

*Prof. Roberto Capone*

# I vettori

Corso di Fisica e Geologia –mod.  
Fisica 2013/2014  
Corso di laurea in Ingegneria edile



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DEL MOLISE

# Vettori e scalari

Vengono definite dal loro valore numerico.  
Esempi: la lunghezza di un segmento, l'area di una figura piana; la temperatura di una stanza



Vengono definite dal loro valore numerico (intensità o modulo) da una direzione, da un verso:  
Esempi: la velocità, la forza

# Vettori e scalari

**Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta...**

L'informazione sullo spostamento è completa?

No, ne conosco solo l'entità.

**Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta lungo la strada per Potenza...**

Ho aggiunto informazione sulla mia direzione.

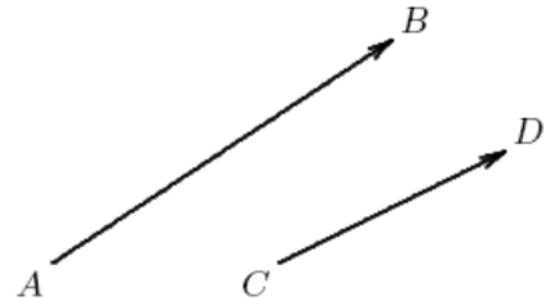
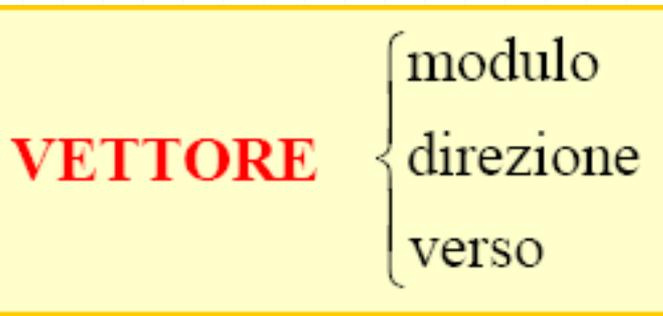
**Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta lungo la strada per Potenza verso Matera**

Questo dato completa l'informazione sul verso del mio spostamento.



# I vettori

Una grandezza fisica è un vettore quando per definirla completamente è necessario fornire un modulo o intensità (= l'entità), una direzione e un verso.

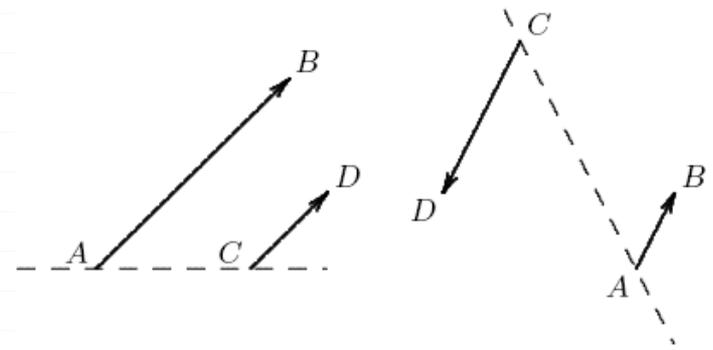


# Modulo, direzione, verso

- Scelta un'unità di misura, ad ogni segmento  $[AB]$  si può associare un numero reale non negativo  $AB$ , la misura della lunghezza di  $[AB]$ , che rappresenta il modulo o intensità del vettore.
- Il passo successivo consiste nel definire un segmento orientato come quel segmento di estremi  $A$  e  $B$  nel quale si sia assegnato un ordine e quindi si possa distinguere un punto iniziale ed uno finale. A tal fine si sceglie il simbolo convenendo di considerare  $A$  come il punto iniziale e  $B$  come quello finale. Graficamente ciò si esprime tramite una freccia che parte da  $A$  e giunge in  $B$

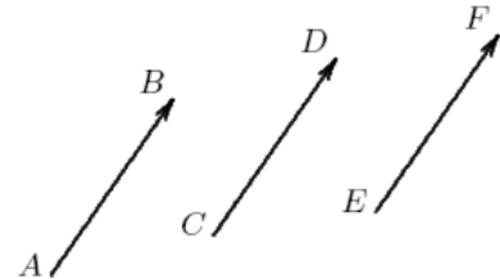
# Vettori paralleli e perpendicolari

- A questi nuovi enti si possono in modo del tutto naturale estendere i concetti di parallelismo e perpendicolarità. In particolare risulta parallelo ad una retta  $r$  se lo sono le rette  $r$  e la retta  $AB$  cioè  $r // AB$ . Così i segmenti orientati e si dicono *collineari* (o paralleli,  $//$ ) se esiste una linea retta  $r$  alla quale entrambi risultano paralleli.



# Vettori equipollenti

- Un segmento orientato può quindi essere posto in corrispondenza con un altro segmento orientato per mezzo della sua
1. lunghezza,
  2. collinearità,
  3. verso.



- Pertanto sull'insieme dei segmenti orientati del piano è possibile definire una relazione che associ con se e solo se

$$1. \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$$

$$2. \overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{CD}$$

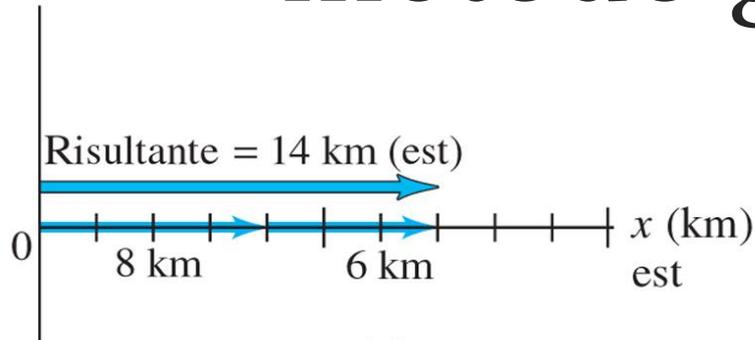
$$3. \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Tale relazione prende il nome di relazione di equipollenza

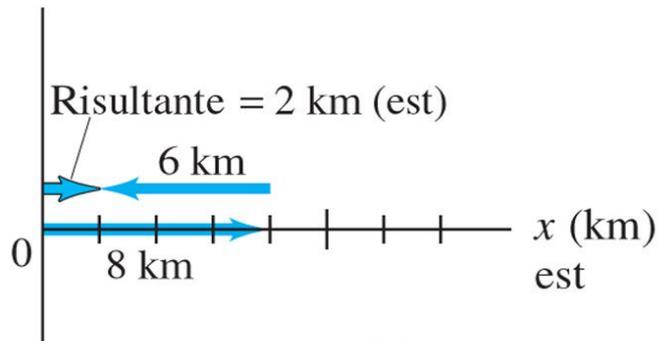
# Nuova definizione di vettore

- Definizione: *Un vettore nel piano (o nello spazio) è definito come l'insieme di tutti i segmenti orientati equipollenti, ossia di tutti i segmenti orientati aventi la medesima direzione, verso e lunghezza.*

# Operazioni con i vettori: metodo grafico



(a)



(b)

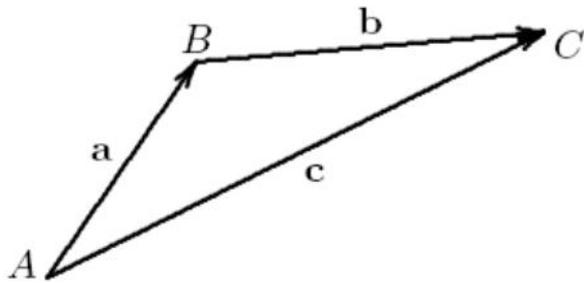
Se una persona cammina 8Km verso est per un giorno e 6Km ancora verso est il giorno dopo, quella persona avrà camminato 14Km verso est dal punto di partenza. Diremo che lo spostamento totale o risultante è di 14Km verso est.

