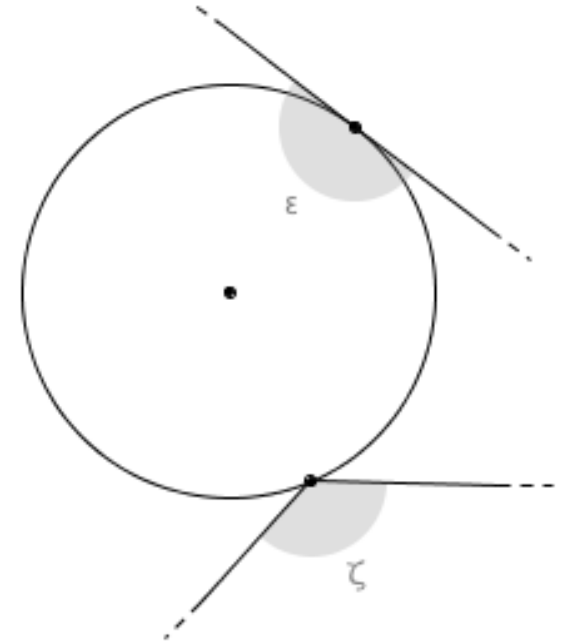
# Euclide



$\alpha$  è un angolo alla circonferenza  
 $\alpha$  insiste su  $\widehat{AB}$   
 $\beta$  è l'angolo al centro  
corrispondente ad  $\alpha$



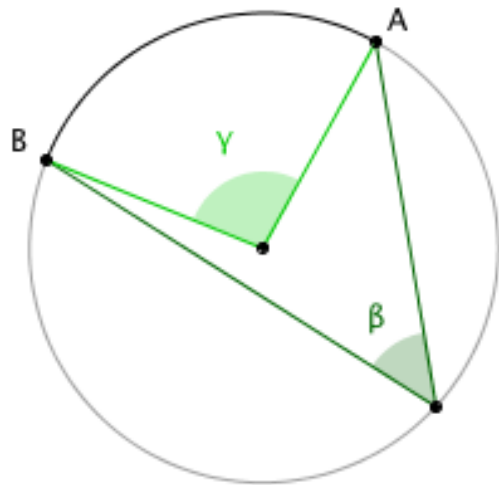
$\gamma$  è un angolo alla circonferenza  
 $\gamma$  insiste su  $\widehat{CD}$   
 $\delta$  è l'angolo al centro  
corrispondente a  $\gamma$



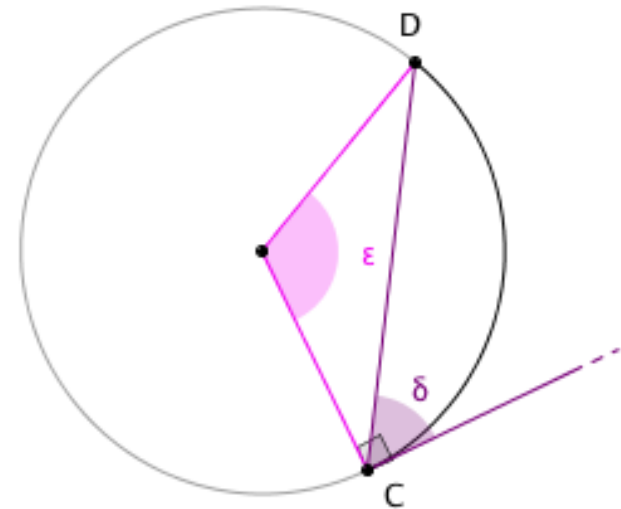
$\varepsilon$  e  $\zeta$  NON sono  
angoli alla circonferenza

# Euclide

**TEOREMA:** un angolo alla circonferenza è la metà del suo angolo al centro corrispondente.



$\beta$  e  $\gamma$  insistono su  $\widehat{AB}$   $\Rightarrow$   $\gamma = 2\beta$

