Prof. Roberto Capone

Dinamica dei sistemi materiali

Corso di Fisica e Geologia –mod. Fisica
2013/2014
Corso di laurea in Ingegneria edile

Università degli Studi del Molise

La dinamica dei sistemi - intro

Il punto materiale rappresenta una schematizzazione utile non solo per descrivere situazioni di interesse diretto ma è anche il necessario presupposto alla meccanica dei sistemi materiali estesi.

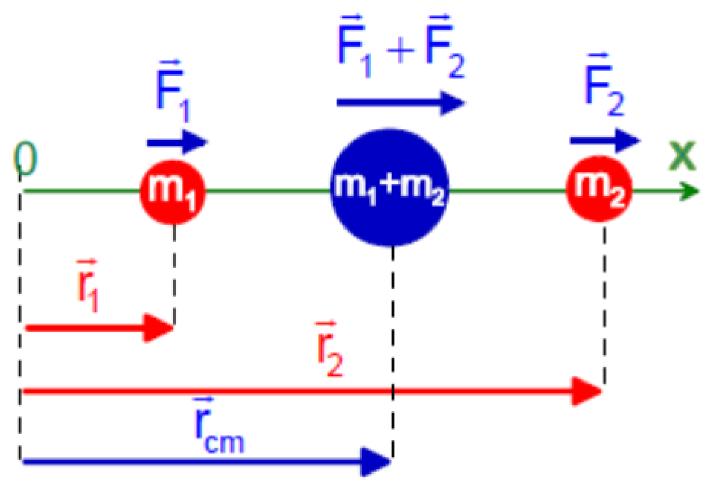
Un sistema materiale esteso può essere sempre immaginato come costituito da un insieme di punti materiali.

Talvolta, il sistema esteso è effettivamente formato da un certo numero di costituenti praticamente puntiformi ciascuno identificabile e distinguibile dagli altri: si dice allora che si ha a che fare con un sistema discreto.

Più spesso, a livello macroscopico, un corpo esteso si presenta come un sistema continuo: in questo caso si può comunque immaginare di suddividere il sistema continuo in un certo numero di elementi di massa elementare dm e di volume $d\tau$ praticamente puntiforme.

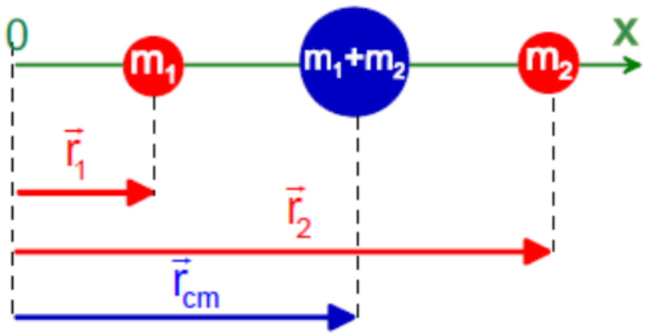
Il centro di massa

Si consideri un sistema formato da due particelle di massa rispettivamente m_1 ed m_2 soggette alle forze esterne F_1 ed F_2. Tale sistema soggiace alle leggi del moto come se entrambe le masse m_1+m_2 fossero concentrate in un unico punto chiamato centro di massa soggetto ad una forza $F_1 + F_2$ agente sul punto.



si definisce **centro di massa** di un sistema composto da più di una particella, il punto in cui si suppone concentrata tutta la massa del sistema. Si può supporre che sul punto agisca una forza esterna netta in modo tale che il moto di un sistema di particelle si possa descrivere attraverso il moto del suo centro di massa.