Se una persona cammina 8Km verso est e poi 6Km verso ovest, lo spostamento risultante è di 2Km verso est

Fisica

Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana

# Operazioni con i vettori: metodo grafico



**Definizione** La somma di due vettori  $a$  e  $b$  è un vettore  $c = a + b$  la cui direzione e verso si ottengono nel modo seguente: si fissa il vettore  $a$  e, a partire dal suo punto estremo, si traccia il vettore  $b$ . Il vettore che unisce l'origine di  $a$  con l'estremo di  $b$  fornisce la somma  $c = a + b$ .

La somma vettoriale corrisponde a mettere i vettori uno dietro l'altro (metodo punta - coda)

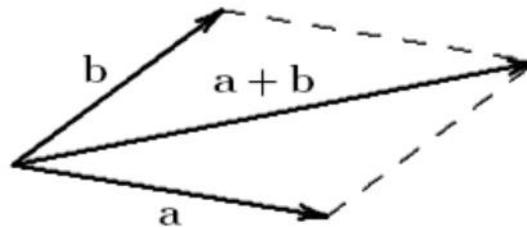
# Proprietà della somma

◦ Prop. commutativa:  $a + b = b + a$

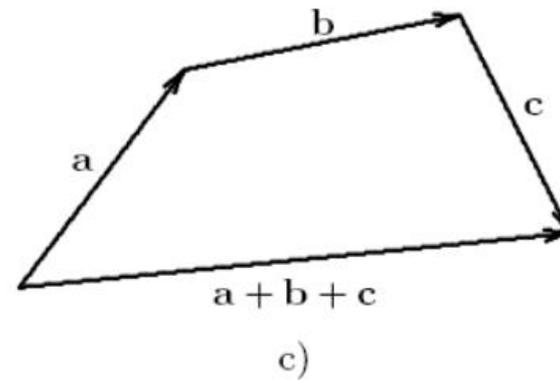
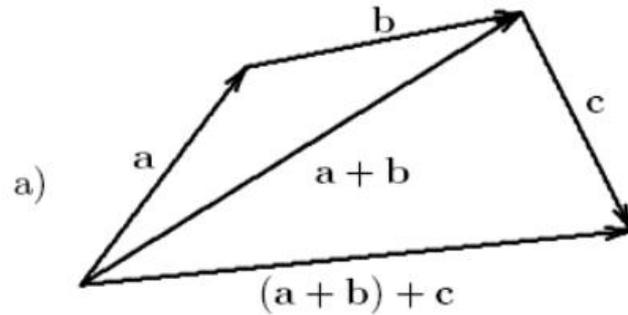
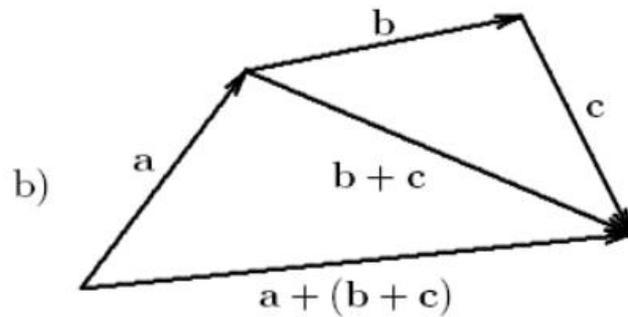
◦ Prop. associativa:  $(a + b) + c = a + (b + c)$

◦ Elemento neutro:  $a + 0 = a$

In particolare dalla proprietà commutativa discende una definizione alternativa della somma (o risultante) di due vettori ossia la *regola del parallelogramma*.

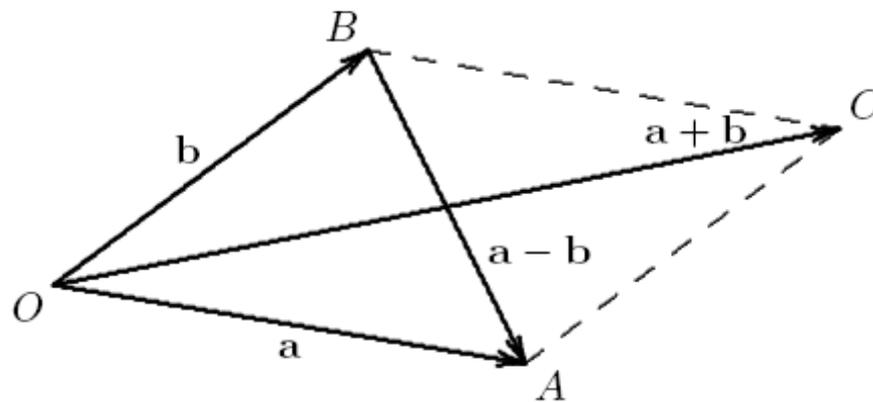


# Regola della poligonale



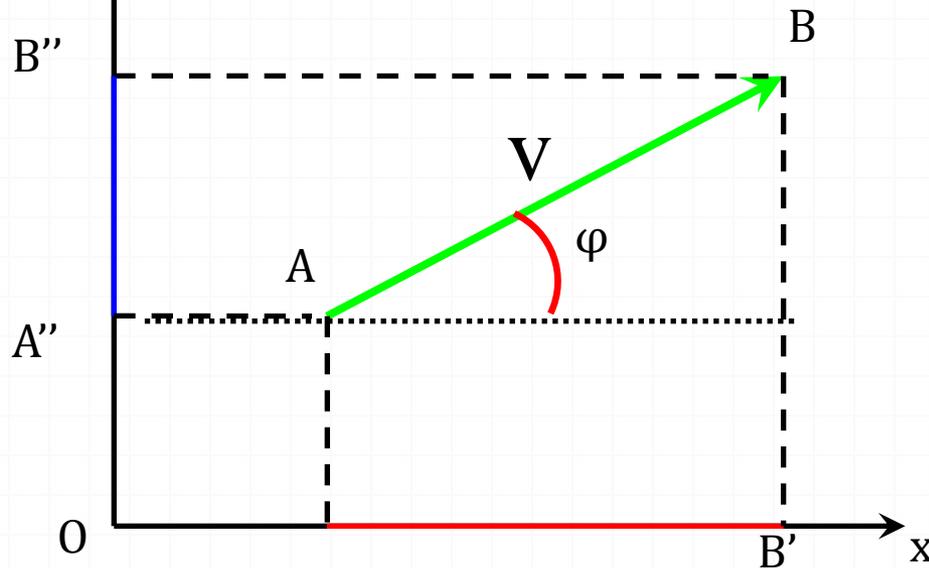
# Differenza tra due vettori

- Definizione *La differenza  $a-b$  di due vettori è la somma del vettore  $a$  con l'opposto del vettore  $b$  ossia  $a - b = a + (-b)$*