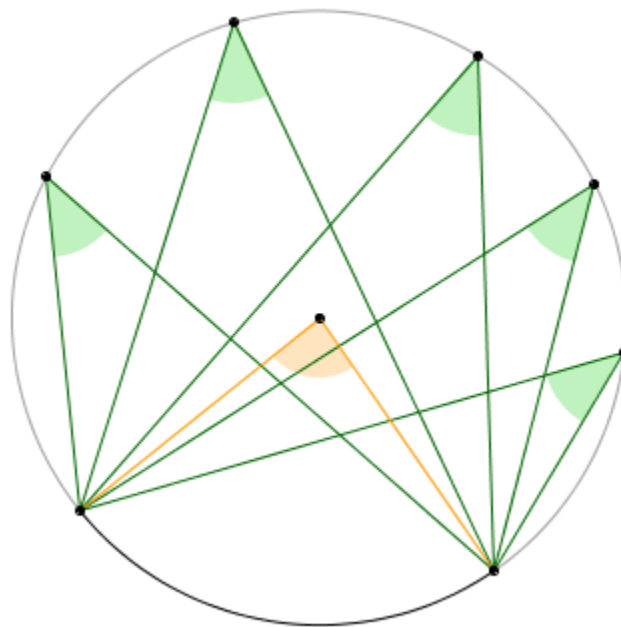


$\delta$  e  $\varepsilon$  insistono su  $\widehat{CD}$   $\Rightarrow$   $\varepsilon = 2\delta$



# Euclide

Da questo teorema discendono immediatamente due proprietà molto interessanti:  
*ogni angolo che insiste su una semicirconferenza è retto* (dato che il suo corrispondente angolo al centro è piatto);  
*gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono tutti congruenti*: infatti, ciascuno di questi angoli ha il medesimo angolo al centro corrispondente, e pertanto sono tutti congruenti a metà dello stesso angolo



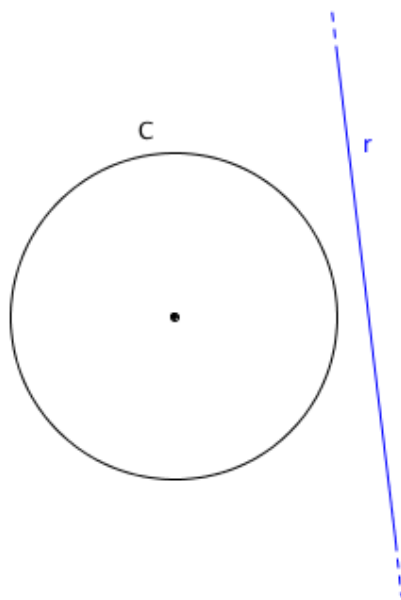
# Euclide

## Definizione

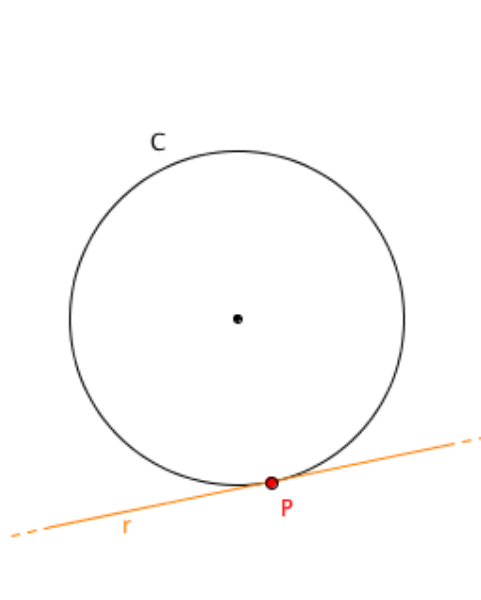
Consideriamo una retta  $r$  e una circonferenza  $C$  nel piano. Diremo che:  
 $r$  è esterna a  $C$  se  $C \cap r = \emptyset$ , cioè se la retta e la circonferenza non hanno punti in comune;

$r$  è tangente a  $C$  se  $C \cap r = P$ , cioè se la retta e la circonferenza hanno solo un punto in comune, che viene chiamato punto di tangenza;

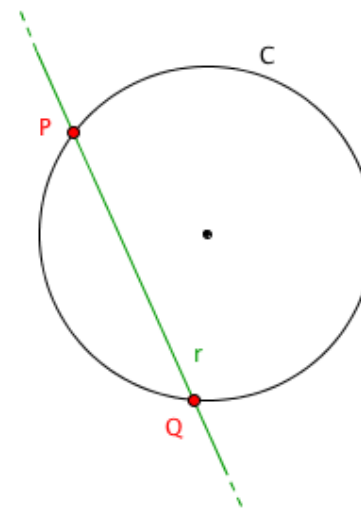
$r$  è secante di  $C$  se  $C \cap r = \{P, Q\}$ , cioè se la retta e la circonferenza hanno due punti in comune