Il centro di massa



La posizione del centro di massa è data dalla relazione

$$\overline{r_{cm}} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$$

Da cui:

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Se assumiamo, ad esempio, $x_1 = 2m, x_2 = 8m, m_1 = m_2 = 6Kg$, allora

$$x_{cm} = \frac{(6Kg)(2m) + (6Kg)(8m)}{6Kg + 6Kg} = 5m$$

Centro di massa – caso generale

Se il sistema è composto da n particelle, allora la relazione può essere generalizzata:

$$\overline{r_{cm}} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \cdots .}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Ovvero, nel piano cartesiano:

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y + m_2 y_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$z_{cm} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Velocità del centro di massa

La velocità con cui si muove il centro di massa di un sistema di particelle è:

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i v_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

da cui:

$$v_i = \frac{dr}{dt} = \frac{dx_i}{dt}\hat{i} + \frac{dy_i}{dt}\hat{j} + \frac{dz_i}{dt}\hat{k}$$

Pertanto le sue componenti cartesiane sono:

$$v_{xcm} = \frac{m_1 v_{x1} + m_2 v_{x2} + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i v_{xi}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$v_{ycm} = \frac{m_1 v_{y1} + m_2 v_{y2} + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i v_{yi}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$v_{zcm} = \frac{m_1 v_{z1} + m_2 v_{z2} + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i v_{zi}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Accelerazione del centro di massa

L'accelerazione del centro di massa di un sistema di particelle è:

$$a_{cm} = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

da cui:

$$a_i = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_{xi}}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_{yi}}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_{zi}}{dt}\hat{k}$$

o, ciò che è lo stesso:

$$a = \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \frac{d^2 x_i}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2 y_i}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2 z_i}{dt^2}\hat{k}$$

Pertanto le sue componenti cartesiane sono:

$$a_{xcm} = \frac{m_1 a_{x1} + m_2 a_{x2} + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\sum_{x=1}^{n} m_i a_{xi}}{\sum_{x=1}^{n} m_i} \qquad a_{ycm} = \frac{m_1 a_{y1} + m_2 a_{y2} + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\sum_{y=1}^{n} m_i a_{yi}}{\sum_{y=1}^{n} m_i} \qquad a_{zcm} = \frac{m_1 a_{z1} + m_2 a_{z2} + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\sum_{x=1}^{n} m_i a_{zi}}{\sum_{x=1}^{n} m_i}$$

Il moto del centro di massa

La cinematica di un sistema di particelle può essere studiata analizzando il moto del suo centro di massa. Si consideri un sistema di particelle il sui moto è di sola traslazione. Si sa, per definizione, che

$$\overline{r_{cm}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Se indichiamo la massa totale del sistema come allora si potrà scrivere:

$$\sum_{x=1}^{n} m_i = M$$

$$\bar{r}_{cm} M = \sum_{x=1}^{n} m_i r_i$$

Derivando, si potrà scrivere:

$$\bar{v}_{cm} M = \sum_{x=1}^{n} m_i v_i$$

La quantità a destra dell'uguaglianza rappresenta la quantità di moto del centro di massa.

Il teorema del centro di massa

Pertanto si potrà scrivere:

$$Q_{cm} = \overline{v}_{cm} M$$

Derivando ulteriormente, si avrà:

$$M\overline{a}_{cm} = \sum_{x=1}^{n} m_i \overline{a}_i$$

Il termine a destra dell'uguaglianza rappresenta la somma delle forze applicate su ciascuna particella del sistema

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = M\overline{a}_{cm}$$

Questa relazione prende il nome di teorema del centro di massa: **Il centro di massa di un sistema materiale che abbia massa M costante si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa M del sistema e a cui sia applicata una forza pari alla risultante F delle forze esterne agenti sul sistema stesso**

E le forze interne?

Si noti che la quantità $\sum F_i$
rappresenta la somma delle forse esterne agenti sul sistema e delle forse interne al sistema di interazione tra le singole particelle. Tuttavia, se ad esempio si considerano due particelle si nota che la forza che la massa 1 esercita sulla massa 2 è uguale ed opposta a quella che la massa 2 esercita sulla massa 1. Pertanto la somma delle forze interne è nulla.

NB: Un concetto simile al centro di massa è quello di centro di gravità definito come il punto in cui si immagina applicata la forza di attrazione gravitazionale.