# I vettori nel piano

HELP  
MATEMATICA



**modulo di  $v$  = lunghezza del segmento AB**

**la direzione di  $v$  è definita dall'angolo  $\varphi$**

**componente  $V_x$  = lunghezza di A'B'**

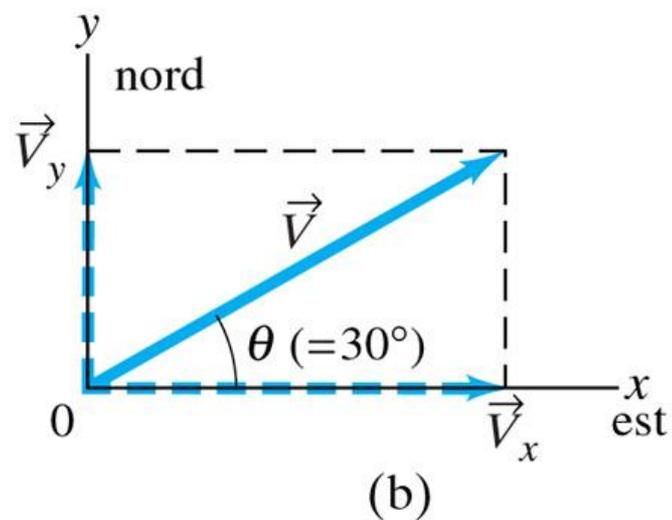
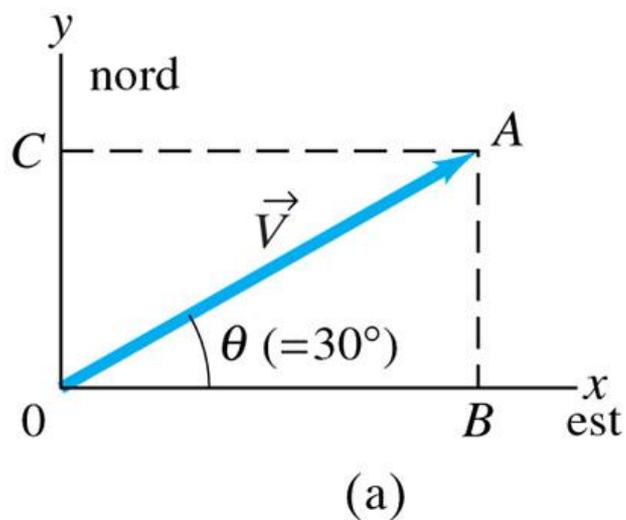
**componente  $V_y$  = lunghezza di A''B''**

$$v = (v_x, v_y)$$

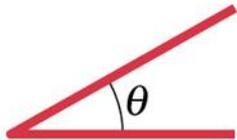
$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{v_y}{v_x}$$

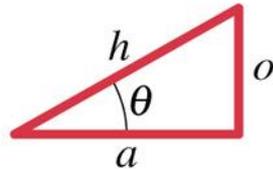
# I vettori nel piano



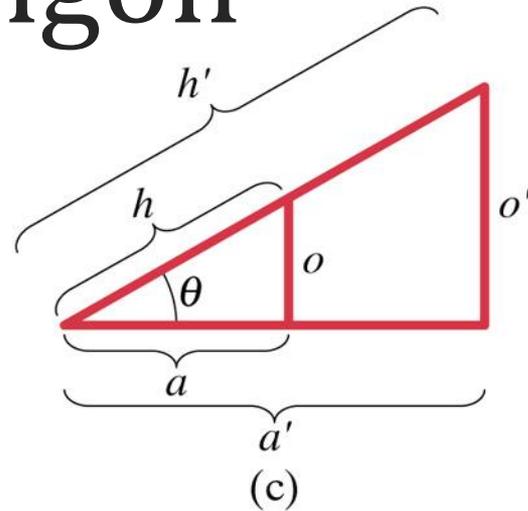
# Teoremi sui triangoli rettangoli



(a)



(b)



(c)

$$\sin\theta = \frac{\text{lato opposto}}{\text{ipotenusa}} = \frac{o}{h}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{lato adiacente}}{\text{ipotenusa}} = \frac{a}{h}$$

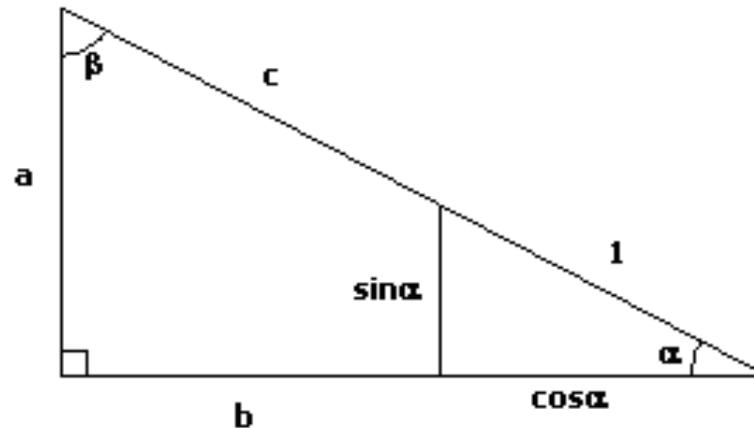
$$\tan\theta = \frac{\text{lato opposto}}{\text{lato adiacente}} = \frac{o}{a}$$

**Fisica**

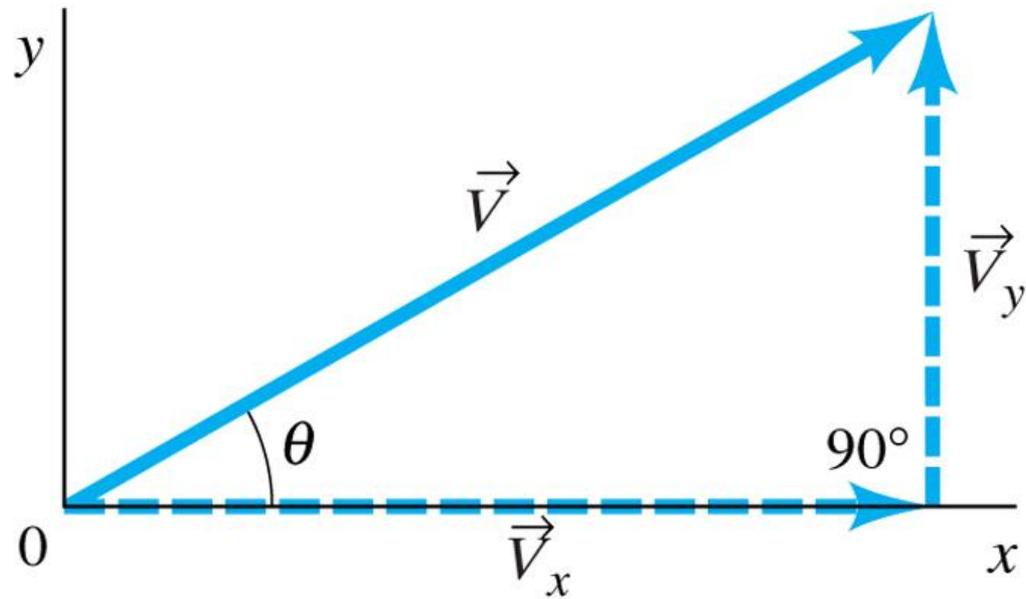
Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana

# Teoremi sui triangoli rettangoli

In un triangolo rettangolo il cateto è uguale all'ipotenusa per seno dell'angolo opposto, all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente, all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto oppure alla cotangente dell'angolo adiacente.



$$\begin{aligned} a &= c \sin \alpha & a &= c \cos \beta & b &= c \cos \alpha & b &= c \sin \beta \\ a &= b \tan \alpha & b &= a \tan \beta \end{aligned}$$



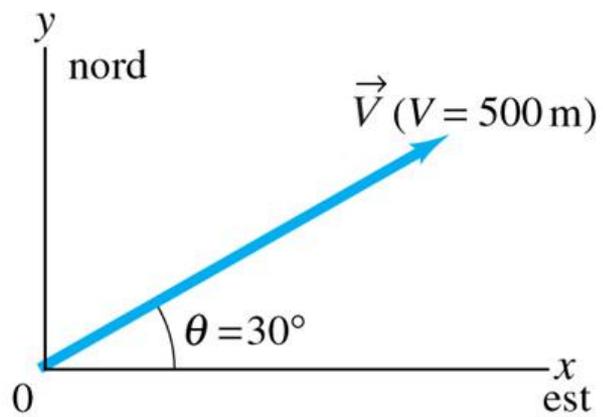
$$\text{sen } \theta = \frac{V_y}{V}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{V_x}{V}$$