Retta esterna alla circonferenza



Retta tangente alla circonferenza



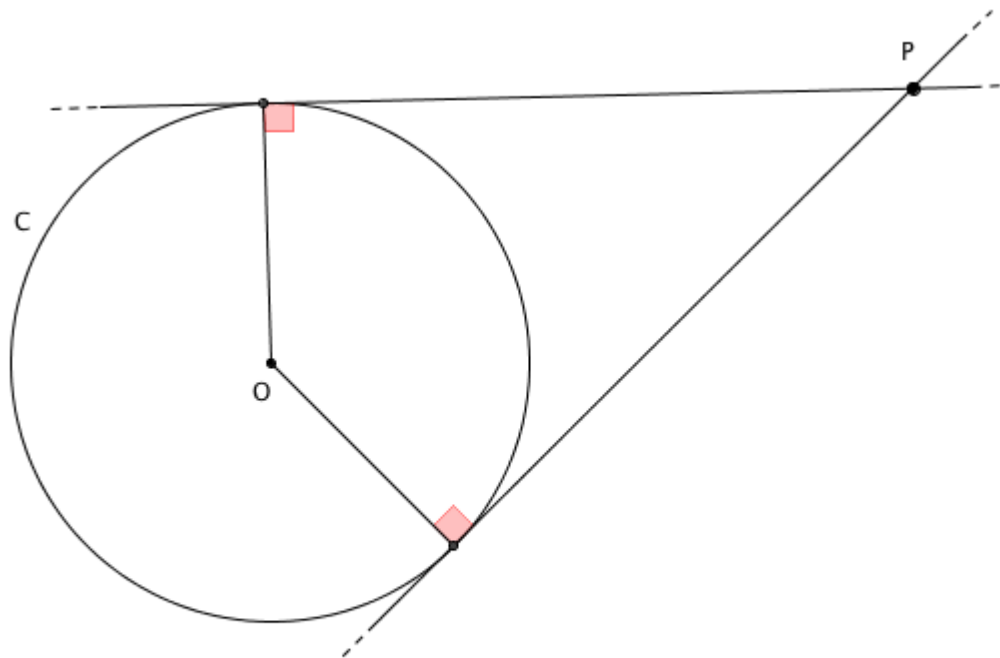
Retta secante la circonferenza

# Euclide

Elenchiamo alcune proprietà delle rette tangenti a una circonferenza.

Preso una tangente a una circonferenza, il raggio che ha come estremo il punto di tangenza è perpendicolare alla tangente considerata.

Preso un punto esterno a una circonferenza  $C$ , esistono sempre due rette tangenti a  $C$  che passano per il punto considerato. Se il punto è interno, da esso non passa alcuna tangente a  $C$ ; se il punto appartiene alla circonferenza, invece, esiste un'unica tangente.