Per sistemi di particelle o corpi costituiti da particelle le cui dimensioni sono trascurabili rispetto alle dimensioni della Terra, il centro di gravità e il centro di massa coincidono.

Le equazioni cardinali della dinamica dei sistemi

Si consideri un sistema materiale S e se ne scriva la posizione del suo centro di massa:

$$r_c = \frac{\sum m_i r_i}{M}$$

Nell'ipotesi che la massa M sia costante, derivando, si ha:

$$v_c = \frac{\sum m_i v_i}{M}$$

ovvero

$$M v_c = \sum m_i v_i = \sum q_i = Q$$

La relazione ci mostra che la quantità di moto Q di un sistema materiale di massa costante può essere espressa come prodotto fra la massa totale del sistema M e la velocità v_c del suo centro di massa.

Le equazioni cardinali della dinamica dei sistemi

Derivando ulteriormente, si ottiene:

$$Ma_c = \frac{dQ}{dt}$$

cioè:

$$F^{(e)} = \frac{dQ}{dt}$$

Dal teorema del momento angolare si è ricavato, inoltre che:

$$M = \frac{dP}{dt}$$

Mettendo insieme le osservazioni finora fatte e tenuto conto della trascurabilità delle forze interne tra le particelle, si ottengono le equazioni cardinali della dinamica dei sistemi:

$F^{(e)} = \frac{dQ}{dt}$	$M^{(e)} = \frac{dP}{dt}$

Centro di massa di sistemi continui

Nel caso di sistemi continui, il centro di massa si definisce in modo del tutto analogo al caso dei sistemi discreti. Si suddivide il sistema in tanti elementi praticamente puntiformi di massa dm_i e volume $d\tau_i$; la posizione del centro di massa è data approssimativamente da

$$\bar{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} dm_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} dm_i}$$

Il calcolo diviene esatto eseguendo il limite a zero dei volumetti:

$$\bar{r}_{cm} = \lim_{\Delta\tau_i \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} dm_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} dm_i}$$

Usando la simbologia propria del calcolo integrale, questo limite si scrive

$$\bar{r}_{cm} = \frac{\int \bar{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int \bar{r}\, dm}{M}$$

Centro di massa di sistemi continui

Per il calcolo dell'integrale è necessario esprimere la massa elementare dm in funzione delle coordinate x,y, z. A questo scopo si introduce la densità di massa del sistema considerato. La densità *ρ=ρ(x,y,z)* è quella funzione delle coordinate che moltiplicata per l'elemento di volume dτ fornisce la massa dm dell'elemento di volume dτ:

$$dm = \rho d\tau = \rho(x,y,z)dxdydz$$

Da queste ultime considerazioni si può dedurre:

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\int x \cdot \rho(x,y,z) \cdot dxdydz}{\int \rho d\tau} = \dfrac{\int x \cdot \rho d\tau}{M} \\ y_c = \dfrac{\int y \cdot \rho(x,y,z) \cdot dxdydz}{\int \rho d\tau} = \dfrac{\int y \cdot \rho d\tau}{M} \\ z_c = \dfrac{\int z \cdot \rho(x,y,z) \cdot dxdydz}{\int \rho d\tau} = \dfrac{\int z \cdot \rho d\tau}{M} \end{cases}$$

Note

Benché, a rigore, ogni corpo materiale esteso abbia struttura tridimensionale, non è raro che la forma del corpo sia tale che risulti conveniente schematizzarlo come un sistema a due dimensioni o addirittura a una dimensione sola. In questi casi conviene introdurre, rispettivamente, una densità superficiale σ e una densità lineare λ.