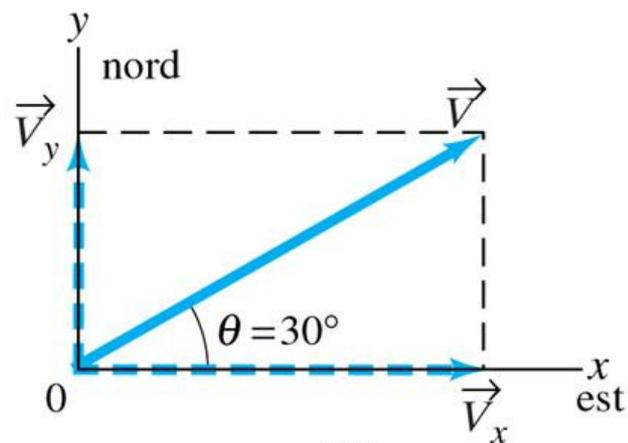
$$\text{tg } \theta = \frac{V_y}{V_x}$$

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2$$

**Fisica**



(a)



(b)

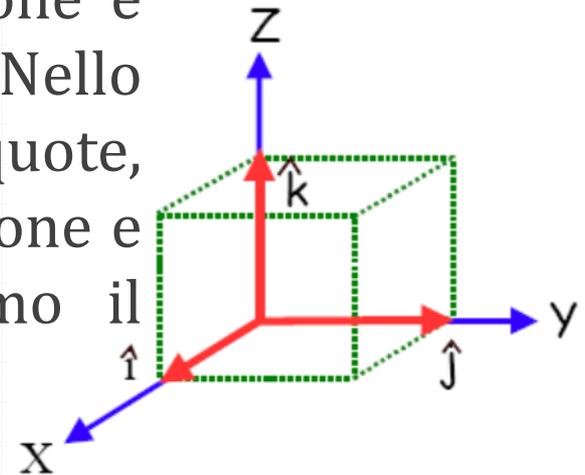
$$V_y = V \sin \theta = 250 \text{ m}$$

$$V_x = V \cos \theta = 433 \text{ m}$$

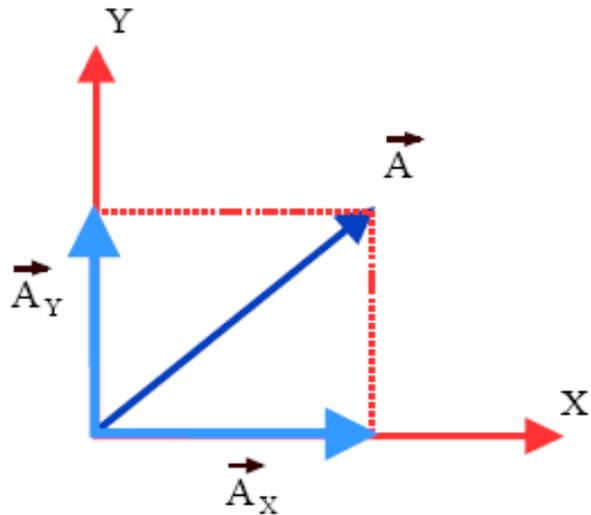
$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 500 \text{ m}$$

# Versori

o Il versore è un vettore che ha modulo unitario ed ha la direzione e il verso dei semiassi positivi del piano cartesiano. Per convenzione il vettore unitario che ha la direzione e il verso dell'asse X positivo si indica con  $\hat{i}$ , mentre il vettore unitario che ha la stessa direzione e verso dell'asse Y lo si indicherà con  $\hat{j}$ . Nello spazio dovendo introdurre l'asse delle quote, al vettore unitario che ha la stessa direzione e verso dell'asse positivo delle Z daremo il simbolo  $\hat{k}$ .



# Rappresentazione cartesiana



Se

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

E teniamo presente la definizione di versore:

$$\hat{i} = \frac{\vec{A}_x}{A_x} \quad \text{e} \quad \hat{j} = \frac{\vec{A}_y}{A_y}$$

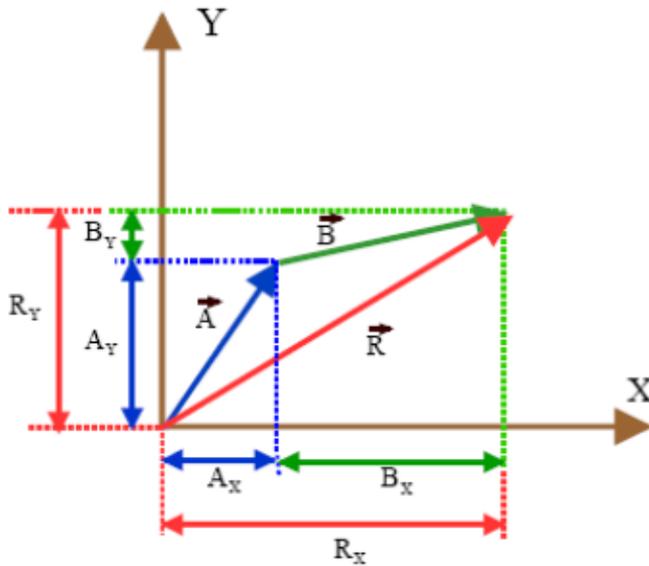
Si avrà che

$$\begin{aligned} \vec{A}_x &= A_x \hat{i} \\ \vec{A}_y &= A_y \hat{j} \end{aligned}$$

Allora il vettore  $\vec{A}$  si potrà scrivere

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

# Somma di vettori



Le componenti di R sono la somma aritmetica delle componenti dei vettori A e B

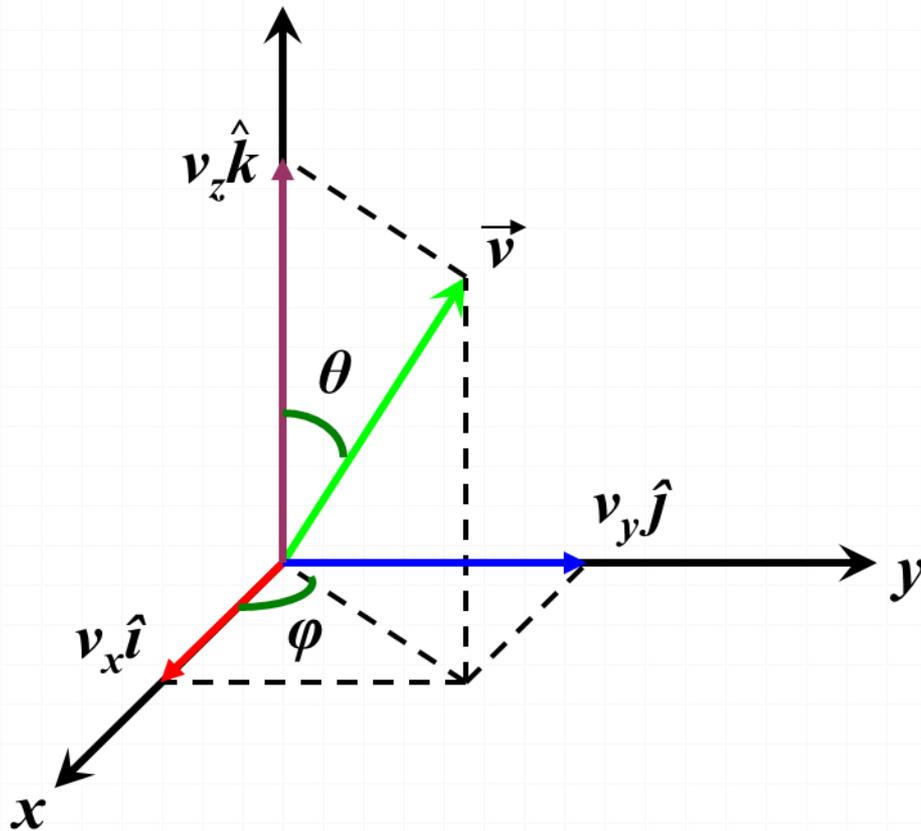
$$R_x = A_x + B_x$$
$$R_y = A_y + B_y$$

Per cui

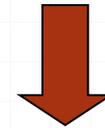
$$\vec{R} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j}$$

