EQUAZIONI A SECONDO MEMBRO OMOGENEO (o brevemente omogenee)

Sono le equazioni del tipo $y' = f(x, y)$ con $f(x, y)$ funzione omogenea di grado 0, ovvero le equazioni che possono porsi nella forma:

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Si pone $\frac{y}{x} = z$, ovvero $y = xz$, si ha $y' = z + xz'$, diventando:

$$xz' = g(z) - z$$

che è una equazione a variabili separabili nell'incognita z

EQUAZIONE DEL TIPO $\boldsymbol{y' = g\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)}$

Se a e b sono proporzionali ad a' e b'	
Se a e b non sono proporzionali ad a' e b'	Le due rette $\boldsymbol{ax+by+c=0}$ **e** $\boldsymbol{a'x+b'y+c'=0}$ **hanno in comune il punto** $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ **diverso dall'origine. Si determina tale punto e poi si procede con un cambiamento di variabile:** $$x = u+\alpha,\ \ y = v+\beta$$ Risulterà: $$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(v+\beta)}{d(u+\alpha)} = \frac{dv}{du}$$ Si avrà quindi: $$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au+bv}{a'u+b'v}\right) = f\left(\frac{a+b\frac{v}{u}}{a'+b'\frac{v}{u}}\right)$$ cioè una equazione brevemente omogenea. Ad ogni integrale $v = v(u)$ di essa corrisponde l'integrale $y = \beta + v(x-\alpha)$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE A VARIABILI SEPARATE

Si presenta nella forma

$$f(x)dx + g(x)dx = 0$$

La soluzione si ottiene separando le variabili e integrando rispetto a x e y rispettivamente

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = c$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE NON OMOGENEA

Si presenta nella forma

$$y' + p(x)y = q(x)$$

con $p(x), q(x)$ funzioni della variabile x, che supponiamo continue in un intervallo [a,b]

La soluzione è data dalla formula

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI BERNOULLI

Si presenta nella forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

Si risolve per cambiamento di variabile ponendo

$$y^{1-n} = z$$

Si ricava, infatti:

$$y = z^{\frac{1}{1-n}}, y' = \frac{1}{1-n} z^{\frac{n}{1-n}} \cdot z'$$

Da cui:

$$\frac{1}{1-n} \cdot z^{\frac{n}{1-n}} \cdot z' + p(x) \cdot z^{\frac{1}{1-n}} = q(x) \cdot z^{\frac{n}{1-n}}$$

Dividendo per $\frac{1}{1-n} \cdot z^{\frac{n}{1-n}}$:

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$$

che è una equazione differenziale del I ordine lineare non omogenea.

EQUAZIONE DIFFERENZIALE $y'' + ay' + by = p(x)$

Termine noto dell'equazione differenziale	Condizioni	Forma dell'integrale particolare
Polinomio di grado n	$b \neq 0$	Polinomio di grado n
	$b = 0, a \neq 0$	Polinomio di grado n+1
	$b = 0, a = 0$	Polinomio di grado n+2
$Ae^{\alpha x}$	α non è radice dell'equazione caratteristica	$Be^{\alpha x}$
	α è radice semplice dell'equazione caratteristica	$Bxe^{\alpha x}$
	α è radice doppia dell'equazione caratteristica	$Bx^2e^{\alpha x}$
$Csin\beta x + Dcos\beta x$	$i\beta$ non è radice dell'equazione caratteristica	$Asin\beta x + Bcos\beta x$
	$i\beta$ è radice dell'equazione caratteristica	$x(Asin\beta x + Bcos\beta x)$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI EULERO

Le equazioni lineari omogenee a coefficienti variabili di Eulero sono Equazioni differenziali ordinarie omogenee a coefficienti variabili della forma

$$x^n y^{(n)}(x) + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} x y'(x) + a_n y(x) = 0$$

Questo tipo di equazione differenziale si risolve con un cambiamento di variabili ponendo $x = e^u$. le soluzioni delle equazioni omogenee di Eulero si possono scrivere come combinazioni lineari di funzioni della forma $x^\lambda log^m x$ ove λ è un numero complesso e m è un intero non negativo.

Consideriamo la generica equazione omogenea di Eulero di secondo grado

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0$$

ove a_1 e a_2 sono numeri reali. Sostituendo $y(x) = x^\lambda$, si ottiene:

$$\lambda(\lambda - 1)x^\lambda + a_1 \lambda x^\lambda + a_2 x^\lambda = 0$$

che per *x* non nullo è equivalente a

$$\lambda(\lambda - 1) + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

Si possono verificare tre casi distinti

$\Delta > 0$	Due valori reali e distinti di λ	$y(x) = ax^{\lambda_1} + bx^{\lambda_2}$
$\Delta = 0$	Radici reali e coincidenti	$y(x) = ax^{\lambda_0} + bx^{\lambda_0} logx$
$\Delta < 0$	Radici complesse coniugate $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y(x) = x^\alpha(a\cos(\beta logx) + bsin(\beta logx))$