Le due tangenti a  $C$  che passano da  $P$

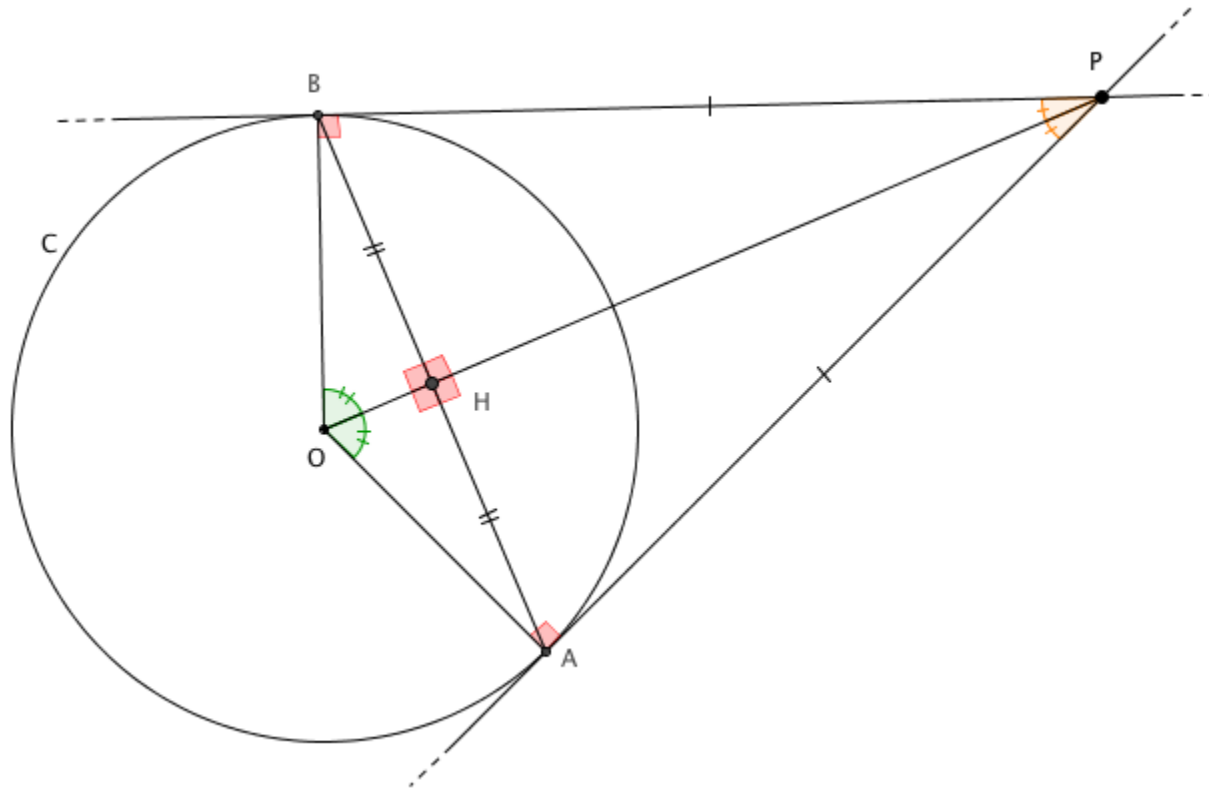
# Euclide

## TEOREMA (delle tangenti):

Consideriamo un punto  $P$  esterno a una circonferenza  $C$  di centro  $O$ , e da  $P$  conduciamo le tangenti a  $C$ . Chiamiamo  $A$  e  $B$  i punti di tangenza. Allora:

$PA \cong PB$ ;

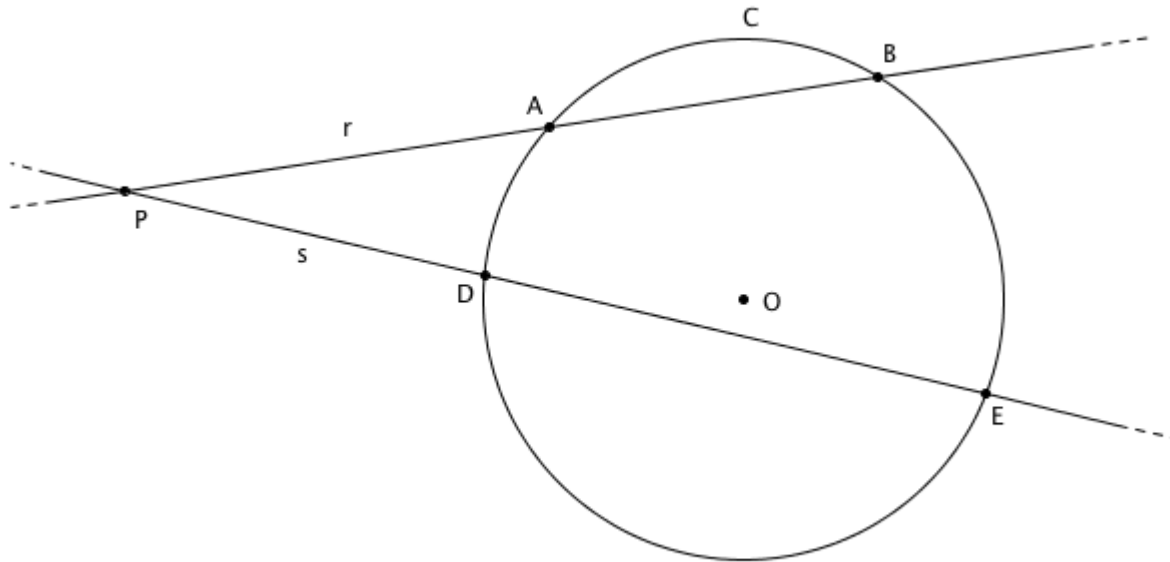
Il segmento  $PO$  divide a metà l'angolo  $A\hat{P}B$  e anche l'angolo  $A\hat{O}B$ .