**Pertanto la risultante di due o più vettori ha per componenti la somma delle componenti omologhe dei singoli vettori**

# Vettori nello spazio



$$\mathbf{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$



$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

*La direzione di  $\mathbf{v}$  risulta definita dagli angoli  $\theta$  e  $\varphi$*

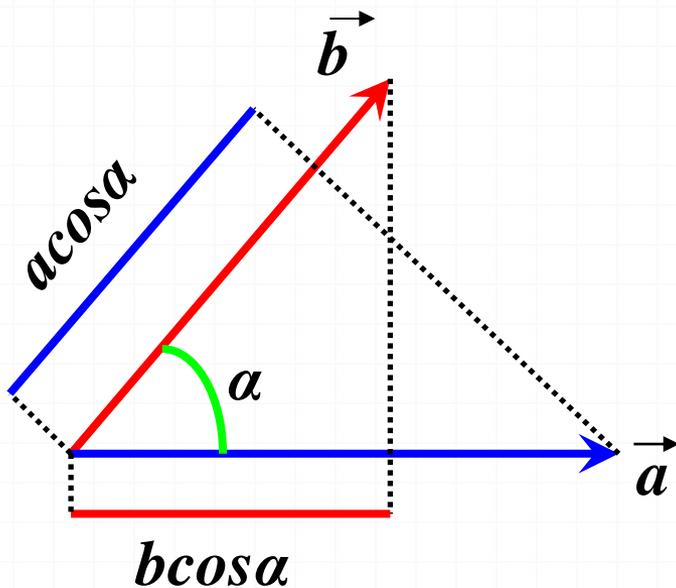
$$\theta = \arccos \frac{v_z}{|\mathbf{v}|}$$

$$\varphi = \arctan \frac{v_y}{v_x}$$

# Prodotto scalare

Dati due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , il prodotto scalare tra  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  è una grandezza scalare definita nel modo seguente:

$$\mathbf{a \cdot b = a b \cos\alpha}$$



Il prodotto scalare tra  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  è un numero che è pari al prodotto del modulo di  $\vec{a}$  per la componente di  $\vec{b}$  lungo la direzione di  $\vec{a}$ .

Ovviamente il prodotto scalare è anche pari al prodotto del modulo di  $\vec{b}$  per la componente di  $\vec{a}$  lungo la direzione di  $\vec{b}$ .

# Prodotto scalare in componenti cartesiane

Tenendo conto del fatto che i versori degli assi cartesiani sono a due a due perpendicolari fra loro, si ha che:

$$\begin{aligned}\hat{i} \cdot \hat{i} &= 1 & \hat{i} \cdot \hat{j} &= 0 & \hat{i} \cdot \hat{k} &= 0 \\ \hat{j} \cdot \hat{i} &= 0 & \hat{j} \cdot \hat{j} &= 1 & \hat{j} \cdot \hat{k} &= 0 \\ \hat{k} \cdot \hat{i} &= 0 & \hat{k} \cdot \hat{j} &= 0 & \hat{k} \cdot \hat{k} &= 1\end{aligned}$$

Di conseguenza, esprimendo i vettori in termini delle loro componenti cartesiane, si ha:

$$\mathbf{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$\mathbf{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

**Caso particolare:**  $\vec{b} = \vec{a}$

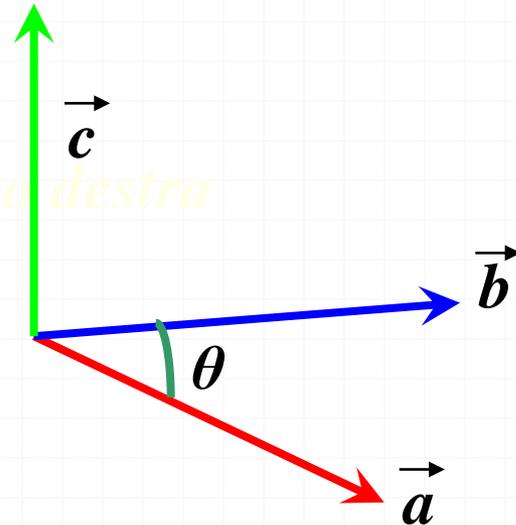


$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\mathbf{a}|^2$$

# Prodotto vettoriale

Dati due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , il prodotto vettoriale  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  è un vettore che gode delle proprietà seguenti:

- il modulo di  $\vec{c}$  è dato da  $absin\theta$ , dove  $\theta$  è l'angolo minore di  $180^\circ$  compreso tra  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$
- la direzione di  $\vec{c}$  è perpendicolare al piano individuato da  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$
- il verso di  $\vec{c}$  è calcolato applicando la regola della mano destra



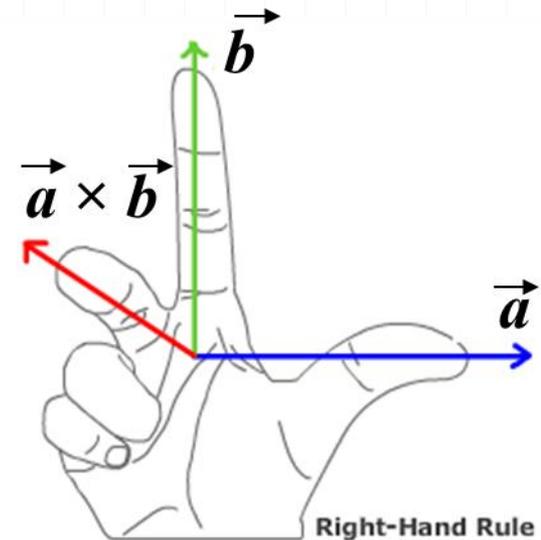
# La regola della mano destra

## Prima formulazione

Si dispone il pollice lungo il primo vettore

Si dispone l'indice lungo il secondo vettore

Il verso del medio individua il verso del prodotto vettoriale



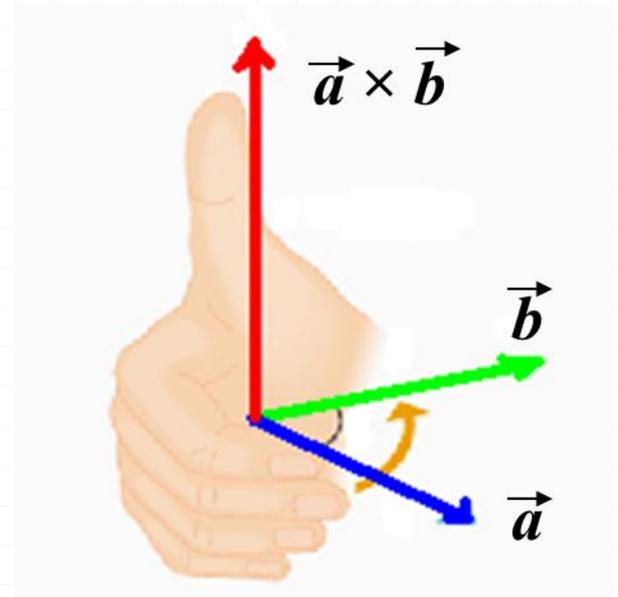
# Regola della mano destra

## Seconda formulazione

Si chiude a pugno la mano destra mantenendo sollevato il pollice

Le dita chiuse a pugno devono indicare il verso in cui il primo vettore deve ruotare per sovrapporsi al secondo in modo che l'angolo  $\theta$  di rotazione sia minore di  $180^\circ$

