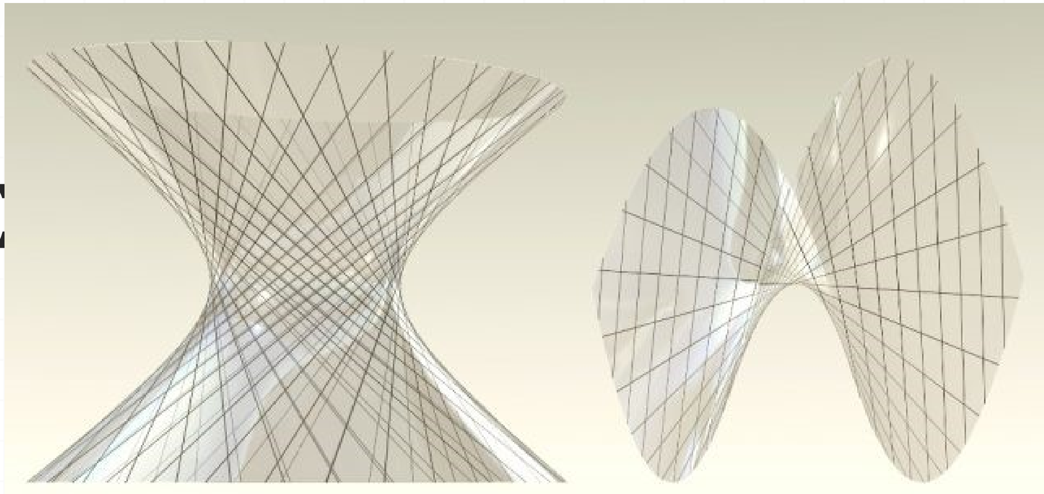
ALGEBRA LINEARE

AUTOVALORI E AUTOVETTORI



Prof. Roberto Capone
A.A. 2019/20
Corso di Studi in Ingegneria Meccanica/Gestionale

Autovalori e Autovettori

Generalità

Definizione
Sia $A \in R^{n\times n}$. Un numero λ per cui esiste un vettore $x \neq 0$ tale che valga la relazione

$$Ax = \lambda x$$

è detto autovalore di A ed x è detto autovettore corrispondente a λ.
L'insieme degli autovalori di A costituisce lo spettro di A e il modulo massimo ρ(A) degli autovalori è detto raggio spettrale di A.

Il sistema $Ax = \lambda x$ si può scrivere anche nella forma

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Esso ammette soluzioni non nulle se e solo se

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Sviluppando il determinante della matrice

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \dots & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

Autovalori e Autovettori

Generalità

Il $\det(A - \lambda I)$ è un polinomio $p(\lambda)$ i cui coefficienti dipendono dagli elementi di A. Uno dei termini dello sviluppo è dato dal prodotto degli elementi principali di $A - \lambda I$ ed è uguale a $(a_{11} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$ e nessun altro termine dello sviluppo contiene più di n−2 fattori della forma $(a_{ii} - \lambda)$.

Quindi il grado di p(λ) è esattamente n e i coefficienti di λ^n e di λ^{n-1} risultano rispettivamente uguali a $(-1)^n$ e $(-1)^{n-1}(a_{11} + \cdots + a_{nn})$.
L'ultimo coefficiente è dato da $p(0) = \det A$.

$p(\lambda)$ si può quindi scrivere:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} trA \lambda^{n-1} + \cdots + detA$$

in cui si è indicata con trA la traccia di A, cioè la somma degli elementi principali di A

Il polinomio p(λ) è detto polinomio caratteristico di A e l'equazione $p(\lambda) = 0$ è detta equazione caratteristica di A. Gli autovalori di A sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione caratteristica.

Autovalori e Autovettori

Generalità

Per il teorema fondamentale dell'algebra l'equazione caratteristica ha nel campo complesso n radici, tenendo conto della loro molteplicità. Quindi una matrice di ordine n ha, tenendo conto della loro molteplicità, n autovalori nel campo complesso.

Autovettori

Gli autovettori sono dunque le soluzioni non nulle del sistema lineare omogeneo

$$(A - \lambda I)x = 0$$

quindi un autovettore corrispondente ad un autovalore λ risulta determinato a meno di una costante moltiplicativa $k \neq 0$, cioè se x è autovettore di A, anche kx è autovettore di A, corrispondente allo stesso autovalore.