# Euclide

## TEOREMA (delle secanti):

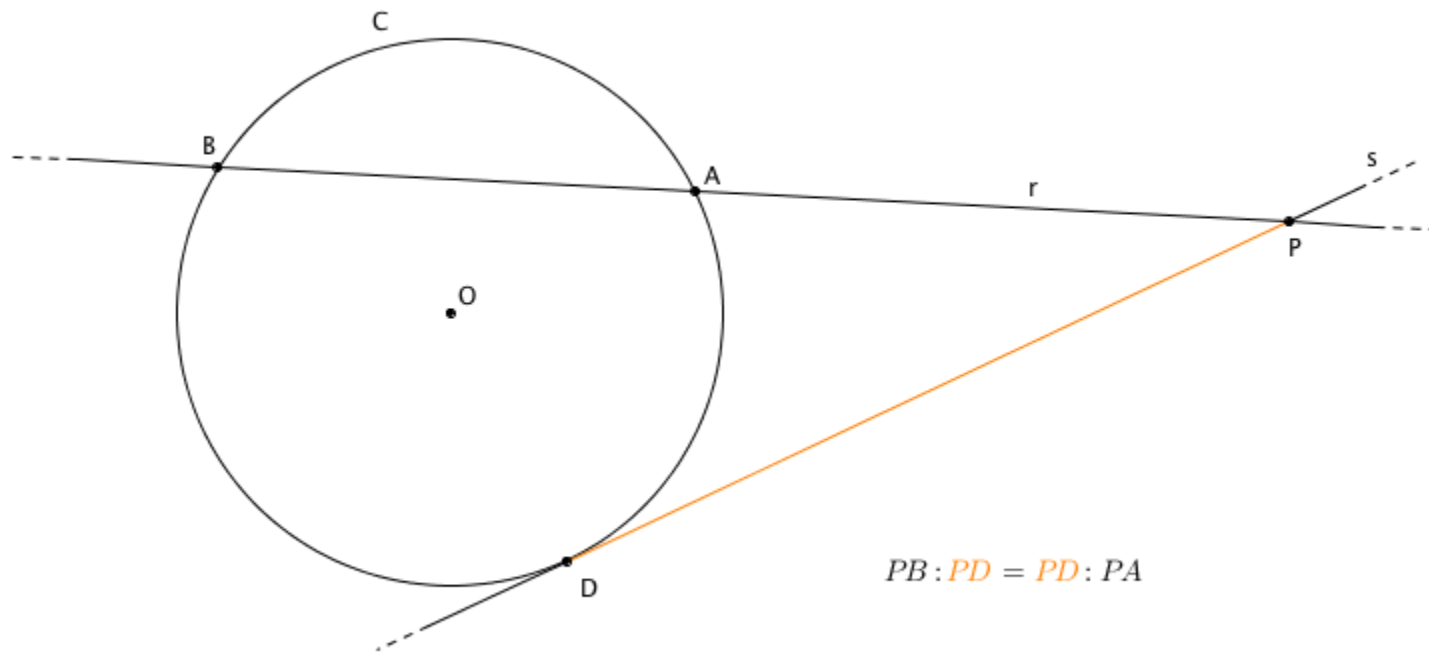
Consideriamo una circonferenza  $C$  e due rette secanti  $rr$ ,  $ss$  che hanno in comune un punto  $P$  esterno alla circonferenza. Detti  $A$  e  $B$  i punti di intersezione di  $r$  e  $C$  (con  $PA < PB$ ), e detti  $D$  e  $E$  i punti di intersezione di  $s$  con  $C$  (con  $PD < PE$ ) abbiamo la seguente proporzione:  $PA:PD = PE:PB$ .