Il verso del pollice individua il verso del prodotto vettori



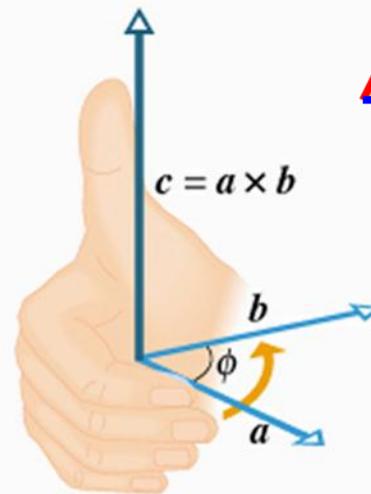
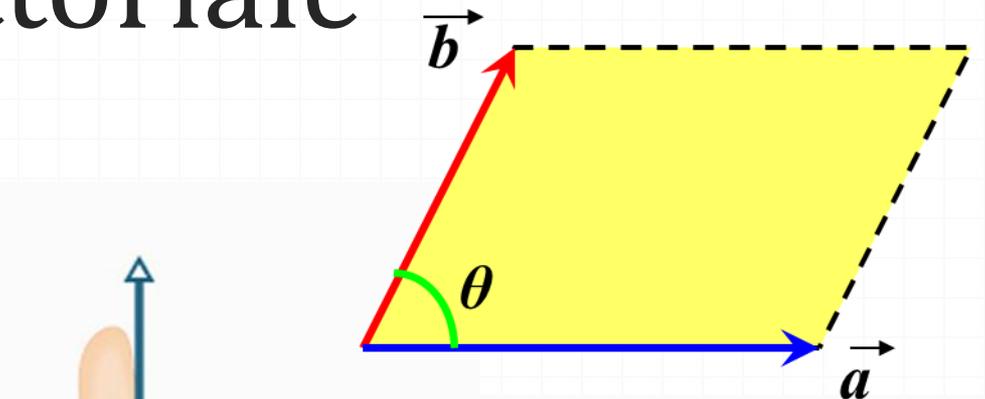
# Proprietà del prodotto vettoriale

Il modulo del prodotto vettoriale è pari all'area del parallelogramma individuato dai due vettori

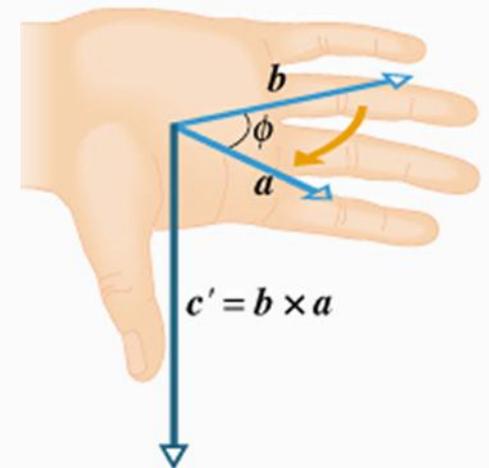
Il prodotto vettoriale è nullo se i due vettori sono paralleli ( $\theta=0$ )

Il prodotto vettoriale gode della proprietà anticommutativa:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$



(a)



(b)

# Prodotto vettoriale in componenti cartesiane

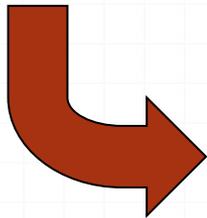
- o Tenendo conto che i versori degli assi cartesiani sono a due a due perpendicolari fra loro, ed applicando la regola della mano destra, si hanno le seguenti relazioni:

$$\begin{array}{lll} \hat{i} \times \hat{i} = 0 & \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} & \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} \\ \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k} & \hat{j} \times \hat{j} = 0 & \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} & \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i} & \hat{k} \times \hat{k} = 0 \end{array}$$

# Prodotto vettoriale

- Pertanto, esprimendo i vettori in termini delle loro componenti cartesiane, si ha che:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \hat{\mathbf{i}}(a_y b_z - a_z b_y) + \hat{\mathbf{j}}(a_z b_x - a_x b_z) + \hat{\mathbf{k}}(a_x b_y - a_y b_x)$$



$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

# Determinante di una matrice

Regola di Sarrus  
Regola di Laplace

Il determinante di una matrice  $2 \times 2$  è pari a

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc.$$

Il determinante di una matrice  $3 \times 3$  è pari a

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb.$$

# Esempi e applicazioni:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Possiamo dimostrarlo seguendo due strade.

La più sintetica fa uso della proprietà anticommutativa per cui, commutando i fattori, deve essere  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{a}$ . Ne segue che il vettore prodotto  $\mathbf{c}$  è uguale al proprio opposto  $-\mathbf{c}$  e ciò può essere vero solo per il vettore nullo  $\mathbf{0}$ .

L'altra si basa sullo sviluppo del determinante

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{a} = (a_y a_z - a_z a_y)\hat{i} + (a_z a_x - a_x a_z)\hat{j} + (a_x a_y - a_y a_x)\hat{k} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = \mathbf{0}$$

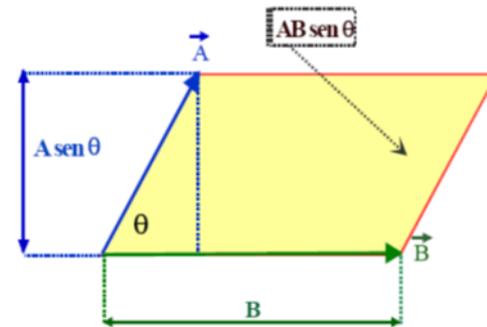
come si vede un determinante con due righe uguali si annulla.

- In modo analogo a quanto svolto nel precedente esempio, possiamo dedurre che se  $\mathbf{b} = \mathbf{a}$  ossia se i due fattori sono collineari, il loro prodotto vettoriale si annulla. Poiché, inoltre, vale pure l'implicazione opposta, abbiamo la possibilità di riscrivere la condizione di col linearità in modo alternativo; allora:

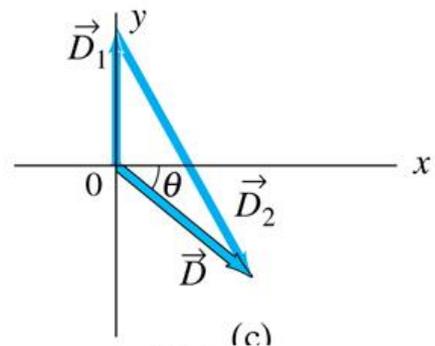
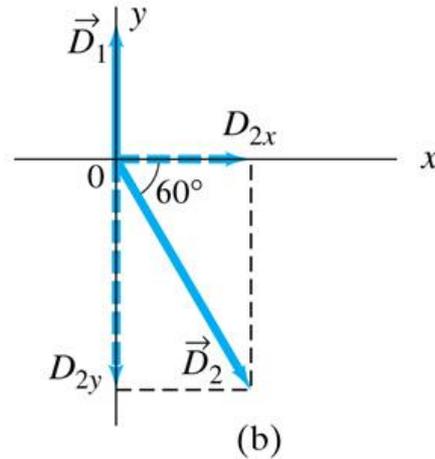
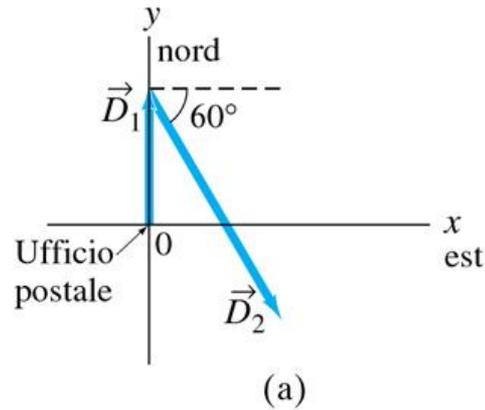
$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

# Applicazione

- Il modulo del prodotto vettoriale è numericamente uguale all'area del parallelogramma individuato dai due vettori e le parallele che passano per gli estremi. Consideriamo la seguente figura che mostra due vettori che hanno la stessa origine e le parallele per essi.