Il risultato molto importante a cui si è giunti è che, quando il corpo ha una densità costante, il centro di massa (e il centro di gravità se il campo gravitazionale è costante) dipendono solo dalla configurazione geometrica del corpo e non dalle sue proprietà fisiche

Il teorema di Koenig

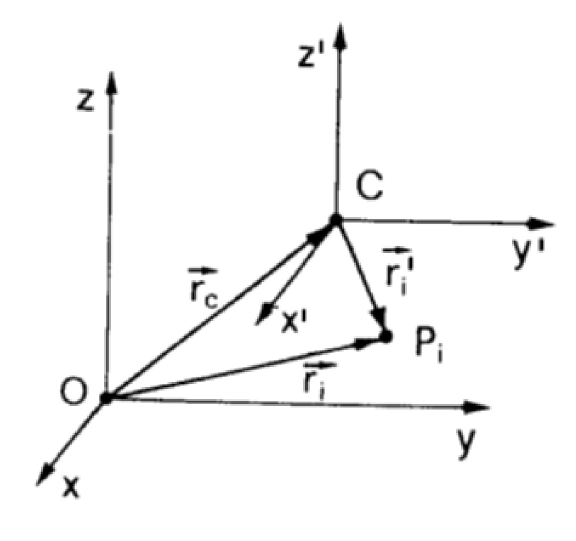
Si consideri un sistema di punti materiali che si muove in un sistema di riferimento inerziale R(0xyz); si introduca un secondo sistema di riferimento mobile R’ che abbia origine coincidente con il centro di massa C del sistema S e orientamento fisso rispetto a R. Sia r_C il vettore posizione di C rispetto a R e r_i il vettore posizione del punto P_i di S ancora rispetto a S. Sia inoltre r'_i il vettore posizione di P_i rispetto a R’.
Si ha:

$$r_i = r_c + r_i'$$

Derivando questa relazione rispetto al tempo, si ottiene:

$$v_i = v_c + v_i'$$

dove v_i è la velocità di P_i rispetto a R; v_c è la velocità del centro di massa C rispetto a R; v_i' è la velocità di P_i rispetto a R’,
cioè rispetto al sistema solidale con C.



Il teorema di Koenig

L'energia cinetica K_i del punto P_i nel sistema inerziale R può essere scritta come:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i v_i v_i = \frac{1}{2} m_i (v_c + v_i^{'}) \cdot (v_c + v_i^{'}) = \frac{1}{2} m_i v_c^2 + \frac{1}{2} m_i v_i^{'2} + m_i v_i \cdot v_c$$

Sommando sull'indice i, si ottiene l'energia totale del sistema S:

$$K = \sum K_i = \sum \frac{1}{2} m_i v_c^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i^{'2} +$$

$$+ \sum m_i v_i \cdot v_c = \frac{1}{2} v_c^2 \sum m_i + \sum \frac{1}{2} m_i v_i^{'2} + v_c \cdot \sum m_i v_i^{'}$$

A proposito dei tre termini possiamo scrivere:

$\frac{1}{2} v_c^2 \sum m_i$ può essere scritto come $\frac{1}{2} M v_c^2$ dove $M = \sum m_i$ è la massa totale del sistema.
$\sum \frac{1}{2} m_i v_i^{'2}$ rappresenta l'energia cinetica del sistema S nel sistema di riferimento R' che ha origine nel centro di massa C e orientamento fisso rispetto a R, ovvero rappresenta l'energia cinetica di S rispetto al centro di massa: la si può chiamare S'.
$v_c \cdot \sum m_i v_i^{'}$ questo termine è nullo perché $\sum m_i v_i^{'} = M v_c^{'}$ e $v_c^{'}$ rappresenta la velocità del centro di massa rispetto a R' ma nel sistema R' tale velocità è nulla.

Il teorema di Koenig

In definitiva:

$$K = \frac{1}{2} M v_c^2 + K'$$

"In un sistema di riferimento inerziale qualunque, l'energia cinetica di un sistema materiale S può essere espressa come somma dell'energia cinetica $\frac{1}{2} M v_c^2$ che il sistema avrebbe se tutta la sua massa fosse concentrata nel suo centro di massa più l'energia cinetica K' che il sistema S ha in un sistema di riferimento con origine nel centro di massa e orientamento fisso".