# Euclide

## TEOREMA (della secante e della tangente):

Consideriamo una circonferenza  $C$ , una retta secante  $r$  e una retta tangente  $s$  che hanno in comune un punto  $P$  esterno alla circonferenza. Detti  $A$  e  $B$  i punti di intersezione di  $r$  e  $C$  (con  $PA < PB$ ), e detto  $D$  il punto di tangenza di  $s$  rispetto a  $C$ , abbiamo la seguente proporzione:  $PB:PD=PD:PA$ .

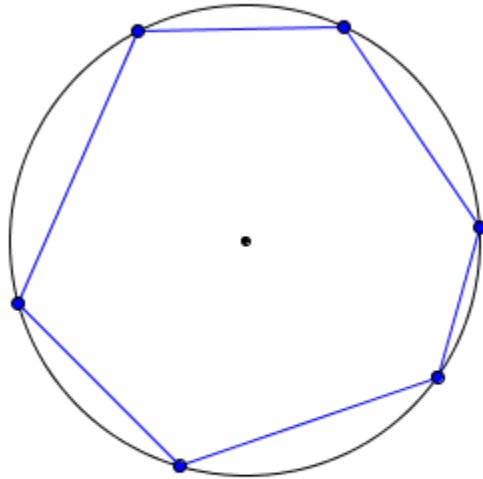


# Euclide

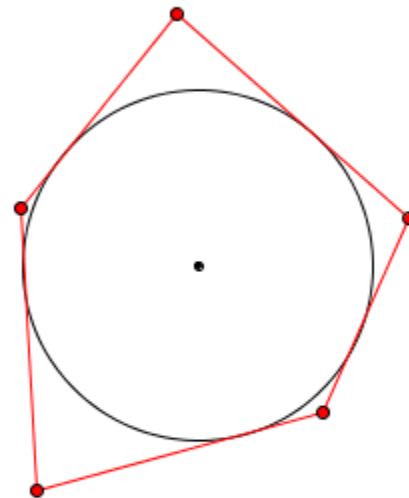
## Definizione

Un poligono si dice *inscritto* in una circonferenza quando i suoi vertici stanno sulla circonferenza data. In questo caso la circonferenza si dice *circoscritta* al poligono.

Un poligono si dice *circoscritto* a una circonferenza quando i suoi lati sono tangenti alla circonferenza data. In questo caso la circonferenza si dice *inscritta* nel poligono.



Poligono inscritto in una circonferenza  
La circonferenza è circoscritta al poligono