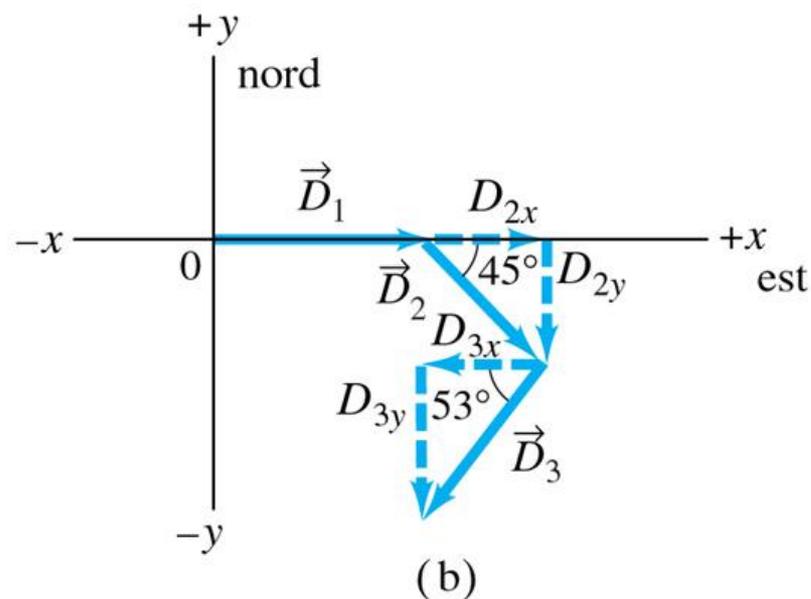
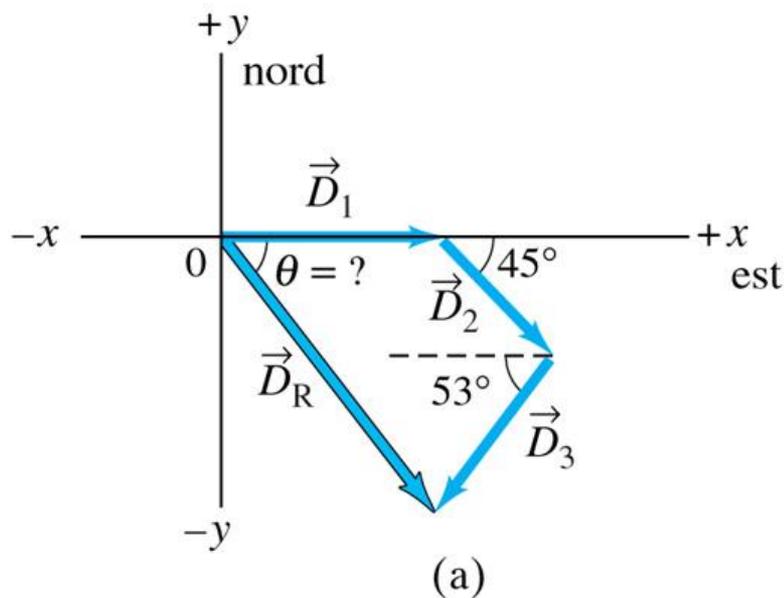


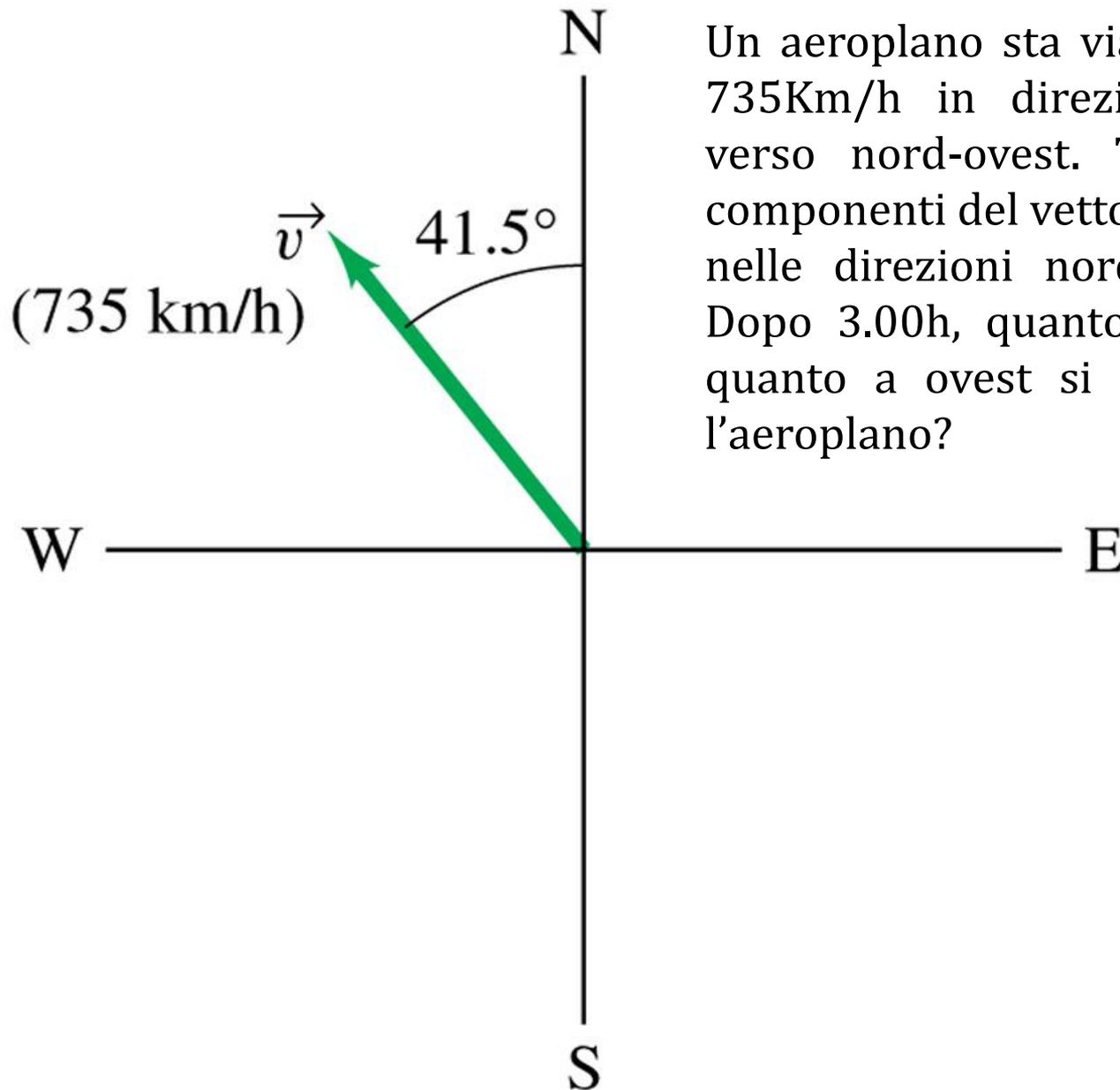
- L'area di questo parallelogramma si calcola moltiplicando la base ( $B$ ) per l'altezza ( $A \sin \theta$ ):  $\text{Area} = B A \sin \theta$



Un postino di campagna lascia l'ufficio postale e si dirige per 22.0Km verso nord fino alla città più vicina. Quindi procede in direzione  $60.0^\circ$  a sud rispetto a est per 47Km verso un'altra città. Qual è il suo spostamento dall'ufficio postale

Un viaggio aereo è formato da tre tratte, con due scali. La prima tratta è diretta verso est per 620Km; la seconda tratta è diretta a sudest ( $45^\circ$ ) per 440Km; la terza a  $53^\circ$  a sud, rispetto a ovest, per 550Km. Qual è lo spostamento totale dell'aereo?