Autospazio

Detto λ un autovalore di A, si definisce autospazio di λ l'insieme V_λ costituito da tutti gli autovettori di λ e dal vettore nullo. Cioè

$$V_\lambda = \{u \in K^n | \; Au = \lambda u\} = \{u \in K^n | \; (A - \lambda I)u = 0\}$$

Autovalori e Autovettori

Generalità

Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore
Si definisce molteplicità algebrica di un autovalore $\bar{\lambda}$ e la indichiamo con $m_a(\bar{\lambda})$ la molteplicità di$\bar{\lambda}$ come radice del polinomio caratteristico.
Si definisce molteplicità geometrica di $\bar{\lambda}$ e la indichiamo con $m_g(\bar{\lambda})$ la dimensione dell'autospazio associato a $\bar{\lambda}$

In pratica
Per calcolare la molteplicità algebrica basta contare quante volte l'autovalore $\bar{\lambda}$ è soluzione dell'equaizone caratteristica

$$(A - \lambda I) = 0$$

Per calcolare la molteplicità geometrica basta sottrarre alla dimensione dello spazio di partenza il rango di A.

Esiste una relazione tra molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore.
Vale, infatti, la seguente relazione

$$1 \leq m_g(\bar{\lambda}) \leq m_a(\bar{\lambda})$$

Autovalori e Autovettori

Generalità

Diagonalizzazione
Se A è una matrice diagonalizzabile, esiste una matrice P, detta matrice di diagonalizzazione, che ha per colonne i vettori dell'unione delle basi degli autospazi di A ed esiste una matrice D che ha come elementi sulla diagonal gli autovalori di A ripetuti tante volte quant'è la sua molteplicità tali che

$$D = P^{-1}AP$$

Se una matrice A ha n autovalori distinti, allora A è diagonalizzabile

Caratterizzazione della diagonalizzazione
Sia A una matrice di uno spazio vettoriale K dotata di $\lambda_1, \dots \lambda_t$ autovalori distinti di molteplicità algebrica $m_1, \dots m_t$ allora essa è diagonalizzabile sse il polinomio caratteristico ha tutte le radici in K e la molteplicità algebrica di ciascun autovalore coincide con la rispettiva molteplicità geometrica

Autovalori e Autovettori

Esempio 1

Cerchiamo gli autovalori e gli autovettori di A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 2 & 0-\lambda \end{pmatrix}$$

La sua equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - 2 = 0$$

Dunque ci sono due autovalori distinti

$$\lambda_1 = -\sqrt{2}, \lambda_2 = \sqrt{2}$$

Per $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ otteniamo il sistema

$$\left(A - \sqrt{2}I\right)v = 0$$

Scalarmente

$$\begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ 2x - \sqrt{2}y = 0 \end{cases}$$

che ci restituisce l'unica soluzione

$$y = \sqrt{2}x$$

Autovalori e Autovettori

Esempio 1

Cerchiamo gli autovalori e gli autovettori di A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Per $\lambda_2 = \sqrt{2}$ otteniamo il sistema

$$\left(A + \sqrt{2}I\right)v = 0$$

Scalarmente

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + y = 0 \\ 2x + \sqrt{2}y = 0 \end{cases}$$

che ci restituisce l'unica soluzione

$$y = -\sqrt{2}x$$

In definitiva, gli autovettori di A relativi all'autovalore $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ sono tutti e soli quelli della forma

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} x$$

gli autovettori di A relativi all'autovalore $\lambda_2 = \sqrt{2}$ sono tutti e soli quelli della forma

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} x$$

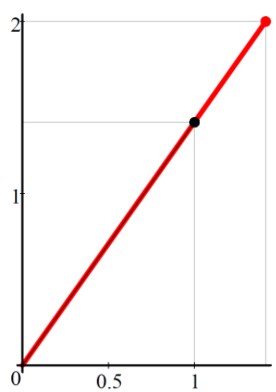
Autovalori e Autovettori

Esempio 1

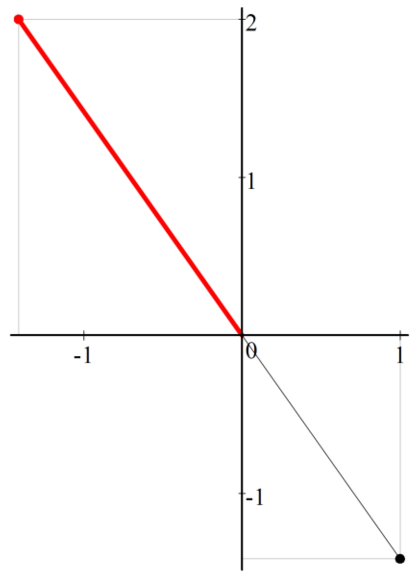
Cerchiamo gli autovalori e gli autovettori di A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

L'interpretazione geometrica di questo risultato è che esistono due direzioni privilegiate date dalle rette $y = \sqrt{2}x$ e $y = -\sqrt{2}x$



$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$



$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$