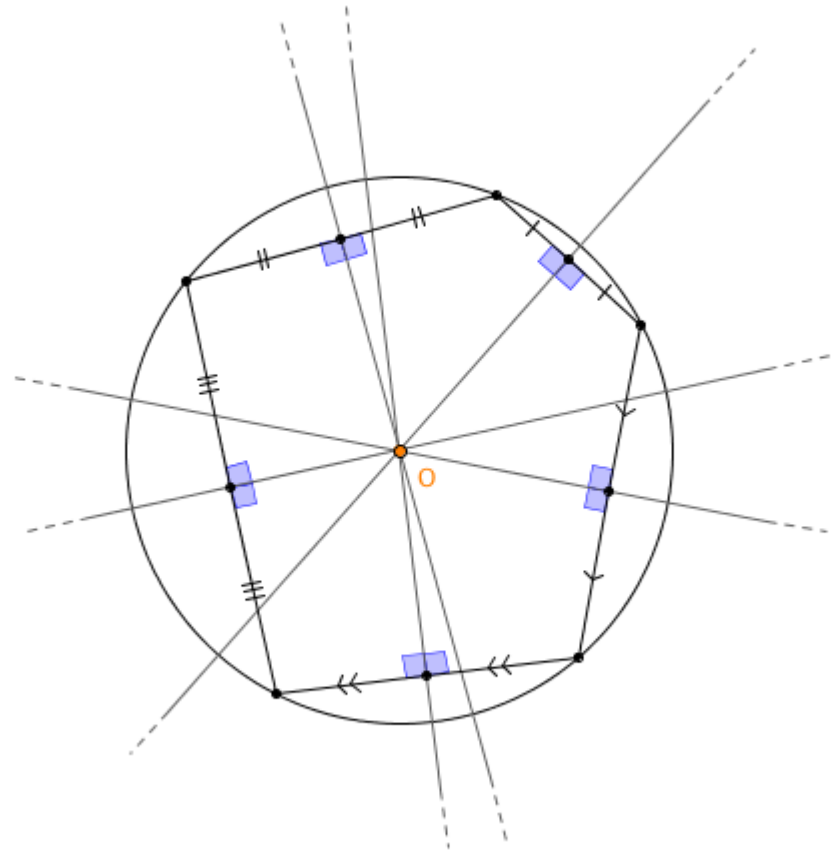


Poligono circoscritto a una circonferenza  
La circonferenza è inscritta nel poligono

# Euclide

## **TEOREMA (*Criterio di inscrivibilità di un poligono*):**

Un poligono può essere inscritto in una circonferenza se e solo se gli assi dei lati si incontrano nello stesso punto, che è proprio il centro della circonferenza circoscritta al poligono.

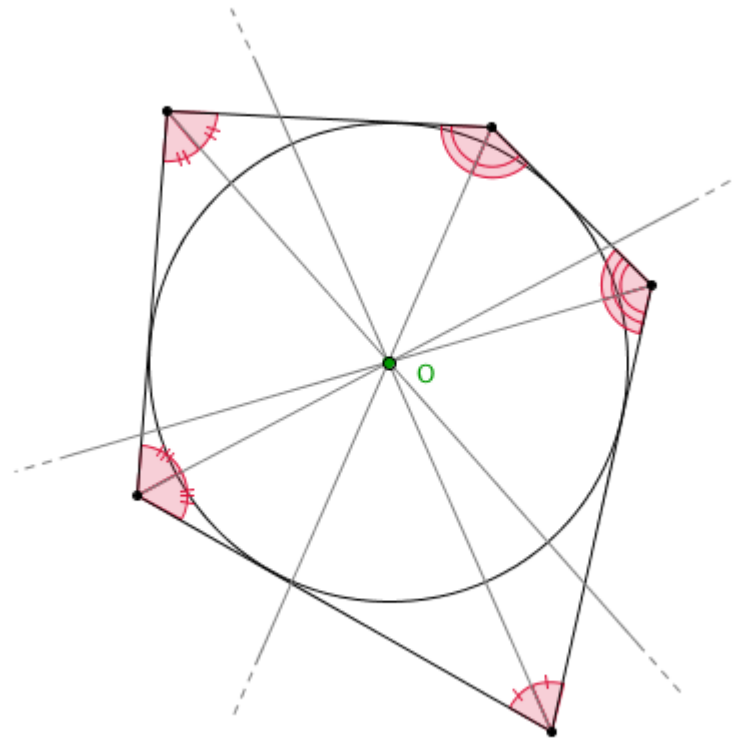




# Euclide

## **TEOREMA (*Critério di circoscrivibilità di un poligono*):**

Un poligono può essere circoscritto a una circonferenza se e solo se le bisettrici degli angoli interni si incontrano nello stesso punto, che è proprio il centro della circonferenza inscritta al poligono.

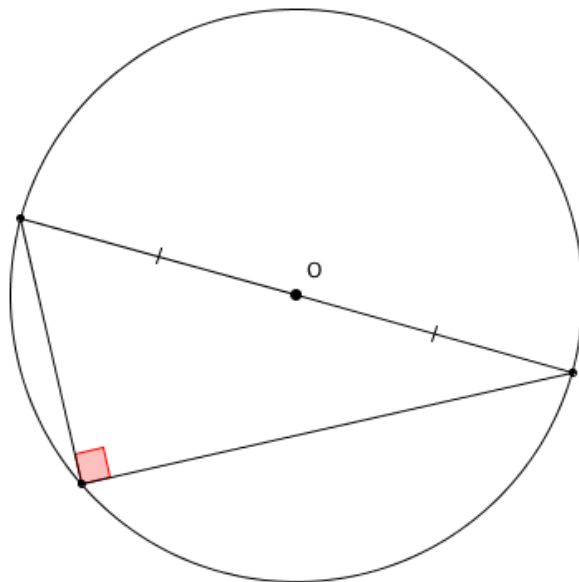


# Euclide

TEOREMA: Dati tre punti nel piano, esiste sempre una unica circonferenza che li unisce.

TEOREMA: Un triangolo si può sempre inscrivere in una circonferenza, e si può sempre circoscrivere a una circonferenza

Ogni triangolo rettangolo può essere inscritto in una circonferenza; l'ipotenusa del triangolo è il diametro di tale circonferenza, e il suo centro è il punto medio dell'ipotenusa stessa. Per questo motivo, spesso si dice che *un triangolo rettangolo è inscrittibile in una semicirconferenza*

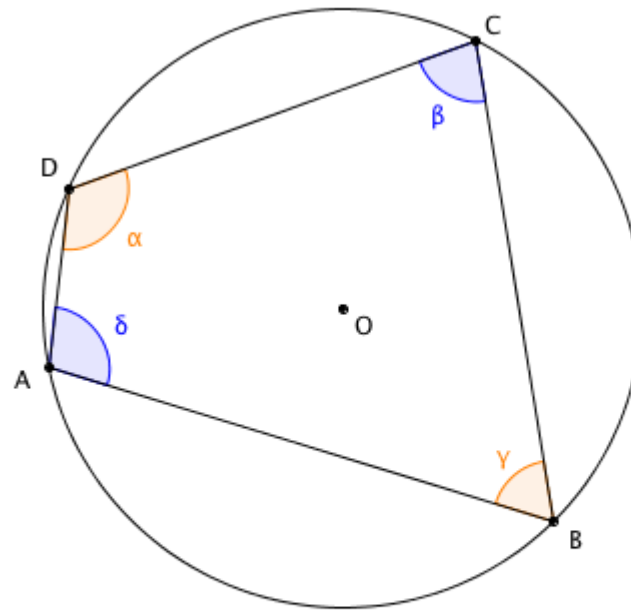


Un triangolo rettangolo inscritto in una semicirconferenza.

# Euclide

## **TEOREMA: (Criterio di inscrivibilità di un quadrilatero):**

Un quadrilatero può essere inscritto in una circonferenza se e solo se due angoli opposti sono supplementari.



$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

oppure

$$\beta + \delta = 180^\circ$$

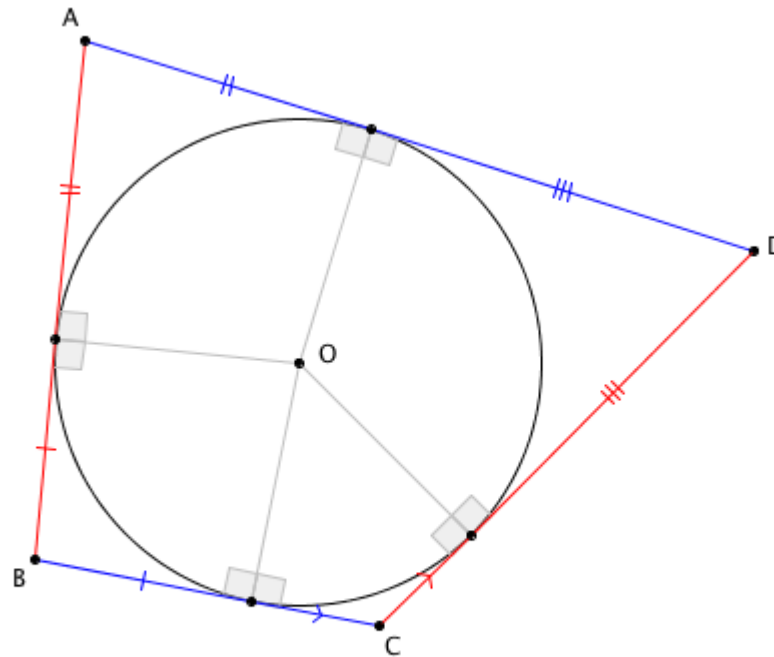


ABCD può essere inscritto  
in una circonferenza

# Euclide

## TEOREMA (Criterio di circoscrivibilità di un quadrilatero):

Un quadrilatero può essere circoscritto a una circonferenza se e solo se la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due.



$$AB + CD = BC + AD$$



ABCD si può circoscrivere a una circonferenza