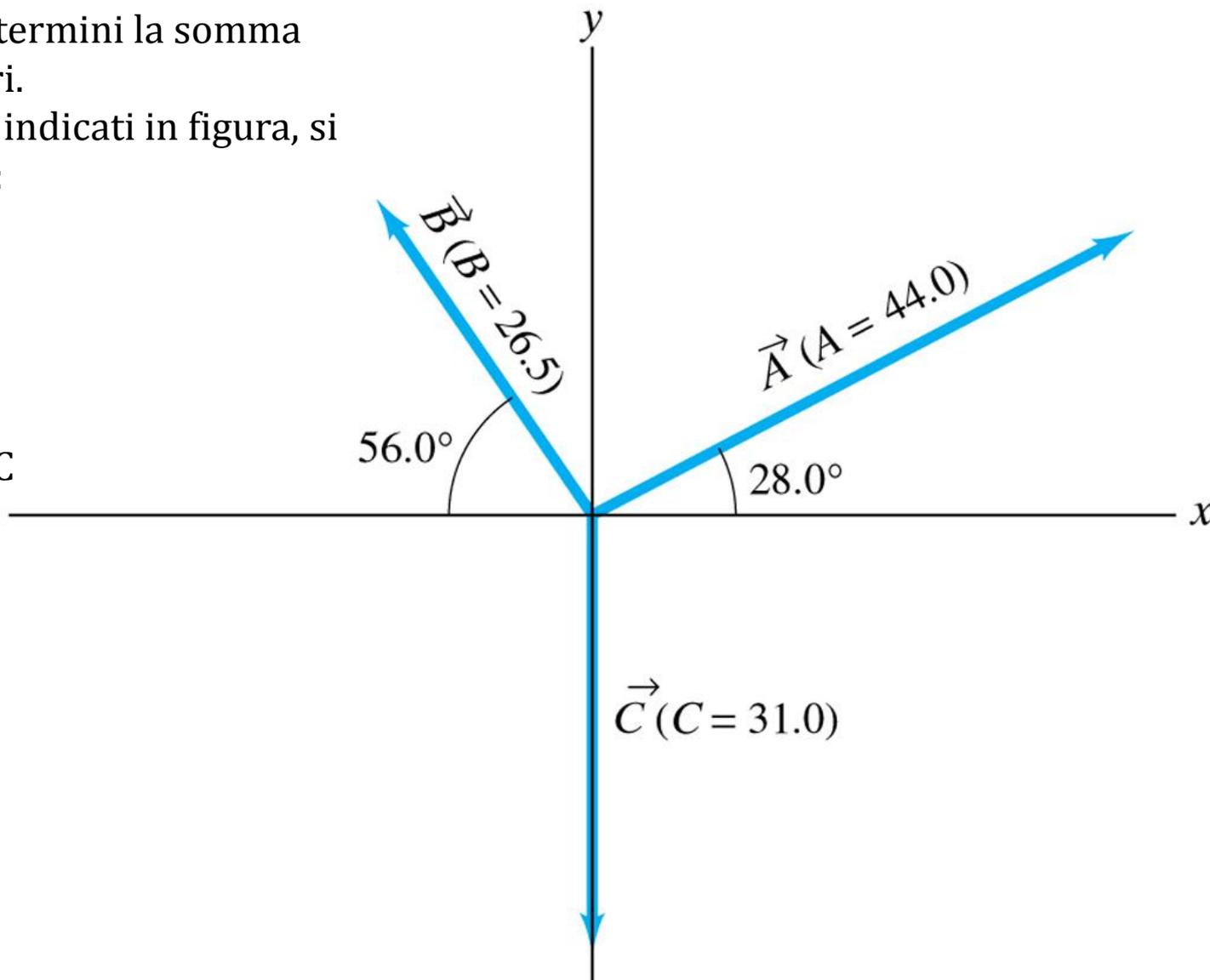


Un aeroplano sta viaggiando a  $735 \text{ km/h}$  in direzione  $41.5^\circ$  verso nord-ovest. Trovare le componenti del vettore velocità nelle direzioni nord e ovest. Dopo  $3.00 \text{ h}$ , quanto a nord e quanto a ovest si è spostato l'aeroplano?

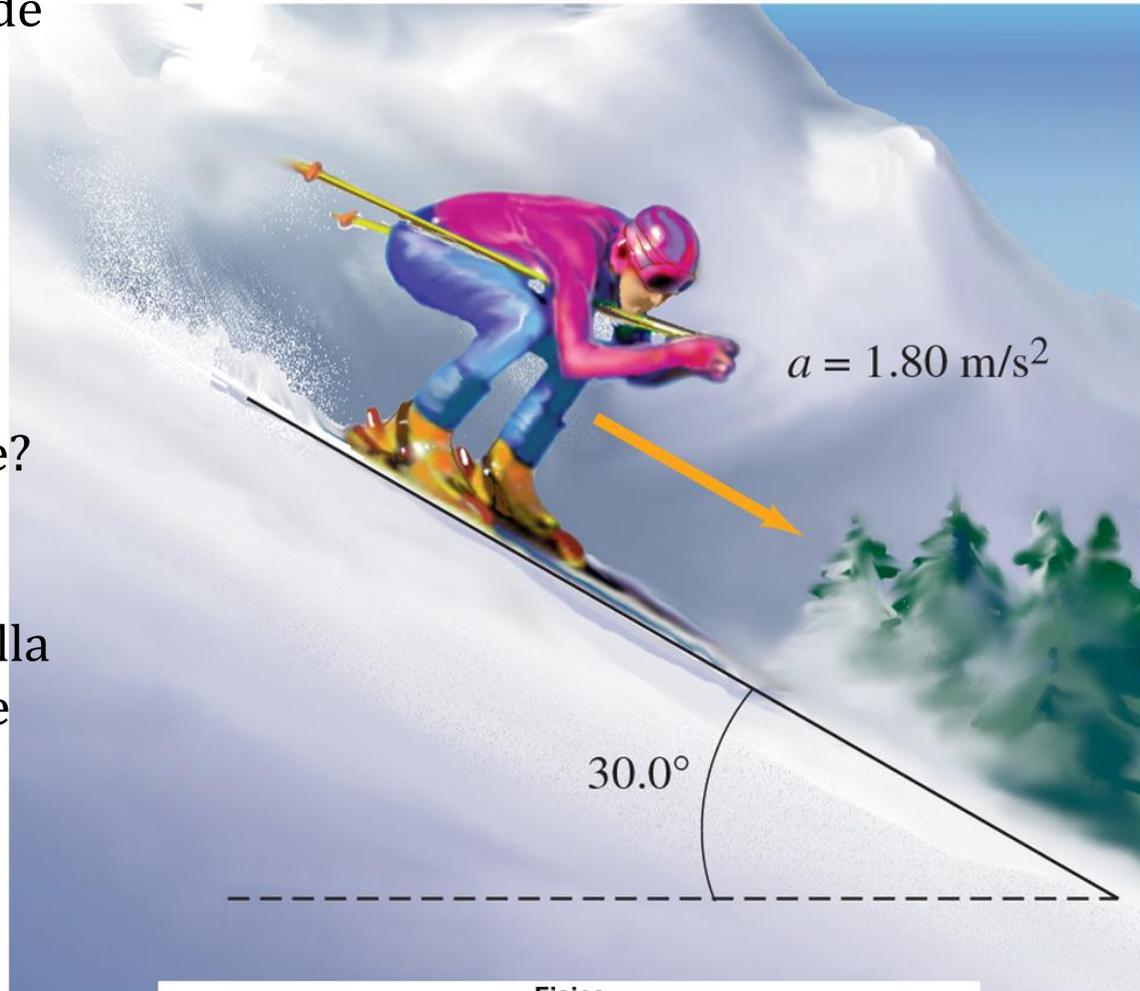
In figura sono mostrati tre vettori. Si determini la somma dei tre vettori.

Dati i vettori indicati in figura, si determinino:

- $A-C$
- $A-B+C$
- $A+B-C$
- $B-2A$
- $C-A$
- $2A-3B+2C$



Uno sciatore, che scende lungo una collina con  $30.0^\circ$  di pendenza, è soggetta a una accelerazione di  $1.80\text{m/s}^2$ . Qual è la componente verticale della sua accelerazione? Quanto tempo impiegherà per raggiungere la base della collina, assumendo che sia partita da ferma a abbia accelerato uniformemente, se il dislivello è di  $335\text{m}$ ?



Fisica

Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana